LISTA 7 - PROFª ANA PAULA

(INTEGRAL)

Notamos que a Parte 1 pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

o que estabelece que se f for integrada e o resultado for diferenciado, obteremos de volta a função original f. Como $F'(x) = f(x)$, a Parte 2 pode ser reescrita como

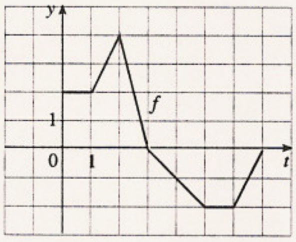
$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Essa versão estabelece que se tomarmos uma função F, a diferenciarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo estabelecem que a diferenciação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez.

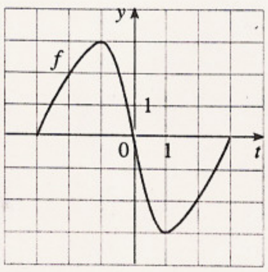
O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do cálculo e realmente é um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curva eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram para o Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiantes são acessíveis para todos nós.

5.3 Exercícios

1. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.
(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
(b) Em que intervalos g está crescendo?
(c) Onde g tem um valor máximo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.



2. Seja $g(x) = \int_{-3}^x f(t)\,dt$, onde f é uma função cujo gráfico está mostrado.
(a) Calcule $g(-3)$ e $g(3)$.



(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ e $g(0)$.
(c) Em que intervalo g está crescendo?
(d) Onde g tem um valor máximo?
(e) Faça um esboço do gráfico de g.
(f) Use o gráfico da parte (e) para esboçar o gráfico de $g'(x)$. Compare com o gráfico de f.

3–4 □ Esboce a área representada por $g(x)$. Então ache $g'(x)$ de duas maneiras: (a) usando a Parte 1 do Teorema Fundamental e (b) calculando a integral usando a Parte 2 e então diferenciando.

3. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

4. $g(x) = \int_\pi^x (2 + \cos t)\,dt$

5–16 □ Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada da função.

5. $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 2t}\,dt$

6. $g(x) = \int_1^x \ln t\,dt$

7. $g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$

8. $g(u) = \int_{-1}^u \frac{1}{x + x^2}\,dx$

9. $F(x) = \int_x^2 \cos(t^2)\,dt$

$$\left[\textit{Dica:} \int_x^2 \cos(t^2)\,dt = -\int_2^x \cos(t^2)\,dt\right]$$

10. $F(x) = \int_x^{10} \operatorname{tg} \theta\, d\theta$

11. $h(x) = \int_2^{1/x} \operatorname{arctg} t\, dt$

12. $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\, dr$

13. $y = \int_3^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{t}\, dt$

14. $y = \int_1^{\cos x} (t + \operatorname{sen} t)\, dt$

15. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\, du$

16. $y = \int_{e^x}^{0} \operatorname{sen}^3 t\, dt$

17–40 □ Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a integral, ou explique por que ela não existe.

17. $\int_{-1}^{3} x^5\, dx$

18. $\int_1^2 x^{-2}\, dx$

19. $\int_2^8 (4x + 3)\, dx$

20. $\int_0^4 (1 + 3y - y^2)\, dy$

21. $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

22. $\int_0^1 x^{3/7}\, dx$

23. $\int_1^2 \frac{3}{t^4}\, dt$

24. $\int_{-1}^{1} \frac{3}{t^4}\, dt$

25. $\int_3^3 \sqrt{x^5 + 2}\, dx$

26. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta$

27. $\int_{-4}^{2} \frac{2}{x^6}\, dx$

~~**28.**~~ $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

29. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen} t\, dt$

30. $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})\, dx$

31. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sec x \operatorname{tg} x\, dx$

32. $\int_{\pi/4}^{\pi} \sec^2\theta\, d\theta$

33. $\int_1^9 \frac{1}{2x}\, dx$

~~**34.**~~ $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x\, dx$

35. $\int_8^9 2^t\, dt$

36. $\int_{-e^2}^{-e} \frac{3}{x}\, dx$

37. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{6}{1 + x^2}\, dx$

38. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

39. $\int_0^2 f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ x^5 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

40. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$

41–44 □ Use o gráfico para dar uma estimativa não precisa da área da região que está situada abaixo da curva dada. Então ache a área exata.

41. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

42. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

43. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

44. $y = \sec^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

45–46 □ Calcule a integral e interprete-a como uma diferença das áreas. Ilustre com um esboço.

45. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

~~**46.**~~ $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

47–50 □ Ache a derivada da função

47. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\, du$

$$\left[\textit{Dica: } \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_0^{3x} f(u)\, du \right]$$

48. $g(x) = \int_{\operatorname{tg} x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 + t^4}}\, dt$

49. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \operatorname{sen} t\, dt$

50. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\, du$

51. Se $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u}\, du$, determine $F''(2)$.

52. Ache o intervalo em que a curva

$$y = \int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2}\, dt$$

é côncava para cima

53. A função Fresnel S foi definida no Exemplo 2, e seus gráficos estão nas Figuras 4 e 5.

(a) Em que valores de x essa função tem valores de máximo locais?

