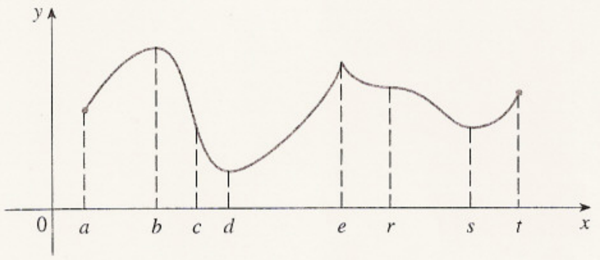
4.1 Exercícios

1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

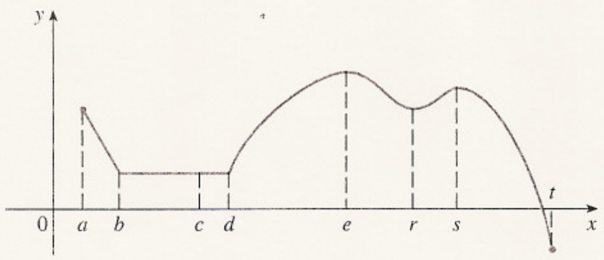
2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.
   (a) Que teorema garante a existência de valores máximo e mínimo absolutos para f?
   (b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximo e mínimo?

3–4 □ Para cada um dos números a, b, c, d, e, r, s e t, estabeleça se a função cujo gráfico é dado tem um máximo ou mínimo absoluto, um máximo ou mínimo local, ou nem máximo nem mínimo.

3.

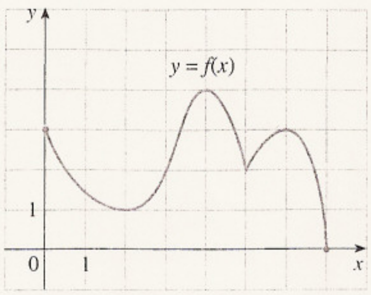


4.

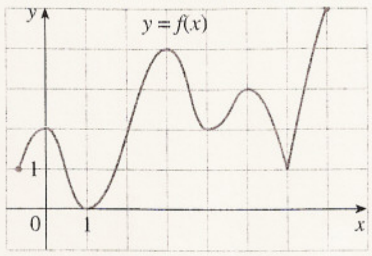


5–6 □ Use o gráfico para estabelecer os valores máximo e mínimo locais e absolutos da função.

5.



6.



7–10 □ Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[0, 3]$ e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 0, mínimo absoluto em 3, mínimo local em 1 e máximo local em 2.

8. Máximo absoluto em 1, mínimo absoluto em 2.

9. 2 é um número crítico, mas f não tem máximo ou mínimo locais.

10. Mínimo absoluto em 0, máximo absoluto em 2, máximo local em 1 e 2, mínimo local em 1,5.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e é diferenciável em 2.
    (b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e é contínua, mas não diferenciável, em 2.
    (c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.
    (b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.
    (b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.
    (b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15–30 □ Encontre os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f. Comece por esboçar a mão seu gráfico. (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$

CÁLCULO 1 - Profª ANA PAULA
MÁXIMO E MÍNIMO / REGRA L'HOPITAL
LISTA 6.

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2$

22. $f(x) = 1 + (x + 1)^2, \quad -2 \leqslant x < 5$

23. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t < 1$

24. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t \leqslant 1$

25. $f(\theta) = \text{sen}\, \theta, \quad -2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

26. $f(\theta) = \text{tg}\, \theta, \quad -\pi/4 \leqslant \theta < \pi/2$

27. $f(x) = x^5$

28. $f(x) = 2 - x^4$

29. $f(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0$

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

31–48 □ Encontre os números críticos da função.

