Lista 9 - Profª Ana Paula

(Técnicas de Integração)

do lado direito para o lado esquerdo. Então temos

$$n \int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

ou

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

□

A fórmula de redução (7) é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ em termos de $\int \operatorname{sen} x\, dx$ (se n é ímpar) ou $\int (\operatorname{sen} x)^0\, dx = \int dx$ (se n é par).

7.1 Exercícios

1–2 □ Avalie a integral usando integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x \ln x\, dx$; $u = \ln x$, $dv = x\, dx$

2. $\int \theta \sec^2\theta\, d\theta$; $u = \theta$, $dv = \sec^2\theta\, d\theta$

3–28 □ Avalie a integral.

3. $\int xe^{2x}\, dx$

4. $\int x \cos x\, dx$

5. $\int x \operatorname{sen} 4x\, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

7. $\int x^2 \cos 3x\, dx$

8. $\int x^2 \operatorname{sen} ax\, dx$

9. $\int (\ln x)^2\, dx$

10. $\int t^3 e^t\, dt$

11. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$

12. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta\, d\theta$

13. $\int y \operatorname{senh} y\, dy$

14. $\int y \cosh ay\, dy$

15. $\int_0^1 te^{-t}\, dt$

16. $\int_0^1 (x^2 + 1)\, e^{-x}\, dx$

17. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

18. $\int_1^4 \sqrt{t} \ln t\, dt$

19. $\int_1^4 \ln \sqrt{x}\, dx$

20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{cossec}^2 x\, dx$

21. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x\, dx$

22. $\int_0^1 x5^x\, dx$

23. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

24. $\int x \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$

25. $\int \cos(\ln x)\, dx$

26. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}}\, dr$

27. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2\, dx$

28. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s)\, ds$

29–32 □ Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para avaliar a integral.

29. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$

30. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$

31. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

32. $\int x^5 e^{x^2}\, dx$

33–36 □ Avalie a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável usando o gráfico da função e de sua antiderivada ($C = 0$).

33. $\int x \cos \pi x\, dx$

34. $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

35. $\int (2x + 3) e^x\, dx$

36. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

37. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para avaliar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

38. (a) Prove a fórmula de redução

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Use a parte (a) para avaliar $\int \cos^2 x\, dx$.

(c) Use as partes (a) e (b) para avaliar $\int \cos^4 x\, dx$.

39. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

onde $n \geq 2$ é um inteiro.

(b) Use a parte (a) para avaliar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

(c) Use a parte (a) para mostrar que, para potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

40. Prove que, para potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

41–44 □ Use a integração por partes para provar a fórmula de redução.

41. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

42. $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx$

43. $\int (x^2 + a^2)^n\, dx$

$$= \frac{x(x^2+a^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} \int (x^2+a^2)^{n-1}\, dx \quad \left(n \neq -\tfrac{1}{2}\right)$$

44. $\int \sec^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

45. Use o Exercício 41 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

46. Use o Exercício 42 para encontrar $\int x^4 e^x\, dx$.

47–48 □ Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas.

47. $y = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad y = 0, \quad x = 0{,}5$

48. $y = 5 \ln x, \quad y = x \ln x$

49–50 □ Use um gráfico para achar as coordenadas aproximadas de x dos pontos de intersecção das curvas dadas. Então ache (aproximadamente) a área da região limitada pelas curvas.

49. $y = x^2, \quad y = xe^{-x/2}$

50. $y = x^2 - 5, \quad y = \ln x$

51–54 □ Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

51. $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 2\pi,\ x = 3\pi;$ ao redor do eixo y

52. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1;$ ao redor do eixo y

53. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0;$ ao redor de $x = 1$

54. $y = e^x,\ x = 0,\ y = \pi;$ ao redor do eixo x

55. Encontre o valor médio de $f(x) = x \cos 2x$ no intervalo $[0, \pi/2]$.

56. Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo o combustível) seja m, que o combustível seja consumido a uma taxa r, e que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante v_e (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete a um tempo t é dado pela seguinte equação:

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

onde g é a aceleração da gravidade, e t não é muito grande. Se $g = 9{,}8$ m/s², $m = 30.000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3000$ m/s, ache a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

57. Uma partícula que se move ao longo de uma linha reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?

58. Se $f(0) = g(0) = 0$, mostre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\, dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\, dx$$

59. Use a integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\, dx = xf(x) - \int xf'(x)\, dx$$

60. Se f e g são funções inversas e f' é contínua, prove que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

[*Dica*: Use o Exercício 59 e faça a substituição $y = f(x)$.]

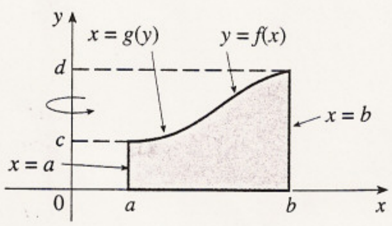
61. Use o Exercício 60 para avaliar $\int_1^e \ln x\, dx$.