(b) Em que intervalos a função é côncava para cima?

CAS (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, correta até uma casa decimal:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt = 0,2$$

CAS **54. A função integral seno**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

é importante em engenharia elétrica. [O integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ não está definido quando $t = 0$ mas sabemos que seu limite é 1 quando $t \to 0$. Logo definimos $f(0) = 1$, e isso faz de f uma função contínua em toda parte.]

(a) Trace o gráfico de Si.

(b) Em que valores de x essa função tem valores de máximo locais?

(c) Ache as coordenadas do primeiro ponto de inflexão à direita da origem.

(d) Essa função tem assíntotas horizontais?

(e) Resolva a seguinte equação correta até uma casa decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

55–56 □ Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.

(a) Em que valores de x ocorrem os valores de máximo e mínimo local em g?

(b) Onde g atinge seu valor máximo absoluto?

5.4 Exercícios

1–4 □ Verifique por diferenciação que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

5–14 □ Ache a integral indefinida geral.

5. $\displaystyle\int x^{-3/4}\,dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

7. $\displaystyle\int (x^3+6x+1)\,dx$

8. $\displaystyle\int x(1+2x^4)\,dx$

9. $\displaystyle\int (1-t)(2+t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int \left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

11. $\displaystyle\int (2-\sqrt{x})^2\,dx$

12. $\displaystyle\int (3e^u+\sec^2 u)\,du$

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}^2 x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx$

15–16 □ Ache a integral indefinida geral. Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família na mesma tela.

15. $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$

16. $\displaystyle\int (\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x)\,dx$

17–42 □ Calcule a integral.

17. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x-3x^2)\,dx$

18. $\displaystyle\int_1^2 (5x^2-4x+3)\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x-e^x)\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^1 (y^9-2y^5+3y)\,dy$

21. $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)dt$

22. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^6-t^2}{t^4}\,dt$

23. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^2 (x^3-1)^2\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 u(\sqrt{u}+\sqrt[3]{u})\,du$

26. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x+4\cos x)\,dx$

27. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,dx$

28. $\displaystyle\int_{-1}^2 |x-x^2|\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-2}^3 |x^2-1|\,dx$

30. $\displaystyle\int_1^{-1} (x-1)(3x+2)\,dx$

31. $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right)dt$

32. $\displaystyle\int_1^8 \left(\sqrt[3]{r}+\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)dr$

33. $\displaystyle\int_{-1}^0 (x+1)^3\,dx$

34. $\displaystyle\int_{-5}^{-2} \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{cossec}^2\,\theta\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \mathrm{cossec}\,x\,\mathrm{cotg}\,x\,dx$

39. $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$

40. $\displaystyle\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

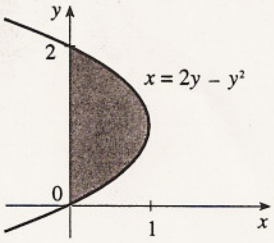
41. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-2|x|)\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^2 (x^2-|x-1|)\,dx$

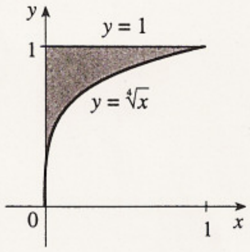
43. Use um gráfico para estimar o intercepto x da curva $y = x + x^2 - x^4$. Então use essa informação para estimar a área da região que se situa sob a curva e acima do eixo x.

44. Repita o Exercício 43 para a curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

45. A área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$ (a região sombreada na figura) é dada pela integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire sua cabeça no sentido horário e imagine a região como estando abaixo da curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ até $y = 2$.) Ache a área da região.



46. Os contornos da região sombreada são o eixo y, a reta $y = 1$ e a curva $y = \sqrt[4]{x}$. Ache a área dessa região escrevendo x como uma função de y e integrando em relação a y (como no Exercício 45).



e assim sendo a Equação 8 fica

$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

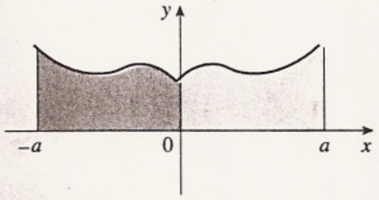
(a) Se f for par, então $f(-u) = f(u)$; logo, da Equação 9 segue que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

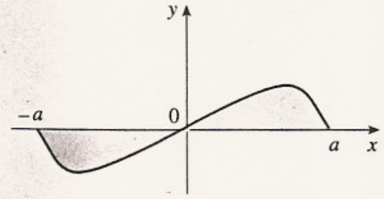
(b) Se f for ímpar, então $f(-u) = -f(u)$, e a Equação 9 nos dá que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

□



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



(b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

FIGURA 4

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 4. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a devido à simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 □ Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$
$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

□

EXEMPLO 11 □ Uma vez que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e portanto

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

□

5.5 Exercícios

1–6 □ Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$
2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$
3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$
4. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad u = \sqrt{x}$
5. $\int \dfrac{4}{(1 + 2x)^3}\,dx, \quad u = 1 + 2x$
6. $\int e^{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta\,d\theta, \quad u = \operatorname{sen}\theta$

7–44 □ Calcule a integral indefinida.