31. $f(x) = 5x^2 + 4x$

32. $f(x) = 5 + 6x - 2x^3$

33. $f(t) = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 4$

34. $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$

35. $s(t) = 2t^3 + 3t^2 - 6t + 4$

36. $s(t) = t^4 + 4t^3 + 2t^2$

37. $f(r) = \dfrac{r}{r^2 + 1}$

38. $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^2 + z + 1}$

39. $g(x) = |2x + 3|$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $g(t) = 5t^{2/3} + t^{5/3}$

42. $g(t) = \sqrt{t}\,(1 - t)$

43. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

44. $G(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

45. $f(\theta) = \text{sen}^2(2\theta)$

46. $g(\theta) = \theta + \text{sen}\, \theta$

47. $f(x) = x \ln x$

48. $f(x) = xe^{2x}$

49–64 □ Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

49. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

51. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4, \quad [-2, 1]$

52. $f(x) = 18x + 15x^2 - 4x^3, \quad [-3, 4]$

53. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad [-3, 2]$

54. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1, \quad [-2, 2]$

55. $f(x) = x^2 + 2/x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

56. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad [-1, 2]$

57. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

58. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad [1, 2]$

59. $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x, \quad [0, \pi/3]$

60. $f(x) = x - 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$

61. $f(x) = xe^{-x}, \quad [0, 2]$

62. $f(x) = (\ln x)/x, \quad [1, 3]$

63. $f(x) = x - 3\ln x, \quad [1, 4]$

64. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

65–66 □ Use um gráfico para estimar os números críticos de f com uma casa decimal.

65. $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$

66. $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$

67–70 □

(a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com duas casas decimais.

(b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

67. $f(x) = x^3 - 8x + 1, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

68. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$

69. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

70. $f(x) = (\cos x)/(2 + \text{sen}\, x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

71. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

72. Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda fizer um ângulo θ com o plano, então a magnitude da força é

$$F = \frac{\mu W}{\mu\, \text{sen}\, \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\text{tg}\, \theta = \mu$.

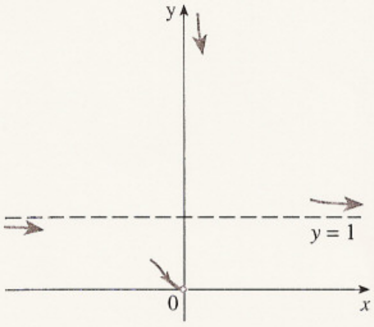
73. Um modelo para índice de preço de alimentos (o preço de uma cesta básica) entre 1984 e 1994 é dado pela função

$$I(t) = 0{,}00009045t^5 + 0{,}001438t^4 - 0{,}06561t^3 + 0{,}4598t^2 - 0{,}6270t + 99{,}33$$

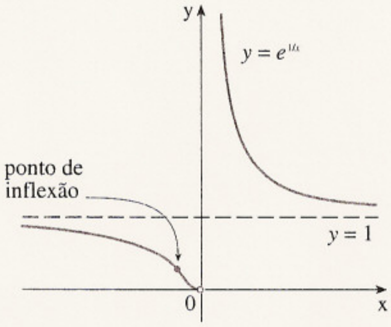
onde t é medido em anos desde a metade do ano de 1984; assim $0 \leqslant t \leqslant 10$, e $I(t)$ é medido em 1987 dólares e reduzido em uma escala tal que $I(3) = 100$. Estime os períodos nos quais a comida foi mais barata e mais cara durante o período de 1984–1994.

74. Em 7 de maio de 1992 o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49.

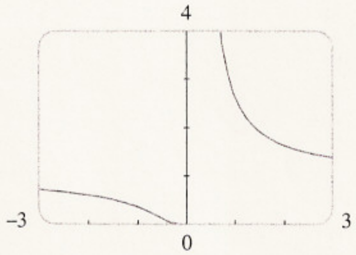
Para esboçar o gráfico de f primeiro desenhamos a assíntota horizontal $y = 1$ (como uma linha tracejada), junto com as partes da curva próxima da assíntota em um esboço preliminar [Figura 13(a)]. Essas partes refletem a informação relativa a limites e o fato de que f é decrescente tanto em $(-\infty, 0)$ como em $(0, \infty)$. Note que indicamos que $f(x) \to 0$ quando $x \to 0^-$ mesmo que $f(0)$ não exista. Na Figura 13(b) terminamos o esboço incorporando a informação relativa à concavidade e ao ponto de inflexão. Na Figura 13(c) verificamos nosso trabalho com um recurso computacional.