62. No caso onde f e g são funções positivas e $b > a > 0$, desenhe um diagrama para dar uma interpretação geométrica ao Exercício 60.

63. Chegamos à Fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$, usando cascas cilíndricas, mas agora podemos usar integração por partes para prová-la usando o método do fatiamento da Seção 6.2, ao menos para o caso onde f é um a um e portanto tem uma função inversa g. Use a figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi [g(y)]^2\, dy$$

Faça a substituição $y = f(x)$ e então use integração por partes na integral resultante para provar que $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$.



EXEMPLO 9 □ Avalie $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral pode ser avaliada usando-se integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a), como a seguir:

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx = \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\right) + C$$

□

7.2 Exercícios

1–46 □ Avalie a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\, dx$

3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$

5. $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^4 x\, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^3 mx\, dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 3x\, dx$

8. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

9. $\int \cos^4 t\, dt$

10. $\int \operatorname{sen}^6 \pi x\, dx$

11. $\int (1 - \operatorname{sen} 2x)^2 dx$

12. $\int \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \cos\theta\, d\theta$

13. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$

14. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

15. $\int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x}\, dx$

16. $\int x \operatorname{sen}^3(x^2)\, dx$

17. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x\, dx$

18. $\int \operatorname{cotg}^5\theta \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$

19. $\int \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$

20. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$

21. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

22. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$

23. $\int \sec^4 x\, dx$

24. $\int_0^{\pi/4} \sec^6 x\, dx$

25. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 t \sec^2 t\, dt$

26. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x\, dx$

27. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x\, dx$

28. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x\, dx$

29. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec x\, dx$

30. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^6 x\, dx$

31. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$

32. $\int \operatorname{tg}^6 ay\, dy$

33. $\int \dfrac{\sec^2 x}{\operatorname{cotg} x}\, dx$

34. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$

35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2 x\, dx$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x\, dx$

37. $\int \operatorname{cotg}^2 w \operatorname{cossec}^4 w\, dw$

38. $\int \operatorname{cotg}^3 x \operatorname{cossec}^4 x\, dx$

39. $\int \operatorname{cossec} x\, dx$

40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^3 x\, dx$

41. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x\, dx$

42. $\int \operatorname{sen} 3x \cos x\, dx$

43. $\int \cos 7\theta \cos 5\theta\, d\theta$

44. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

45. $\int \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x}\, dx$

46. $\int e^x \cos^7(e^x)\, dx$

47–50 □ Avalie a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável colocando em um gráfico o integrando e sua antiderivada (tome $C = 0$).

47. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$

48. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$

49. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$

50. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2}\, dx$

51. Encontre o valor médio da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

52. Avalie $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por quatro métodos: (a) a substituição $u = \cos x$, (b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$, (c) a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ e (d) integração por partes. Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

53–54 □ Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas.

53. $y = \text{sen}\, x,\quad y = \text{sen}^3 x,\quad x = 0,\quad x = \pi/2$

54. $y = \text{sen}\, x,\quad y = 2\,\text{sen}^2 x,\quad x = 0,\quad x = \pi/2$

55–56 □ Use um gráfico do integrando para estimar o valor da integral. Então use os métodos desta seção para provar que sua estimativa estava correta.

55. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

56. $\int_0^2 \text{sen}\, 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

57–60 □ Encontre o volume obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

57. $y = \text{sen}\, x,\ x = \pi/2,\ x = \pi,\ y = 0$; ao redor de eixo x

58. $y = \text{tg}^2 x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/4$; ao redor de eixo x

59. $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/2$; ao redor de $y = -1$

60. $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/2$; ao redor de $y = 1$

61. Uma partícula se move em uma linha reta com a função velocidade $v(t) = \text{sen}\ \omega t \cos^2 \omega t$. Encontre sua função de posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

62. A eletricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de 155 V a -155 V com uma freqüência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem então é dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155\,\text{sen}(120\pi t)$$

onde t é o tempo em segundos. Voltímetros lêem a voltagem RMS (raiz da média quadrática), que é a raiz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ em um ciclo.

(a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.

(b) Muitos fornos elétricos requerem a voltagem RMS de 220 V. Encontre a amplitude A correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A\,\text{sen}(120\pi t)$.

63–65 □ Prove a fórmula, onde m e n são inteiros positivos.

63. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, mx \cos nx\, dx = 0$

64. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, mx\, \text{sen}\, nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

65. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

66. A *série finita de Fourier* é dada pela soma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \,\text{sen}\, nx$$
$$= a_1 \,\text{sen}\, x + a_2 \,\text{sen}\, 2x + \cdots + a_N \,\text{sen}\, Nx$$

Mostre que o m-ésimo coeficiente a_m é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, mx\, dx$$

7.3 Substituição Trigonométrica

Para achar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se a integral fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a$ sen θ, então a identidade $1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Note a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual uma nova variável é uma função da velha) e a substituição $x = a$ sen θ (a variável velha é uma função da nova).

Em geral podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$ usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificar nossos cálculos, assumimos que g tem uma função inversa, isto é, g é um a um. Nesse caso, se trocarmos u por x e x por t na Regra da Substituição (Equação 5.5.4) obteremos

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esse tipo de substituição é chamada de *substituição inversa.*

Portanto

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx = -\tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du = \tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du$$

$$= \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - (1+1)\right] = \tfrac{3}{32} \quad \square$$

EXEMPLO 7 □ Avalie $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando o quadrado:

$$3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1)$$
$$= 4 - (x+1)^2$$

Isso sugere a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, assim

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

Agora substituímos $u = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, obtendo $du = 2\cos\theta\,d\theta$ e $\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$, assim

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta - 1}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int (2\,\mathrm{sen}\,\theta - 1)\,d\theta$$

$$= -2\cos\theta - \theta + C$$

$$= -\sqrt{4-u^2} - \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= -\sqrt{3-2x-x^2} - \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \quad \square$$

□ A Figura 5 mostra os gráficos do integrando no Exemplo 7 e de sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

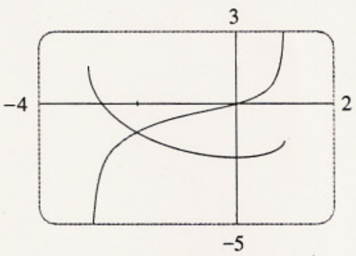


FIGURA 5

7.3 Exercícios

1–3 □ Avalie a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e rotule o triângulo retângulo associado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$; $x = 3\sec\theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$; $x = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$; $x = 3\,\mathrm{tg}\,\theta$

4–30 □ Avalie a integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^{5/2}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx$

11. $\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

12. $\int x\sqrt{25 + x^2}\, dx$

13. $\int \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{x}\, dx$

14. $\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\, dx$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2 - 9}}$

17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\, dx$

18. $\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

20. $\int_0^3 x\sqrt{9 - x^2}\, dx$

21. $\int_0^{2/3} x^3\sqrt{4 - 9x^2}\, dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

23. $\int \sqrt{2x - x^2}\, dx$

24. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 6x - 8}}\, dx$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$

28. $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{5/2}}$

29. $\int e^t\sqrt{9 - e^{2t}}\, dt$

30. $\int \sqrt{e^{2t} - 9}\, dt$

31. (a) Use a substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

(b) Use a substituição hiperbólica $x = a$ senh t para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Essas fórmulas estão interligadas pela Fórmula 3.9.3.

p. 249

32. Avalie

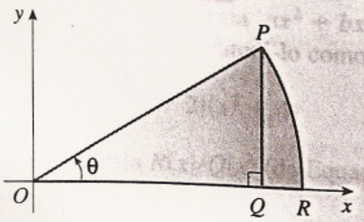
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx$$

(a) pela substituição trigonométrica e (b) pela substituição hiperbólica $x = a$ senh t.

33. Encontre o valor médio de $f(x) = (4 - x^2)^{3/2}$ no intervalo $[0, 2]$.

34. Encontre a área da região limitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

35. Prove a fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para a área de um setor circular com raio r e ângulo central θ. [*Dica:* Assuma $0 < \theta < \pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem; assim ele terá a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Então A é a soma da área do triângulo POQ e a área da região PQR na figura.]



36. Avalie a integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

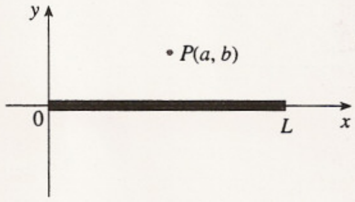
Coloque em um gráfico o integrando e a integral indefinida e verifique se sua resposta é razoável.

37. Use o gráfico para aproximar as raízes da equação $x^2\sqrt{4 - x^2} = 2 - x$. Então aproxime a área limitada pela curva $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$ e a reta $y = 2 - x$.

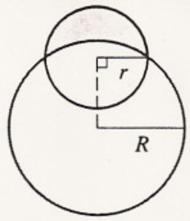
38. Uma barra carregada de comprimento L produz um campo elétrico no ponto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

onde λ é a densidade de carga por unidade de comprimento da barra e ε_0 é a permissividade do vácuo (veja a figura). Avalie a integral para determinar uma expressão para o campo elétrico $E(P)$.



39. Encontre a área da região em forma de lua crescente limitada pelos arcos dos círculos de raios r e R (veja a figura).



