LISTA 8 - PROFª ANA PAULA

(ÁREA / VOLUME)

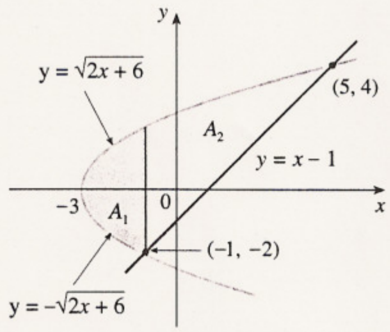


FIGURA 14

Nós devemos integrar entre os valores apropriados de y, $y = -2$ e $y = 4$. Assim

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\,dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Big]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

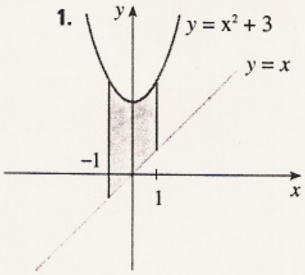
□

Nós poderíamos ter encontrado a área no Exemplo 6 integrando em relação a x em vez de y, mas o cálculo é muito maior. Isto significaria dividir a região em dois e calcular as áreas A_1 e A_2 na Figura 14. O método que nós usamos no Exemplo 6 é *muito* mais fácil.

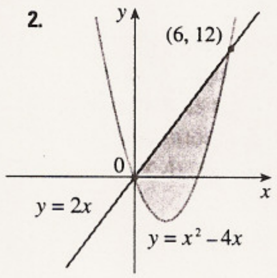
6.1 Exercícios

1–4 Encontre as áreas das regiões sombreadas.

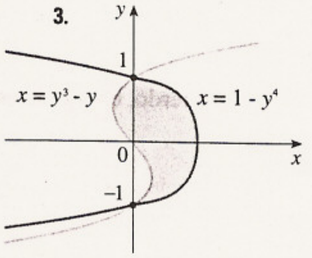
1.



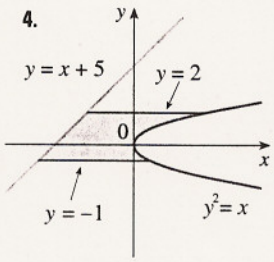
2.



3.



4.



5–26 Esboce a região limitada pelas curvas dadas. Decida quando integrar em relação a x ou a y. Desenhe um retângulo típico de aproximação e coloque sua altura e largura. Então calcule a área da região.

5. $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$, $x = 2$

6. $y = \text{sen}\, x$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = \pi/2$

7. $y = x$, $y = x^2$

8. $y = x^2$, $y = x^4$

9. $y = 1/x$, $y = 1/x^2$, $x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2$, $y^2 = x$

12. $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$

13. $y = 4x^2$, $y = x^2 + 3$

14. $y = x^3 - x$, $y = 3x$

15. $y = x + 1$, $y = (x-1)^2$, $x = -1$, $x = 2$

16. $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$

17. $y^2 = x$, $x - 2y = 3$

18. $y = 1/x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

19. $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$

20. $y = \cos x$, $y = \sec^2 x$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$

21. $y = \cos x$, $y = \text{sen}\, 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$

22. $y = \text{sen}\, x$, $y = \text{sen}\, 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$

23. $y = \cos x$, $y = 1 - 2x/\pi$

24. $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

25. $y = x^2$, $y = 2/(x^2 + 1)$

26. $y = \text{sen}\, \pi x$, $y = x^2 - x$, $x = 2$

27–28 Use o cálculo para encontrar a área do triângulo com os vértices dados.

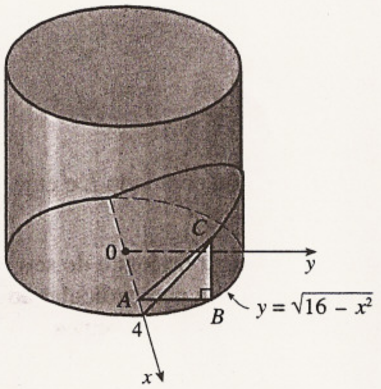
27. (0, 0), (2, 1), (−1, 6)

28. (0, 5), (2, −2), (5, 1)

poderia verificar que teríamos obtido a integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2 h}{3}$$

EXEMPLO 9 □ Uma cunha é cortada de um cilindro circular de raio 4 por dois planos. Um plano é perpendicular ao eixo do cilindro. O outro intercepta o primeiro com um ângulo de 30 graus ao longo do diâmetro do cilindro. Encontre o volume da cunha.