(a) Esboço preliminar



(b) Esboço acabado



(c) Confirmação computacional

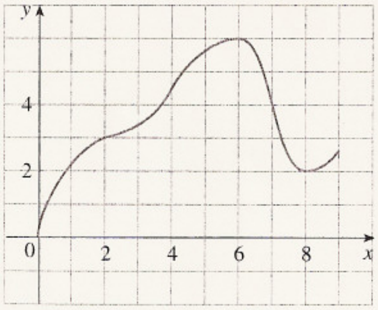
FIGURA 13

4.3 Exercícios

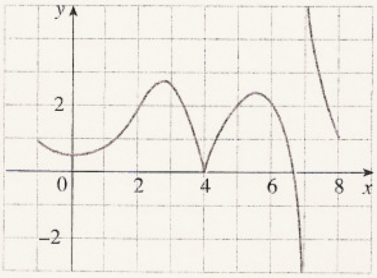
1–2 □ Use o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:

(a) O maior intervalo aberto no qual f é crescente.
(b) O maior intervalo aberto no qual f é decrescente.
(c) O maior intervalo aberto no qual f é côncava para cima.
(d) O maior intervalo aberto no qual f é côncava para baixo.
(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

1.



2.



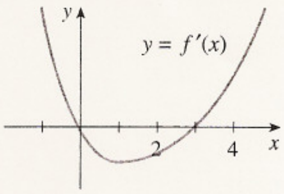
3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.
(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?
(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?
(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

4. (a) Enuncie o Teste da Derivada Primeira.
(b) Enuncie o Teste da Derivada Segunda. Sobre que circunstância ele é inconclusivo? O que você fará se ele falhar?

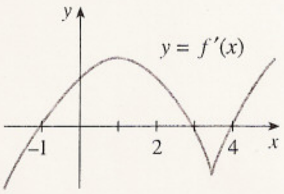
5–6 □ O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.

(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

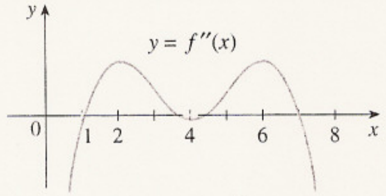
5.



6.



7. O gráfico da derivada segunda f'' de uma função f está mostrado. Estabeleça as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Justifique sua resposta.



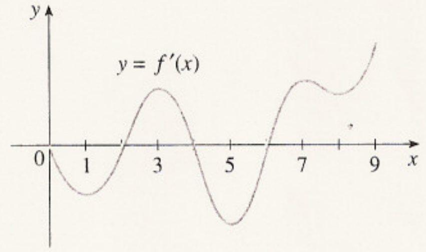
8. O gráfico da derivada primeira de f' de uma função f está mostrado.

(a) Em que intervalos está f crescendo? Explique.

(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local? Explique.

(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.

(d) Quais são as coordenadas x dos pontos de inflexão de f? Por quê?



9. Esboce o gráfico de uma função com derivadas primeira e segunda sempre negativas.

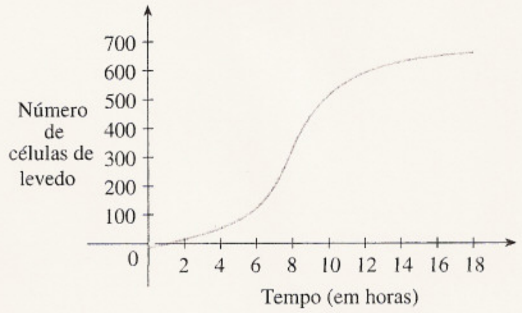
10. É mostrado o gráfico de uma população de células de levedo em uma nova cultura de laboratório como uma função do tempo.

(a) Descreva como varia a taxa de crescimento populacional.

(b) Quando essa taxa é a maior?

(c) Em que intervalos a função populacional é côncava para cima ou para baixo?

(d) Estime as coordenadas do ponto de inflexão.



11–20

(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.

