Um sistema algébrico computacional tem comandos que plotam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é plotado partindo-se de um ponto (a, b). A Figura 13 mostra como fica um desses desenhos (chamados *campos de vetores gradientes*) para a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobreposto a um mapa de contornos de f. Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção de "subida de morro" e são perpendiculares às curvas de nível.

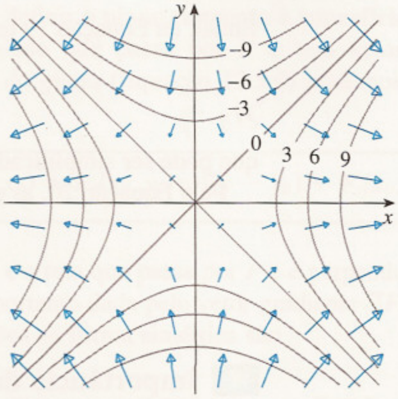
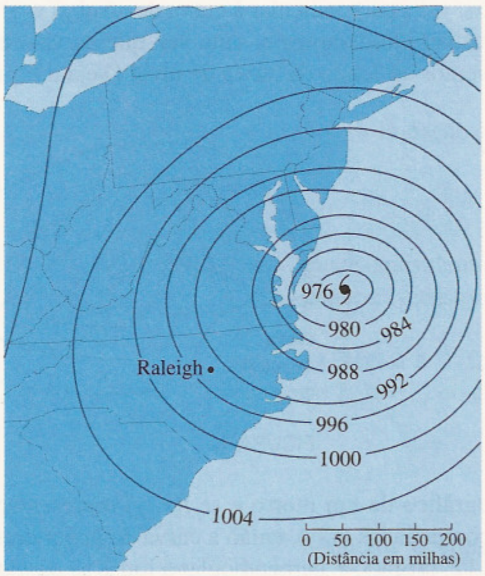


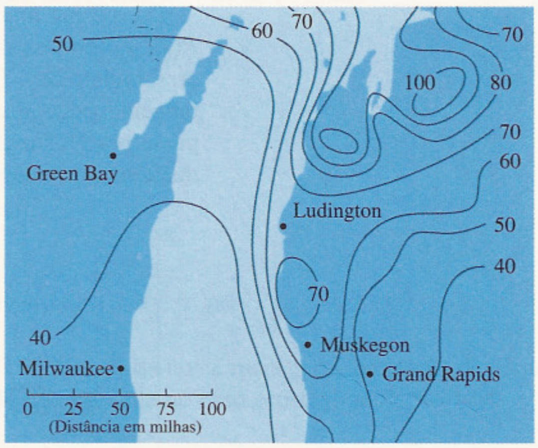
FIGURA 13

14.6 Exercícios

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica (em milímetros) às 7:00 horas da manhã do dia 12 de setembro de 1960, quando o Furacão Donna estava ativo. Estime o valor da função pressão em Raleigh, na Carolina do Norte, em direção ao olho do furacão. Quais são as unidades da derivada direcional?



2. O mapa de contorno mostra a precipitação média de neve (em polegadas) perto do Lago Michigan. Estime o valor da derivada direcional da função da precipitação de neve em Muskegon na direção de Ludington. Quais são as unidades?



3–6 □ Determine a derivada direcional de f no ponto dado e a direção indicada pelo ângulo θ.

3. $f(x, y) = x^2y^3 + 2x^4y$, $(1, -2)$, $\theta = \pi/3$
4. $f(x, y) = \text{sen}(x + 2y)$, $(4, -2)$, $\theta = 3\pi/4$
5. $f(x, y) = \sqrt{5x - 4y}$, $(4, 1)$, $\theta = -\pi/6$
6. $f(x, y) = xe^{-2y}$, $(5, 0)$, $\theta = \pi/2$

7–10 □
(a) Determine o gradiente de f.
(b) Calcule o gradiente no ponto P.
(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \rangle$

8. $f(x, y) = y \ln x$, $P(1, -3)$, $\mathbf{u} = \langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$

9. $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $P(1, -2, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz^3$, $P(2, 0, 3)$, $\mathbf{u} = \langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$

11–18 □ Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

12. $f(x, y) = x/y$, $(6, -2)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle$

13. $g(s, t) = s^2e^t$, $(2, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

14. $g(r, \theta) = e^{-r} \operatorname{sen} \theta$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 6, -3 \rangle$

16. $f(x, y, z) = x/(y + z)$, $(4, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$

17. $g(x, y, z) = x \operatorname{tg}^{-1}(y/z)$, $(1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

18. $g(x, y, z) = z^3 - x^2y$, $(1, 6, 2)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

19. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ em $P(2, 8)$ na direção de $Q(5, 4)$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em $P(2, 1, 3)$ na direção da origem.