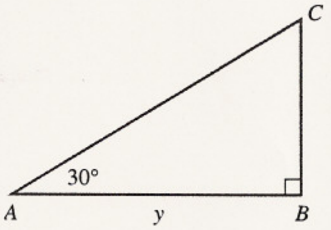


FIGURA 17

SOLUÇÃO Se nós colocarmos o eixo x ao longo do diâmetro onde os planos se encontram, então a base do sólido é um semicírculo com equação $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Uma seção transversal perpendicular ao eixo x a uma distância x da origem é um triângulo ABC, como mostrado na Figura 17, cuja base é $y = \sqrt{16 - x^2}$ e cuja altura é $|BC| = y \operatorname{tg} 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Portanto a área da seção transversal é

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2}$$

$$= \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

e o volume é

$$V = \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

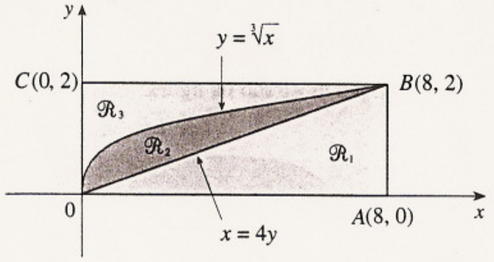
Para um outro método veja o Exercício 60. □

6.2 Exercícios

1–18 □ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados. Esboce a região, o sólido e um disco típico ou arruela.

1. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; ao redor do eixo x
2. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; ao redor do eixo x
3. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; ao redor do eixo x
4. $y = \sqrt{x - 1}$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$; ao redor do eixo x
5. $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $y = 4$, $x = 0$; ao redor do eixo y
6. $x = y - y^2$, $x = 0$; ao redor do eixo y
7. $y = x^2$, $y^2 = x$; ao redor do eixo x
8. $y = \sec x$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$; ao redor do eixo x
9. $y^2 = x$, $x = 2y$; ao redor do eixo y
10. $y = x^{2/3}$, $x = 1$, $y = 0$; ao redor do eixo y
11. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; ao redor de $y = 1$
12. $y = x^2$, $y = 4$; ao redor de $y = 4$
13. $y = x^4$, $y = 1$; ao redor de $y = 2$
14. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; ao redor de $y = -1$
15. $x = y^2$, $x = 1$; ao redor de $x = 1$
16. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; ao redor de $x = 2$
17. $y = x^2$, $x = y^2$; ao redor de $x = -1$
18. $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; ao redor de $x = 1$

19–30 □ Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região ao redor da reta dada.



19. $\mathcal{R}_1$ ao redor de OA
20. $\mathcal{R}_1$ ao redor de OC
21. $\mathcal{R}_1$ ao redor de AB
22. $\mathcal{R}_1$ ao redor de BC
23. $\mathcal{R}_2$ ao redor de OA
24. $\mathcal{R}_2$ ao redor de OC
25. $\mathcal{R}_2$ ao redor de BC
26. $\mathcal{R}_2$ ao redor de AB
27. $\mathcal{R}_3$ ao redor de OA
28. $\mathcal{R}_3$ ao redor de OC
29. $\mathcal{R}_3$ ao redor de BC
30. $\mathcal{R}_3$ ao redor de AB

31–36 □ Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas e ao redor das retas especificadas.

31. $y = \ln x$, $y = 1$, $x = 1$; ao redor do eixo x

32. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 5$; ao redor do eixo y

33. $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$; ao redor de $y = 1$

34. $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$; ao redor de $y = -2$

35. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 3$; ao redor de $x = -2$

36. $2x + 3y = 6$, $(y - 1)^2 = 4 - x$; ao redor de $x = -5$

37–38 □ Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. Então encontre (aproximadamente) o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região limitada por estas curvas.