(b) Encontre os valores de máximo e mínimo local de f.

(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

11. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

12. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$

13. $f(x) = x^6 + 192x + 17$

14. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x)^2}$

15. $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

16. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. $f(x) = xe^x$

18. $f(x) = x^2e^x$

19. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

20. $f(x) = x \ln x$

21–23 Encontre os valores de máximo e mínimo local de f usando ambos os Testes da Derivada de Primeira e Segunda. Qual método você prefere?

21. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

22. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

23. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

24. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.

(b) O que o Teste da Derivada Segunda mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?

(c) O que mostra o Teste da Derivada Primeira?

25–28 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça todas as condições dadas.

25. $f'(-1) = f'(1) = 0,\quad f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $|x| > 1,\quad f(-1) = 4,\quad f(1) = 0$,
$f''(x) < 0$ se $x < 0,\quad f''(x) > 0$ se $x > 0$

26. $f'(-1) = 0,\quad f'(1)$ não existe,
$f'(x) < 0$ se $|x| < 1,\quad f'(x) > 0$ se $|x| > 1$,
$f(-1) = 4,\quad f(1) = 0,\quad f''(x) < 0$ se $x \neq 1$

27. $f'(2) = 0,\quad f(2) = -1,\quad f(0) = 0$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2,\quad f'(x) > 0$ se $x > 2$,
$f''(x) < 0$ se $0 \leqslant x < 1$ ou se $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 4,\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$,
$f(-x) = f(x)$ para todo x

28. $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty,\quad f''(x) < 0$ se $x \neq 3,\quad f'(0) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $x > 3,\quad f'(x) < 0$ se $0 < x < 3$

29–30 O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está ilustrado.

(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?

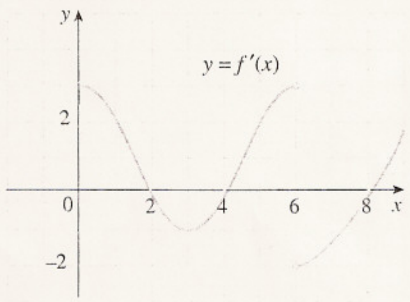
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?

(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo?

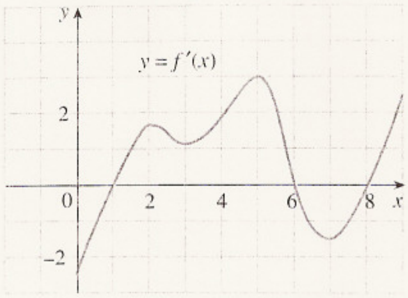
(d) Estabeleça as coordenadas x dos pontos de inflexão.

(e) Assumindo que $f0) = 0$, esboce o gráfico de f.

29.



30.



31–42 □

(a) Encontre os intervalos onde a função é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores de máximo ou mínimo locais.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(d) Use as informações das partes (a), (b) e (c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com um recurso computacional se você tiver um.

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

32. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

33. $f(x) = x^4 - 6x^2$

34. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

35. $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

36. $h(x) = (x^2 - 1)^3$

37. $P(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

38. $Q(x) = x - 3x^{1/3}$

39. $Q(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

40. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

41. $f(\theta) = \text{sen}^2\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

42. $f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

43–50 □

(a) Encontre as assíntotas vertical e horizontal.
(b) Encontre os intervalos onde a função é crescente ou decrescente.
(c) Encontre os valores de máximo e mínimo local.
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

43. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

44. $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$

45. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

46. $f(x) = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

47. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

48. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

49. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

50. $f(x) = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

51–52 □

(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então encontre os valores exatos.
(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então encontre o valor exato.

51. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

52. $f(x) = x^2 e^{-x}$

53–54 □

(a) Use um gráfico de f para estimar os intervalos da concavidade e as coordenadas dos pontos de inflexão.
(b) Use um gráfico de f'' para dar uma estimativa melhor.

53. $f(x) = 3x^5 - 40x^3 + 30x^2$

54. $f(x) = 2\cos x + \text{sen}\, 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

55–56 □ Estime os intervalos da concavidade para uma casa decimal usando um sistema algébrico computacional para computar e fazer o gráfico de f''.