40. Um tanque reservatório de água tem o formato de um cilindro com diâmetro de 10 pés. Ele está montado de tal forma que as seções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 pés, qual porcentagem da capacidade total está sendo usada?

41. Um toro é gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ao redor do eixo x. Ache o volume limitado pelo toro.

7.4 Exercícios

1–12 □ Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. $\dfrac{3}{(2x+3)(x-1)}$

2. $\dfrac{5}{2x^2-3x-2}$

3. $\dfrac{x^2+9x-12}{(3x-1)(x+6)^2}$

4. $\dfrac{z^2-4z}{(3z+5)^3(z+2)}$

5. $\dfrac{1}{x^4-x^3}$

6. $\dfrac{x^4+x^3-x^2-x+1}{x^3-x}$

7. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

8. $\dfrac{x^3-4x^2+2}{(x^2+1)(x^2+2)}$

9. $\dfrac{t^4+t^2+1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$

10. $\dfrac{3-11x}{(x-2)^3(x^2+1)(2x^2+5x+7)^2}$

11. $\dfrac{x^4}{(x^2+9)^3}$

12. $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

13–42 □ Avalie a integral.

13. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{y}{y+2}\,dy$

15. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+x^2-12x+1}{x^2+x-12}\,dx$

21. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

22. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+3}{x^3+2x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{2t^3-t^2+3t-1}{(t^2+1)(t^2+2)}\,dt$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

37. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

40. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

43–52 □ Faça a substituição para expressar o integrando como uma função racional e então avalie a integral.

43. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}\,dx$

45. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

48. $\displaystyle\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Dica:* Substitua $u=\sqrt[6]{x}$]

50. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$ [*Dica:* Substitua $u=\sqrt[12]{x}$]

51. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$

53. Use um gráfico de $f(x)=1/(x^2-2x-3)$ para decidir se $\int_0^2 f(x)\,dx$ é positiva ou negativa. Use o gráfico para dar uma estimativa aproximada do valor da integral e então use frações parciais para encontrar o valor exato.

54. Plote a função $y=1/(x^3-2x^2)$ e sua antiderivada na mesma tela.

55–56 □ Avalie a integral completando o quadrado e usando a Fórmula 6.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

56. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

57. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) notou que a substituição $t=\operatorname{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de sen x cos x em uma função racional ordinária de t.

(a) Se $t=\operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi<x<\pi$, esboce um triângulo retângulo ou use identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

então sabemos pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Então, $f(x) = e^{x^2}$ tem uma antiderivada F, mas foi provado que F não é uma função elementar. Isso significa que não importa o quanto tentamos, nunca teremos sucesso em avaliar $\int e^{x^2}dx$ em termos das funções que conhecemos. (No Capítulo 11 do Volume II, contudo, veremos como expressar $\int e^{x^2}dx$ como uma série infinita.) O mesmo pode ser dito das integrais a seguir:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De fato, a maioria das funções elementares não tem antiderivadas elementares. Você pode ter certeza, entretanto, que todas as integrais nos exercícios a seguir são funções elementares.

7.5 Exercícios

1–76 □ Avalie a integral.

1. $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

2. $\int \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{\operatorname{arctg} y}}{1+y^2}\,dy$

4. $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$

5. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$

6. $\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$

9. $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

11. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$

12. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$

13. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$

14. $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$

15. $\int e^{x+e^x}\,dx$

16. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

17. $\int \ln(1+x^2)\,dx$ por partes frações parciais

18. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$ u e frac. parciais

19. $\int t^3 e^{-2t}\,dt$

20. $\int x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

21. $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8\,dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{z}(z+\sqrt[3]{z})\,dz$

23. $\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$

24. $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$

25. $\int \operatorname{cotg} x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

26. $\int \operatorname{sen}\sqrt{at}\,dt$

27. $\int_{-3}^{3} |x^3+x^2-2x|\,dx$

28. $\int \sqrt{1+x-x^2}\,dx$

29. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

30. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$

31. $\int_0^5 \frac{3w-1}{w+2}\,dw$

32. $\int \frac{1}{x^3-8}\,dx$

33. $\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$

34. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{9-\cos^4 x}}\,dx$

35. $\int_{-1}^{1} x^8 \operatorname{sen} x\,dx$

36. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$

37. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

38. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\,dx$

39. $\int \frac{x}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}\,dx$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$

41. $\int \theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

42. $\int \operatorname{tg}^2 4x\,dx$

43. $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

44. $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$

45. $\int \frac{x+a}{x^2+a^2}\,dx$

46. $\int \frac{x}{x^4-a^4}\,dx$

47. $\int \operatorname{sen}^2 \pi x \cos^4 \pi x\,dx$

48. $\int x^2 \operatorname{tg}^{-1} x\,dx$

49. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$