37. $y = x^2$, $y = \ln(x + 1)$

38. $y = 3\operatorname{sen}(x^2)$, $y = e^{x/2} + e^{-2x}$

39–42 □ Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

40. $\pi \int_2^5 y \, dy$

41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8) \, dy$

42. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2] \, dx$

43. Uma tomografia computadorizada produz vistas de seções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais provêem informações sobre este órgão que de outra maneira só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre seções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento, e as áreas das seções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do fígado.

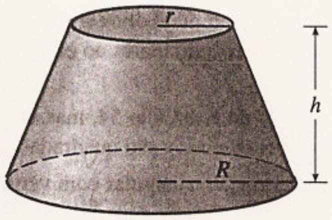
44. Um tronco de 10 m de comprimento é cortado a intervalos de 1 m e as suas áreas de seção transversal A (a uma distância x do fim do tronco) estão listadas na tabela. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

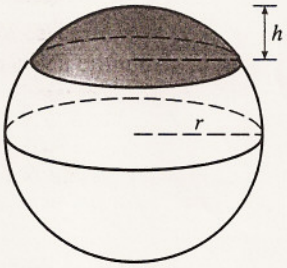
45–57 □ Encontre o volume do sólido S descrito.

45. Um cone circular reto com altura h e raio da base r.

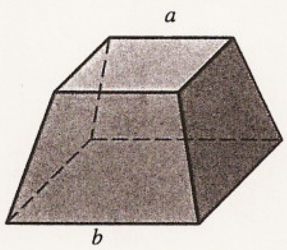
46. Um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.



47. Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.



48. Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.



49. Uma pirâmide de altura h e base retangular de lados b e $2b$.

Neste exemplo o método do disco foi mais simples. □

EXEMPLO 4 □ Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ ao redor da reta $x = 2$.

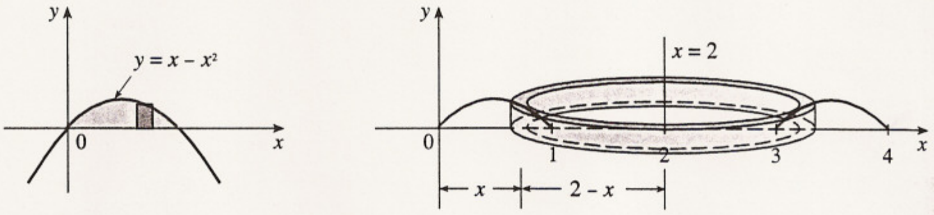


FIGURA 10

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a região e a casca cilíndrica formada pela rotação ao redor da reta $x = 2$. Esta tem raio $2 - x$, circunferência $2\pi(2 - x)$ e altura $x - x^2$.

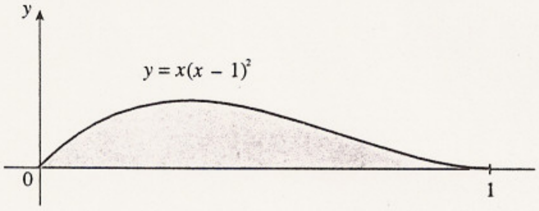
O volume do sólido é

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

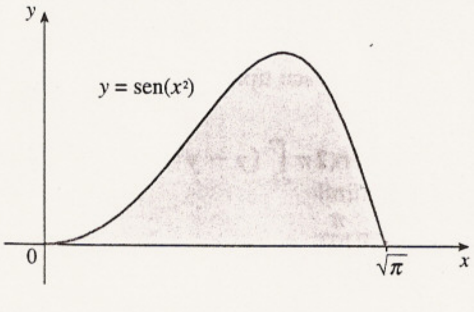
$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$ □

6.3 Exercícios

1. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura ao redor do eixo y. Explique por que é inconveniente fatiar para obter o volume V de S. Esboce uma casca típica de aproximação. Qual é a circunferência e a altura? Use cascas para encontrar o volume V.



2. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura ao redor do eixo y. Esboce uma casca cilíndrica típica, e encontre sua circunferência e altura. Use cascas para encontrar o volume de S. Você acha que esse método é preferível ao fatiamento? explique.