55. $f(x) = \dfrac{x^3 - 10x + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$

56. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3(x^2 + 5)}{(x^3 + 1)(x^2 + 4)}$

57. Seja $K(t)$ uma medida do conhecimento adquirido por você estudando t horas para um teste. O que você acredita ser maior, $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? O gráfico de K é côncavo para cima ou para baixo? Por quê?

58. O café está sendo despejado na caneca mostrada na figura a uma taxa constante (medida em volume por unidade de tempo). Esboce um gráfico da profundidade do café na caneca como sendo uma função do tempo. Forneça uma explicação para o formato do gráfico em termos de concavidade. Qual a significância do ponto de inflexão?

59. Para um período de 1980 a 1994, a porcentagem de famílias nos Estados Unidos com no mínimo um videocassete foi modelada pela função

$$V(t) = \frac{75}{1 + 74e^{-0{,}6t}}$$

onde o tempo t é medido em anos desde a metade do ano de 1980; então, $0 \leqslant t \leqslant 14$. Use um gráfico para estimar o tempo segundo o qual o número de videocassetes estava crescendo mais rapidamente. Use então derivadas para dar uma estimativa mais precisa.

60. A família das curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocorre em probabilidade e estatística, onde ela é chamada de *função densidade normal*. A constante μ é chamada de *média*, e a constante positiva σ é chamada de *desvio padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala da função de forma a remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e vamos analisar o caso especial onde $\mu = 0$. Logo, estudamos a função

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de f.
(b) Que papel desempenha σ no formato da curva?
(c) Ilustre fazendo o gráfico dos quatros membros dessa família sobre a mesma tela.

61. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local 3 em -2 e um valor mínimo local 0 em 1.

62. Para quais valores do número a e b a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem o valor máximo $f(2) = 1$?

63–66 □ Assuma que todas as funções são duas vezes diferenciáveis e as derivadas segundas nunca se anulam.

63. Se f e g forem côncavas para cima em I, mostre que $f + g$ é côncava para cima em I.

64. Se f for positiva e côncava para cima em I, mostre que $g(x) = [f(x)]^2$ é côncava para cima em I.

65. Se f e g forem funções positivas, crescentes e côncavas para cima em I, mostre que o produto de funções fg é côncavo para cima.

66. Suponha que f e g são ambas côncavas para cima em $(-\infty, \infty)$. Sobre que condições de f será a função composta $h(x) = f(g(x))$ côncava para cima?

67. Mostre que tg $x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugestão*: Mostre que $f(x) = \text{tg } x - x$ é crescente em $(0, \pi/2)$.]

68. (a) Mostre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
(b) Deduza que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
(c) Use indução matemática para provar que para $x \geqslant 0$ e qualquer inteiro positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

69. Mostre que a função cúbica (um polinômio de terceiro grau) tem sempre exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico tem três interceptos x, x_1, x_2 e x_3, mostre que a coordenada x do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

70. Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? Um ponto de inflexão? Nenhum? Ilustre fazendo o gráfico de P para vários valores de c. Como o gráfico varia quando c decresce?

71. Prove que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e f'' existe em um intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. [*Sugestão*: Aplique o Teste da Derivada Primeira e o Teorema de Fermat para a função $g = f'$.]

72. Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

73. Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$, mas $g''(0)$ não existe

74. Suponha que f''' é contínua e $f'(c) = f'(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. f tem um máximo ou mínimo local em c? f tem um ponto de inflexão em c?

4.4 Formas Indeterminadas e a Regra de L'Hôpital

Suponha que estamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Embora F não esteja definida quando $x = 1$, precisamos saber como F se comporta *próximo* de 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Lei 5 dos Limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites, veja a Seção 2.3), pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite em (1) exista, seu valor não é óbvio, porque tanto numerador como denominador tendem a 0, e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então esse limite pode ou não existir e é

Então $\qquad \ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x}] = \operatorname{cotg} x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$

logo a Regra de L'Hôpital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$ □

□ O gráfico da função $y = x^x$, $x > 0$ está na Figura 6. Observe que embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \to 0^+$. Isto confirma o resultado do Exemplo 9.

