□ No Exercício 55 pediremos para você provar analiticamente o que descobriu a partir dos gráficos na Figura 18.

SOLUÇÃO A Figura 18 mostra gráficos desenhados por computador para vários valores de c. Para $c > 1$ existe um laço que diminui de tamanho quando c diminui. Quando $c = 1$ o laço desaparece, e a curva torna-se a cardióide que esboçamos no Exemplo 7. Para c entre 1 e $\frac{1}{2}$ a cúspide da cardióide é suavizada e torna-se uma "covinha". Quando c diminui de $\frac{1}{2}$ para 0, a limaçon parece oval. Essa oval torna-se mais circular quando $c \to 0$, e quando $c = 0$ a curva é apenas o círculo $r = 1$.

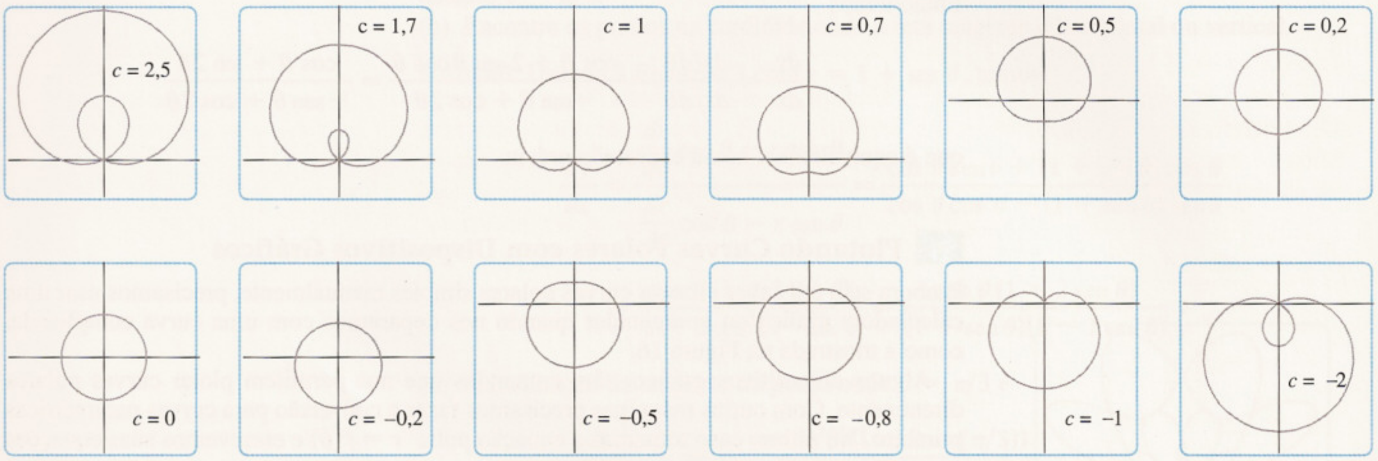


FIGURA 18

Membros da família de limaçons $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

As partes restantes da Figura 18 mostram que quando c se torna negativo, os formatos mudam na ordem inversa. De fato, essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das curvas correspondentes com c positivo. □

10.4 Exercícios

1–2 □ Plote o ponto cujas coordenadas polares são dadas. Então encontre dois outros pares de coordenadas polares desse ponto, um com $r > 0$ e o outro com $r < 0$.

1. (a) $(1, \pi/2)$ (b) $(-2, \pi/4)$ (c) $(3, 2)$

2. (a) $(3, 0)$ (b) $(2, -\pi/7)$ (c) $(-1, -\pi/2)$

3–4 □ Plote o ponto cujas coordenadas polares são dadas. Então encontre as coordenadas cartesianas do ponto.

3. (a) $(3, \pi/2)$ (b) $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/3)$

4. (a) $(2, 2\pi/3)$ (b) $(4, 3\pi)$ (c) $(-2, -5\pi/6)$

5–6 □ As coordenadas cartesianas de um ponto são dadas.

(i) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r > 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

(ii) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r < 0$ e $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. (a) $(1, 1)$ (b) $(2\sqrt{3}, -2)$

6. (a) $(-1, -\sqrt{3})$ (b) $(-2, 3)$

7–12 □ Esboce a região no plano que consiste em pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas.

7. $r > 1$

8. $0 \leqslant \theta < \pi/4$

9. $0 \leqslant r \leqslant 2, \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$

10. $1 \leqslant r < 3, \quad -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $-1 \leqslant r \leqslant 1, \quad \pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4$

13. Encontre a distância entre os pontos com coordenadas polares $(1, \pi/6)$ e $(3, 3\pi/4)$.

14. Encontre uma fórmula para a distância entre os pontos com coordenadas polares (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2).

15–20 □ Encontre a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar dada.

15. $r = 2$

16. $r\cos\theta = 1$

17. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

18. $r = 1/(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)$

19. $r^2 = \text{sen}\,2\theta$

20. $r^2 = \theta$

21–26 □ Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

21. $y = 5$ **22.** $y = 2x - 1$

23. $x^2 + y^2 = 25$ **24.** $x^2 = 4y$

25. $2xy = 1$ **26.** $x^2 - y^2 = 1$

27–28 □ Para cada uma das curvas descritas, decida se a curva seria mais facilmente dada por uma equação polar ou por uma equação cartesiana. Então escreva uma equação para a curva.

27. (a) Uma reta que passa pela origem e forma um ângulo de $\pi/6$ com o eixo x positivo.
(b) Uma reta vertical pelo ponto (3, 3).