3–7 □ Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação ao redor do eixo y da região limitada pelas curvas dadas. Esboce a região e a casca típica.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$
4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$
5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$
6. $y = x^2 - 6x + 10, \quad y = -x^2 + 6x - 6,$
7. $y^2 = x, \quad x = 2y$

8. Seja V o volume de um sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Encontre V pelos métodos de fatiamento e cascas cilíndricas. Em ambos os casos desenhe um diagrama para explicar seu método.

9–14 □ Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor do eixo x. Esboce a região e a casca típica.

9. $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$
10. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

11. $y = x^2, \quad y = 9$

12. $y^2 - 6y + x = 0, \quad x = 0$

13. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x + y = 2$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 □ Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados. Esboce a região e uma casca típica.

15. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; ao redor de $x = 1$

16. $y = x^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$; ao redor do eixo y

17. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; ao redor de $x = 4$

18. $y = 4x - x^2$, $y = 8x - 2x^2$; ao redor de $x = -2$

19. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 5$; ao redor de $y = 3$

20. $y = x^2$, $x = y^2$; ao redor de $y = -1$

21–26 □ Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume de um sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

21. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$; ao redor do eixo y

22. $y = x$, $y = 4x - x^2$; ao redo de $x = 7$

23. $y = x^4$, $y = \mathrm{sen}(\pi x/2)$; ao redor de $x = -1$

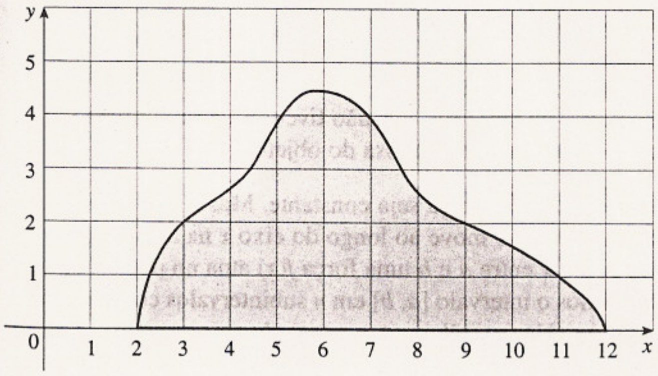
24. $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$; ao redor de $x = 2$

25. $x = \sqrt{\mathrm{sen}\, y}$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $x = 0$; ao redor de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7$, $x = 4$; ao redor de $y = 5$

27. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ para estimar o volume obtido pela rotação ao redor do eixo y da região sob a curva $y = \mathrm{tg}\, x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

28. Se a região na figura é girada ao redor do eixo y para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do sólido.



29–32 □ Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

29. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx$

30. $\int_0^9 2\pi y^{3/2} \, dy$

31. $\int_0^1 2\pi(x^3 - x^7) \, dx$

32. $\int_0^{\pi} 2\pi(4 - x)\mathrm{sen}^4 x \, dx$

33–34 □ Use um gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. Então use esta informação para estimar o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por estas curvas.

33. $y = 0, \quad y = x + x^2 - x^4$

34. $y = x^4$, $y = 3x - x^3$

35–40 □ A região limitada pelas curvas dadas é girada ao redor dos eixos especificados. Ache o volume do sólido resultante por qualquer método.

35. $y = x^2 + x - 2$, $y = 0$; ao redor do eixo x

36. $y = x^2 - 3x + 2$, $y = 0$; ao redor do eixo y

37. $y = 5$, $y = x + (4/x)$; ao redor de $x = -1$

38. $x = 1 - y^4$, $x = 0$; ao redor de $x = 2$

39. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; ao redor do eixo y

40. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; ao redor do eixo x

41–43 □ Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido.

41. Uma esfera de raio r.

42. O toro do Exercício 59 da Seção 6.2.

43. Um cone circular reto de altura h e base com raio r.

44. Suponha que você faça anéis para guardanapos perfurando buracos com diferentes diâmetros através de duas bolas de madeira (as quais também têm diferentes diâmetros). Você descobre que ambos os anéis de guardanapo têm a mesma altura h, como mostrado na figura.
(a) Qual anel tem mais madeira?
(b) Verifique o item (a). Use cascas cilíndricas para calcular o volume de um anel de guardanapo criado pela perfuração de um buraco com raio r através do centro de uma esfera de raio R e expresse a resposta em termos de h.