7. $\int 2x(x^2 + 3)^4\,dx$
8. $\int x^3(1 - x^4)^5\,dx$
9. $\int \sqrt{x - 1}\,dx$
10. $\int (2 - x)^6\,dx$
11. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$
12. $\int \dfrac{x}{x^2 + 1}\,dx$
13. $\int \dfrac{1 + 4x}{\sqrt{1 + x + 2x^2}}\,dx$
14. $\int x(x^2 + 1)^{3/2}\,dx$
15. $\int \dfrac{2}{(t + 1)^6}\,dt$
16. $\int \dfrac{1}{(1 - 3t)^4}\,dt$
17. $\int (1 - 2y)^{1.3}\,dy$
18. $\int \sqrt[5]{3 - 5y}\,dy$

19. $\int \cos 2\theta\, d\theta$

20. $\int \sec^2 3\theta\, d\theta$

21. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

22. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x}{1 + x^2}\, dx$

23. $\int t\,\operatorname{sen}(t^2)\, dt$

24. $\int \dfrac{(1 + \sqrt{x})^9}{\sqrt{x}}\, dx$

25. $\int \sec x\ \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \sec x}\, dx$

26. $\int t^2 \cos(1 - t^3)\, dt$

27. $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\, dx$

28. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\, dx$

29. $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$

30. $\int \dfrac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}\, dx$

31. $\int \dfrac{dx}{x \ln x}$

32. $\int \dfrac{e^x}{e^x + 1}\, dx$

33. $\int \sqrt{\operatorname{cotg} x}\, \operatorname{cossec}^2 x\, dx$

34. $\int \dfrac{\cos(\pi/x)}{x^2}\, dx$

35. $\int \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x}\, dx$

36. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

37. $\int \sec^3 x \operatorname{tg} x\, dx$

38. $\int \sqrt[3]{x^3 + 1}\, x^5\, dx$

39. $\int x^a \sqrt{b + cx^{a+1}}\, dx \quad (c \neq 0, a \neq -1)$

40. $\int \cos x \cos(\operatorname{sen} x)\, dx$

41. $\int \dfrac{1 + x}{1 + x^2}\, dx$

42. $\int \dfrac{x}{1 + x^4}\, dx$

43. $\int \dfrac{x}{\sqrt[4]{x + 2}}\, dx$

44. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x}}\, dx$

45–48 □ Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável fazendo um gráfico da função e de sua antiderivada (tome $C = 0$).

45. $\int \dfrac{3x - 1}{(3x^2 - 2x + 1)^4}\, dx$

46. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$

47. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

48. $\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$

49–70 □ Calcule a integral definida, se ela existir.

49. $\int_0^2 (x - 1)^{25}\, dx$

50. $\int_0^7 \sqrt{4 + 3x}\, dx$

51. $\int_0^1 x^2(1 + 2x^3)^5\, dx$

52. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2)\, dx$

53. $\int_0^1 \cos \pi t\, dt$

54. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} 4t\, dt$

55. $\int_1^4 \dfrac{1}{x^2} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}\, dx$

56. $\int_0^2 \dfrac{dx}{(2x - 3)^2}$

57. $\int_0^3 \dfrac{dx}{2x + 3}$

58. $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

59. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

60. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{1 + x^6}\, dx$

61. $\int_0^{13} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

62. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{sen}^5\theta\, d\theta$

63. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx$

64. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

65. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

66. $\int_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

67. $\int_0^4 \dfrac{dx}{(x - 2)^3}$

68. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

69. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

70. $\int_{-a}^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx$

71–72 □ Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva dada. Então ache a área exata.

71. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

72. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

73. Calcule $\int_{-2}^2 (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

74. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

75. A respiração é um ciclo completo e cíclico que começa pela inalação e acaba pela exalação, e isso tudo leva cerca de 5 s. A taxa máxima do fluxo de ar para dentro dos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em parte, por que a função $f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido freqüentemente usada para modelar a taxa de fluxo de ar para dentro dos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

76. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Observe que a produção tende a 5000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores estão familiarizados com as novas técnicas.) Ache o número de calculadoras produzidas do começo da terceira semana até o final da quarta semana.

77. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, ache $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

78. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, ache $\int_0^3 xf(x^2)\, dx$.

79. Suponha f contínua em $\mathbb{R}$.

(a) Prove que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$$