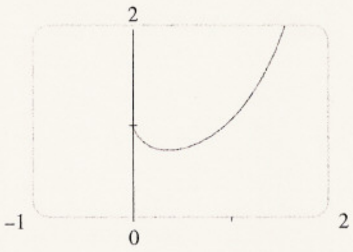


FIGURA 6

EXEMPLO 9 □ Calcule $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

SOLUÇÃO Note que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$ mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. Podemos seguir como no Exemplo 8 ou escrevendo a função como uma exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

No Exemplo 6 usamos a Regra de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$ □

4.4 Exercícios

1-4 □ Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5-66 □ Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôpital onde for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôpital não for aplicável, explique por quê.

5. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

6. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

7. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

12. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx}$

14. $\lim\limits_{x \to 3\pi/2} \dfrac{\cos x}{x - (3\pi/2)}$

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

19. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{5^t - 3^t}{t}$

20. $\lim\limits_{t \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{t} - 2}{t - 16}$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - (x^2/2)}{x^3}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x^2}$

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x}$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$

30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \alpha x}{x}$

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln(1 + 2e^x)}$

34. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{tg} 2x}{x - \operatorname{tg} 2x}$

35. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tgh} 3x}$

36. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-2x}}{\sec x}$

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \operatorname{sen}^{-1} x}{2x + \cos^{-1} x}$

38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \operatorname{sen}^{-1} x}{2x + \operatorname{tg}^{-1} x}$

39. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

40. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x$

41. $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} \ln x$

42. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \sec 7x \cos 3x$

43. $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 e^{-x^2}$

44. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sec x$

45. $\lim\limits_{x \to \pi} (x - \pi) \operatorname{cotg} x$

46. $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) \operatorname{tg}(\pi x/2)$

47. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

48. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)$

49. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cossec} x \right)$

50. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

51. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

52. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

53. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

54. $\lim\limits_{x \to \infty} (x e^{1/x} - x)$

55. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

56. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

57. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

58. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx}$

59. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} \right)^x$

60. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

61. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$

62. $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

63. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{x + 1} \right)^x$

64. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 3x)^{5/x}$

65. $\lim\limits_{x \to 0^+} (-\ln x)^x$

66. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{2x+1}$

67–68 □ Use um gráfico para estimar o valor do limite. Então use a Regra de L'Hôpital para encontrar o valor exato.

67. $\lim\limits_{x \to \infty} x[\ln(x + 5) - \ln x]$

68. $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

69–70 □ Ilustre a Regra de L'Hôpital fazendo o gráfico de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x = 0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

69. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

70. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

71. Prove que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito do que qualquer potência de x.

72. Prove que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente do que qualquer potência de x.

73. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros i composta n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0 \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt}$$

Se fizermos $n \to \infty$, chamamos isso de *juros compostos* continuamente. Use a Regra de L'Hôpital para mostrar que se os juros forem compostos continuamente, então o montante após n anos será

$$A = A_0 e^{it}$$

74. Se um objeto de massa m é deixado cair a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$$

onde g é a aceleração devida à gravidade e c é uma constante positiva. (No Capítulo 9 deduziremos essa equação a partir da hipótese de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto).

(a) Calcule $\lim_{t \to \infty} v$. Qual o significado desse limite?

(b) Para um valor fixo de t, use a Regra de L'Hôpital para cal-

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to \pm\infty$$

Logo a reta $y = x$ é uma assíntota inclinada.

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$ para todo x (exceto 0), f é crescente em $(-\infty, \infty)$.

F. Embora $f'(0) = 0$, f' não muda o sinal em 0, logo não há máximo ou mínimo local.

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

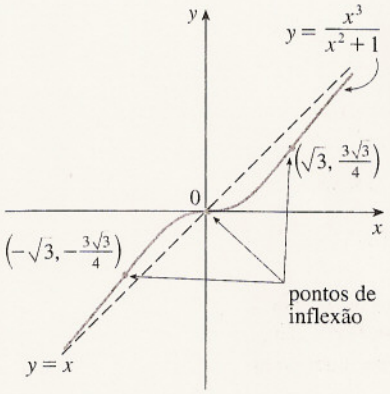


FIGURA 17

Uma vez que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, estabelecemos a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $\left(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4\right)$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 17.

