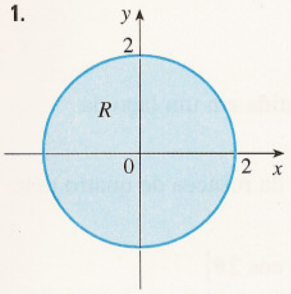
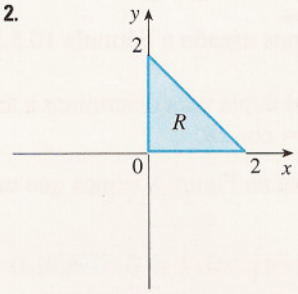
15.4 Exercícios

1–6 □ Uma região R é mostrada na figura. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares e escreva $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

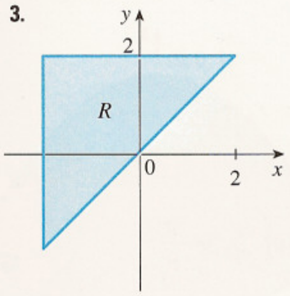
1.



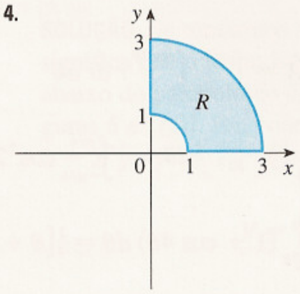
2.



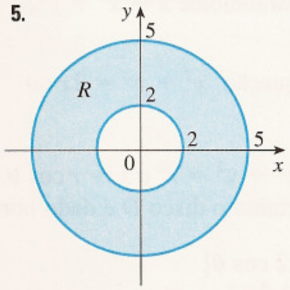
3.



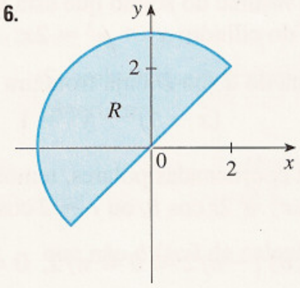
4.



5.



6.



7–14 □ Calcule a integral dada colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_R x\, dA$, onde R é o disco com centro na origem e raio 5

8. $\iint_R y\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$ e pelas retas $y = x$ e $y = 0$

9. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$

10. $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant 0\}$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

12. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante contida pelo círculo $x^2 + y^2 = 16$

13. $\iint_D (x^2 + y^2)\, dA$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$ para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

14. $\iint_D x\, dA$, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15–18 □ Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

16. A região contida pela cardióide $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

17. A região contida pela lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$

18. A região dentro do círculo $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ e fora do círculo $r = 2$

19–25 □ Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leqslant 9$

20. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

21. Uma esfera de raio a

22. Limitada pelo parabolóide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ e pelo plano $z = 4$

23. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

24. Limitada pelos parabolóides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

25. Dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

26. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo no centro de uma esfera de raio r_2. Determine o volume do sólido em formato de anel restante.
(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Note que o volume depende somente de h, e não de r_1 ou r_2.

27–30 □ Calcule a integral iterada convertendo-a antes para coordenadas polares.

27. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$

28. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dx\, dy$

29. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2y^2\,dx\,dy$

30. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

31. Uma piscina circular tem 40 pés de diâmetro. Sua profundidade é constante na direção leste-oeste e aumenta linearmente de 2 pés no término sul para 7 pés no término norte. Determine o volume de água da piscina.

32. Um aspersor distribui água num círculo de raio de 100 pés. Ele fornece água até uma profundidade e^{-r} pés por hora numa distância de r pés do aspersor.
(a) Qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro de um círculo de raio R centrado no aspersor?
(b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora e por pés quadrados fornecida para uma região circular de raio R.

33. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

34. (a) Definimos uma integral imprópria (sobre todo plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esse resultado para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

(c) Deduza

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}\,x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental para probabilidade e estatística.)

35. Utilize o resultado do Exercício 34, parte (c), para calcular as seguintes integrais:

(a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$

15.5 Aplicações das Integrais Duplas

Já vimos uma aplicação da integral dupla: cálculo de volumes. Outra aplicação geométrica importante é a determinação de áreas de superfícies, e isso será feito na próxima seção. Nesta seção vamos explorar aplicações físicas tais como no cálculo de massa, carga elétrica, centro de massa e momento de inércia. Veremos ainda como essas idéias físicas são importantes quando aplicadas a funções de densidade de probabilidade de duas variáveis aleatórias.

Densidade e Massa

Na Seção 9.3 fomos capazes de calcular momentos e centro de massa de placas finas ou lâminas de densidade constante usando integrais simples. Agora, com auxílio das integrais duplas, temos condições de considerar lâminas com densidade variável. Suponha uma lâmina colocada numa região D do plano xy e cuja **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua sobre D. Isso significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

onde Δm e ΔA são a massa e a área do pequeno retângulo que contém (x, y) e tomamos o limite quando as dimensões do retângulo se aproximam de 0 (veja a Figura 1).

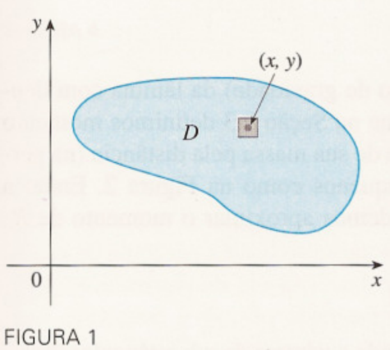


FIGURA 1