24. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide circular $z = x^2 + y^2$ e acima do retângulo $R = [-2, 2] \times [-3, 3]$.

25. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

26. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [1, 3]$.

27. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

28. Determine o volume do sólido limitado pelo parabolóide elíptico, $z = 1 + (x - 1)^2 + 4y^2$, pelos planos $x = 3$ e $y = 2$, e pelos planos coordenados.

29. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

30. (a) Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = 6 - xy$ e pelos planos $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$, $y = 3$ e $z = 0$.
(b) Use o computador para desenhar o sólido.

CAS 31. Utilize um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida utilize o CAS para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.

CAS 32. Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2}\cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Utilize um sistema computacional algébrico para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.

33–34 □ Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.

33. $f(x, y) = x^2 y$, R tem vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

34. $f(x, y) = x \operatorname{sen} xy$, $R = [0, \pi/2] \times [0, 1]$

CAS 35. Utilize seu CAS para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

Sua resposta contradiz o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

36. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?
(b) Se $f(x, y)$ é contínua em $[a, b] \times [c, d]$ e

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Genéricas

Para integrais simples, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Mas, para integrais duplas, queremos ser capazes de integrar a função f não somente sobre retângulos, mas também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode ser cercada por uma região retangular R como na Figura 2. Definimos então uma nova função F com domínio R por

$$\boxed{1} \qquad F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$

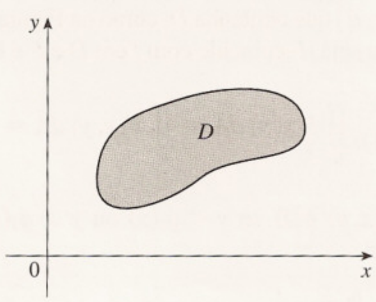

FIGURA 1

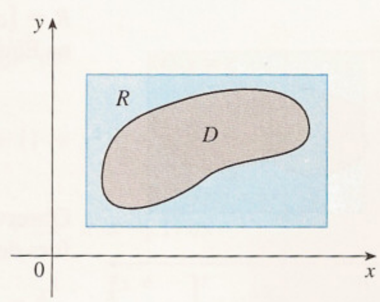

FIGURA 2

já que $\int_a^b g(x)\,dx$ é constante. Portanto, nesse caso, a integral dupla de f pode ser escrita como o produto de duas integrais simples:

$$\boxed{\iint\limits_R g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{onde} \quad R = [a, b] \times [c, d]}$$

EXEMPLO 5 □ Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então

$$\iint\limits_R \operatorname{sen} x \cos y\,dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} \left[\operatorname{sen} y\right]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

□

□ A função $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R; assim a integral representa o volume do sólido contido entre o gráfico de f e R.

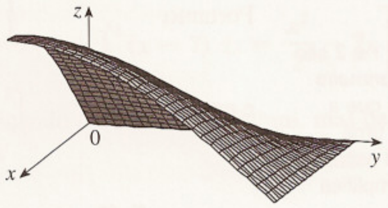

FIGURA 6

15.2 Exercícios

1–2 □ Determine $\int_0^3 f(x, y)\,dx$ e $\int_0^4 f(x, y)\,dy$.

1. $f(x, y) = 2x + 3x^2y$

2. $f(x, y) = \dfrac{y}{x + 2}$

3–12 □ Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\,dx\,dy$

4. $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dy\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos y\,dy\,dx$

6. $\int_1^4 \int_0^2 (x + \sqrt{y})\,dx\,dy$

7. $\int_0^3 \int_0^1 \sqrt{x + y}\,dx\,dy$

8. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x + y)\,dy\,dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) dy\,dx$

10. $\int_1^2 \int_0^1 (x + y)^{-2}\,dx\,dy$

11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\,dx\,dy$

12. $\int_0^1 \int_0^1 \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\,dy\,dx$

13–20 □ Calcule a integral dupla.

13. $\iint\limits_R (6x^2y^3 - 5y^4)\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1\}$

14. $\iint\limits_R xye^y\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$

15. $\iint\limits_R \dfrac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ -3 \leq y \leq 3\}$

16. $\iint\limits_R \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

17. $\iint\limits_R x \operatorname{sen}(x + y)\,dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

18. $\iint\limits_R xe^{xy}\,dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

19. $\iint\limits_R \dfrac{1}{x + y}\,dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$

20. $\iint\limits_R \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dA, \quad R = [1, 2] \times [0, 1]$

21–22 □ Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

21. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$

22. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

23. Determine o volume do sólido que é limitado acima pelo plano $z = 2x + 5y + 1$ e abaixo pelo retângulo $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0,\ 1 \leq y \leq 4\}$.