4.5 Exercícios

1-50 □ Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$
2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$
3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$
4. $y = 8x^2 - x^4$
5. $y = x^4 + 4x^3$
6. $y = 2 - x - x^9$
7. $y = \frac{x}{x-1}$
8. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$
9. $y = \frac{1}{x^2-9}$
10. $y = \frac{x}{x^2-9}$
11. $y = \frac{x}{x^2+9}$
12. $y = \frac{x^2}{x^2+9}$
13. $y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$
14. $y = \frac{1}{x^2(x+3)}$
15. $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$
16. $y = \frac{x^3-1}{x^3+1}$
17. $y = \frac{1}{x^3-x}$
18. $y = \frac{1-x^2}{x^3}$
19. $y = x\sqrt{5-x}$
20. $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$
21. $y = \sqrt{x^2+1} - x$
22. $y = \sqrt{\frac{x}{x-5}}$
23. $y = \sqrt[4]{x^2-25}$
24. $y = x\sqrt{x^2-9}$
25. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
26. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
27. $y = x + 3x^{2/3}$
28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$
29. $y = x + \sqrt{|x|}$
30. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$
31. $y = \cos x - \operatorname{sen} x$
32. $y = \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x$
33. $y = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
34. $y = 2x + \operatorname{cotg} x, \quad 0 < x < \pi$
35. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$
36. $y = \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x$
37. $y = 2\cos x + \operatorname{sen}^2 x$
38. $y = \operatorname{sen} x - x$

39. $y = \text{sen}\, 2x - 2\,\text{sen}\, x$

40. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \text{sen}\, x}$

41. $y = 1/(1 + e^{-x})$

42. $y = \ln(\cos x)$

43. $y = x \ln x$

44. $y = e^x/x$

45. $y = xe^{-x}$

46. $y = (\ln x)/x$

47. $y = \ln(x^2 - x)$

48. $y = x(\ln x)^2$

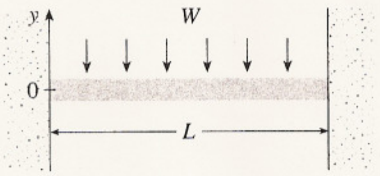
49. $y = xe^{-x^2}$

50. $y = e^x - 3e^{-x} - 4x$

51. A figura mostra uma viga de comprimento L embutida em paredes de concreto. Se uma carga constante W for distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, a viga assumirá a forma da curva de deflexão

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

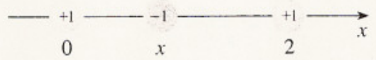
onde E e I são constantes positivas. (E é o módulo de elasticidade de Young, e I é o momento de inércia da secção transversal da viga.) Esboce o gráfico da curva de deflexão.



52. A Lei de Coulomb estabelece que a força de atração entre duas partículas com carga é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A figura mostra partículas com carga 1 localizadas nas posições 0 e 2 sobre o eixo de coordenadas, e uma partícula com carga −1 em uma posição x entre elas. Segue da Lei de Coulomb que a força líquida agindo sobre a partícula do meio é

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} - \frac{k}{(x-2)^2}$$

onde k é uma constante positiva. Esboce o gráfico da função força líquida. O que o gráfico mostra sobre a força?



53–58 Use o roteiro dessa seção para esboçar o gráfico da curva. No item D do roteiro encontre uma equação da assíntota inclinada.

53. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

54. $y = x - \dfrac{1}{x}$

55. $xy = x^2 + 4$

56. $y = e^x - x$

57. $y = \dfrac{1}{x - 1} - x$

58. $y = \dfrac{x^2}{2x + 5}$

59. Mostre que as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ são assíntotas inclinadas da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

60. Seja $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Mostre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é uma assíntota da parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

61. Discuta o comportamento assintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ da mesma forma que no Exercício 60. Use então seus resultados como ajuda no esboço do gráfico de f.