21–26 □ Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$, $(1, 0)$

22. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$, $(1, 1, 1)$

25. $f(x, y, z) = x + y/z$, $(4, 3, -1)$

26. $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$, $(4, 2, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais depressa em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Utilize a parte (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$.

28. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen} xy$ no ponto $(1, 0)$ tem valor 1.

$D_u f(1,0) = 1$
$\|u\| = 1$

29. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como sendo a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é $120°$.
(a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.
(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada pelo vetor que aponta para a origem.

30. A temperatura num ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

onde T é medido em °C e x, y, z em metros.
(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.
(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?
(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

31. Suponha que numa certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?
(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

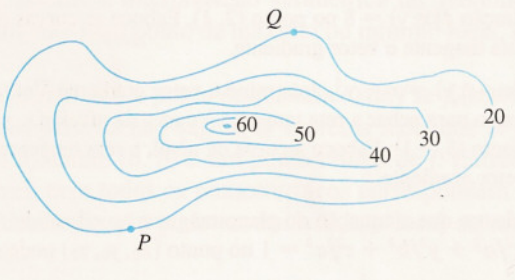
32. Suponha que você esteja subindo um morro cujo formato é dado pela equação

$$z = 1000 - 0{,}01x^2 - 0{,}02y^2$$

e você esteja num ponto de coordenadas $(60, 100, 764)$.
(a) Em que direção você deve seguir inicialmente de modo a chegar no topo do moro? ∇f
(b) Se você subir nessa direção, qual será o ângulo acima da horizontal no qual você iniciará a subida?

33. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

34. Para o mapa de contorno dado, desenhe as curvas de maior crescimento em P e em Q.

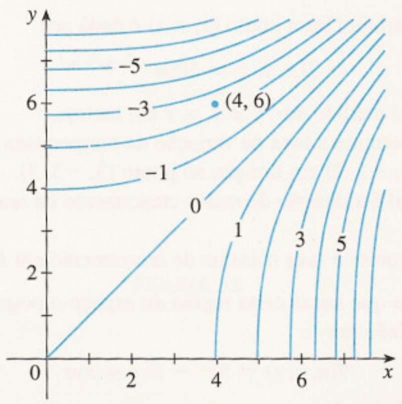


35. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a seguinte propriedade. Suponha que u e v sejam funções de x e y, diferenciáveis, e a e b sejam constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

36. Esboce o desenho do vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e o comprimento desse vetor.



37–42 □ Determine equações de (a) plano tangente e (b) reta normal a uma superfície dada no ponto especificado.

37. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, $(4, -1, 1)$

38. $x = y^2 + z^2 - 2$, $(-1, 1, 0)$

39. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4$, $(1, 0, 1)$

40. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz = 4$, $(3, -2, -1)$

41. $z + 1 = xe^y \cos z$, $(1, 0, 0)$

42. $xe^{yz} = 1$, $(1, 0, 5)$

43–44 □ Utilize o computador para traçar o gráfico da superfície, plano tangente e reta normal na mesma tela. Escolha o tamanho da janela de inspeção com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

43. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$ **44.** $xyz = 6$, $(1, 2, 3)$

45. Se $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, determine o vetor gradiente $\nabla f(2, 1)$ e use-o para determinar a reta tangente à curva de nível da função $f(x, y) = 8$ no ponto $(2, 1)$. Esboce as curvas de nível, reta tangente e vetor gradiente.

46. Se $g(x, y) = x - y^2$, determine o vetor gradiente $\nabla g(3, -1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 2$ no ponto $(3, -1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

47. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

48. Determine a equação do plano tangente ao hiperbolóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ em (x_0, y_0, z_0) e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 47.

49. Mostre que a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

50. Determine os pontos sobre o elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.

51. Determine os pontos no hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

52. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$. (Isso significa que eles têm uma tangente comum nesse ponto.)

53. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

54. Mostre que a reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

55. Mostre que a soma das intersecções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ é uma constante.

56. Mostre que o produto das intersecções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $xyz = c^3$ é uma constante.

57. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o elipsóide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

58. (a) O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 1)$.

(b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.

59. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equação $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais num ponto P onde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ e $\nabla G \neq \mathbf{0}$ se e somente se

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0$$

em P.

(b) Use a parte (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?