28. (a) Um círculo com raio 5 e centro (2, 3).
(b) Um círculo com centro na origem e raio 4.

29–32 □ Esboce a curva da equação polar primeiro convertendo-a para uma equação cartesiana.

29. $r = -2 \operatorname{sen} \theta$ **30.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta$

31. $r = \operatorname{cossec} \theta$ **32.** $r = \operatorname{tg} \theta \sec \theta$

33–50 □ Esboce a curva com a equação dada.

33. $r = 5$ **34.** $\theta = 3\pi/4$

35. $r = \operatorname{sen} \theta$ **36.** $r = -3 \cos \theta$

37. $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$ **38.** $r = 1 - 3 \cos \theta$

39. $r = \theta, \quad \theta \geqslant 0$ **40.** $r = \theta/2, \quad -4\pi \leqslant \theta \leqslant 4\pi$

41. $r = 1/\theta$ **42.** $r = \sqrt{\theta}$

43. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **44.** $r = 2 \cos 3\theta$

45. $r = 2 \cos 4\theta$ **46.** $r = \operatorname{sen} 5\theta$

47. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ **48.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

49. $r = 2 \cos(3\theta/2)$ **50.** $r^2\theta = 1$

51. Mostre que a curva polar $r = 4 + 2 \sec \theta$ (chamada de **conchóide**) tem a reta $x = 2$ como uma assíntota vertical mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchóide.

52. Mostre que a curva $r = 2 - \operatorname{cossec} \theta$ (também uma conchóide) tem a reta $y = -1$ como uma assíntota horizontal mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} y = -1$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchóide.

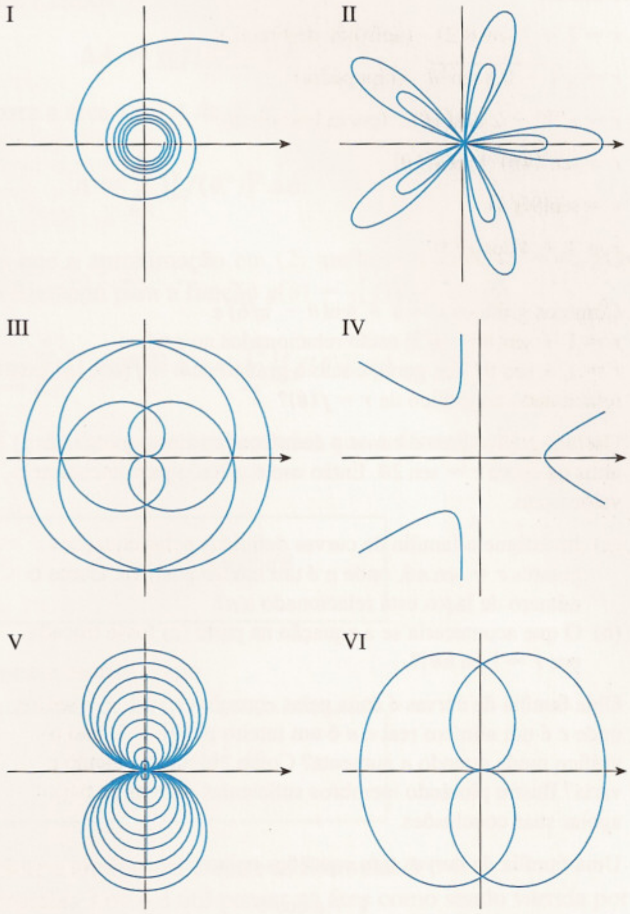
53. Mostre que a curva $r = \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$ (chamada de **cissóide de Diocles**) tem a reta $x = 1$ como uma assíntota vertical. Mostre também que a curva está inteiramente dentro da faixa vertical $0 \leqslant x < 1$. Use esses fatos para ajudar a esboçar a cissóide.

54. Esboce a curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

55. (a) No Exemplo 11 os gráficos sugerem que a limaçon $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ tem um laço interno quando $|c| > 1$. Prove que isso é verdadeiro e encontre valores de θ que correspondam ao laço interno.
(b) A partir da Figura 18 parece que a limaçon perde sua covinha quando $c = \frac{1}{2}$. Prove.

56. Conecte as curvas polares com seus respectivos gráficos (I–VI). Dê razões para suas escolhas. (Não use um dispositivo gráfico.)

(a) $r = \operatorname{sen}(\theta/2)$ (b) $r = \operatorname{sen}(\theta/4)$
(c) $r = \sec(3\theta)$ (d) $r = \theta \operatorname{sen} \theta$
(e) $r = 1 + 4 \cos 5\theta$ (f) $r = 1/\sqrt{\theta}$



57–62 □ Calcule a inclinação da reta tangente para a curva polar dada no ponto especificado pelo valor de θ.

57. $r = 3 \cos \theta, \quad \theta = \pi/3$

58. $r = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/4$

59. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$ **60.** $r = \ln \theta, \quad \theta = e$

61. $r = 1 + \cos \theta, \quad \theta = \pi/6$ **62.** $r = \operatorname{sen} 3\theta, \quad \theta = \pi/6$

63–68 □ Encontre os pontos na curva dada onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

63. $r = 3 \cos \theta$ **64.** $r = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$

65. $r = 1 + \cos \theta$ **66.** $r = e^{\theta}$

67. $r = \cos 2\theta$ **68.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$