14.4 Exercícios

1–6 □ Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = y^2 - x^2$, $(-4, 5, 9)$

2. $z = 9x^2 + y^2 + 6x - 3y + 5$, $(1, 2, 18)$

3. $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, $(1, -1, 1)$

4. $z = \operatorname{sen}(x + y)$, $(1, -1, 0)$

5. $z = \ln(2x + y)$, $(-1, 3, 0)$

6. $z = e^x \ln y$, $(3, 1, 0)$

7–8 □ Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o tamanho da janela de inspeção e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida amplie até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. $z = xy$, $(-1, 2, -2)$

8. $z = \sqrt{x - y}$, $(5, 1, 2)$

CAS **9–10** □ Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema algébrico computacional tanto para computar as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida faça uma ampliação até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/15}(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y)$, $(2, 3, f(2, 3))$

10. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}{1 + x^4 + y^4}$, $(1, 1, 1)$

11–16 □ Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. Faça então a linearização $L(x, y)$ da função no ponto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, $(1, 4)$

12. $f(x, y) = y \ln x$, $(2, 1)$

13. $f(x, y) = e^x \cos xy$, $(0, 0)$

14. $f(x, y) = x/y$, $(6, 3)$

15. $f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(x + 2y)$, $(1, 0)$

16. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$, $(0, 2)$

17. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1{,}95;\ 1{,}08)$.

18. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6{,}9;\ 2{,}06)$. Ilustre traçando o gráfico da função e do plano tangente.

19. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

20. A altura h de ondas em mar aberto depende da rapidez do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados em pés na tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (nós) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 40 nós e t está próximo de 20 horas. Em seguida estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 43 nós.

21. Utilize a tabela do Exemplo 3 e determine a aproximação linear do índice de calor quando a temperatura se aproxima de 94 °F e a umidade relativa do ar é aproximadamente 80%. Estime também o índice quando a temperatura é 95 °F e a umidade relativa é 78%.

22. O índice I que mede a temperatura devida ao vento dá a sensação de temperatura quando a temperatura real é T e a rapidez do vento é v. Podemos então escrever $I = f(T, v)$. A seguinte tabela de valores foi extraída de uma tabela do Serviço de Administração Nacional de Atmosfera e Oceanos dos Estados Unidos.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	10	20	30	40	50
20	18	16	14	13	13
16	14	11	9	7	7
12	9	5	3	1	0
8	5	0	−3	−5	−6

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função índice de efeito do vento quando T é 16 °C e v é 30 km/h. Estime também quando a temperatura é 14 °C e a rapidez do vento é 27 km/h.

23–28 □ Determine o diferencial da função.

23. $z = x^2y^3$

24. $v = \ln(2x - 3y)$

25. $u = e^t \operatorname{sen} \theta$

26. $u = r/(s + 2t)$

27. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

28. $w = x \operatorname{sen} yz$

29. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ a $(1{,}05, 2{,}1)$, compare os valores de Δz e dz.

30. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2{,}96, -0{,}95)$, compare os valores de Δz e dz.

31. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de no máximo 0,1 cm. Utilize os diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

32. As dimensões de uma caixa fechada retangular foram medidas como 80 cm, 60 cm e 50 cm, respectivamente, com erro máximo de 0,2 cm em cada dimensão. Utilize diferenciais para estimar o máximo erro no cálculo da área da superfície da caixa.

33. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho numa lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

34. Utilize diferencial para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo tem 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

35. Uma faixa de 3 polegadas de largura é pintada ao redor de um retângulo de dimensões 100 pés por 200 pés. Utilize diferenciais para aproximar a área em pés quadrados pintada na faixa.

36. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8{,}31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura diminui de 310 K para 305 K.

37. Se R é a resistência equivalente de três resistências conectadas em paralelo, com valores R_1, R_2 e R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$, com precisão de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no cálculo da resistência equivalente de R.

38. Quatro números positivos, cada um menor do que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

39–40 □ Mostre que a função é diferenciável achando valores ε_1 e ε_2 que satisfaçam a Definição 7.

39. $f(x, y) = x^2 + y^2$

40. $f(x, y) = xy - 5y^2$

41. Prove que se f é uma função de duas variáveis diferenciável em (a, b), então f é contínua em (a, b). *Dica*: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

42. Na Figura 4 aparece o gráfico da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. [*Dica*: Utilize o resultado do Exercício 41.]

14.5 Regra da Cadeia

Lembremos que a regra da cadeia para uma função de uma única variável nos dava uma regra para diferenciar uma função composta: Se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então y é indiretamente uma função diferenciável de t e

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para funções de mais do que uma variável, a Regra da Cadeia tem muitas versões, cada uma delas fornecendo uma regra de diferenciação de uma função composta. A primeira versão (Teorema 2) diz respeito ao caso onde $z = f(x, y)$ e cada uma das variáveis x e y é função de uma variável t. Isso significa que z é função de t, $z = f(g(t), h(t))$, e a Regra da Cadeia dá a fórmula para diferenciar z em função de t. Estamos admitindo que f seja diferenciável (Definição 14.4.7). Lembremos que este é o caso quando f_x e f_y são contínuas (Teorema 14.4.8).