62. Use o comportamento assintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para esboçar seu gráfico sem passar pelo roteiro desta seção.

4.6 Fazendo Gráficos com o Cálculo e Calculadoras

Se você ainda não leu a Seção 1.4, deve fazê-lo agora. Ela explica como evitar algumas falhas dos recursos gráficos na escolha de janelas de inspeção inapropriadas.

O método usado para esboçar curvas na seção precedente foi um auge dentro de nosso estudo de cálculo diferencial. O gráfico foi o objetivo final obtido por nós. Nesta seção nosso ponto de vista é completamente diferente. *Começamos* aqui com um gráfico produzido por uma calculadora gráfica ou computador e então o refinamos. Usamos o cálculo para assegurar que estão aparentes todos os aspectos importantes da curva. E com o uso de recursos gráficos podemos nos dedicar a curvas complicadas de se tratar sem essa tecnologia. O objetivo aqui é a *interação* entre cálculo e calculadoras.

EXEMPLO 1 Faça o gráfico do polinômio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use os gráficos de f' e f'' para estimar todos os pontos de máximo e de mínimo e os intervalos de concavidade.

SOLUÇÃO Se especificarmos um domínio, mas não uma variação, muitos recursos gráficos deduzirão uma nova variação razoável para os valores computados. A Figura 1 mostra o gráfico obtido a partir de algum desses recursos se especificarmos que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Embora essa janela de inspeção seja útil para mostrar que o comporta-

EXEMPLO 5 □ Encontre a área do maior retângulo que pode ser descrito em um semicírculo de raio r.

SOLUÇÃO 1 Vamos considerar o semicírculo como sendo a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ com centro na origem. Então a palavra *inscrito* significa que o retângulo tem dois vértices sobre o semicírculo e dois vértices sobre o eixo x, conforme mostra a Figura 9.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. E então o retângulo tem lados de comprimento $2x$ e y, e sua área é

$$A = 2xy$$

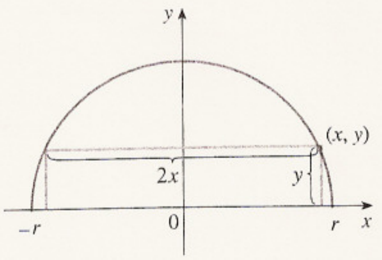


FIGURA 9

Para eliminar y usamos o fato de que (x, y) está sobre o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e portanto $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

O domínio dessa função é $0 \leqslant x \leqslant r$. Sua derivada é

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que é zero quando $2x^2 = r^2$, isto é, $x = r/\sqrt{2}$ (uma vez que $x \geqslant 0$). Esse valor de x dá um valor máximo de A, uma vez que $A(0) = 0$ e $A(r) = 0$. Portanto, a área do maior retângulo inscrito é

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

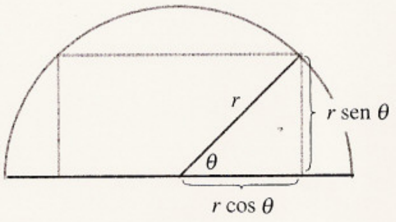


FIGURA 10

SOLUÇÃO 2 Uma solução mais simples é possível quando usamos um ângulo como uma variável. Seja θ o ângulo mostrado na Figura 10. Então a área do retângulo é

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r \operatorname{sen}\theta) = r^2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = r^2\operatorname{sen}2\theta$$

Sabemos que $\operatorname{sen}2\theta$ tem um valor máximo de 1 e ele ocorre quando $2\theta = \pi/2$. Logo $A(\theta)$ tem um valor máximo de r^2 e ele ocorre quando $\theta = \pi/4$.

Note que essa solução trigonométrica não envolve diferenciação. De fato, não necessitamos usar nada do cálculo aqui. □

4.7 Exercícios

1. Encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja um máximo.
   (a) Faça uma tabela de valores, como a mostrada a seguir, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.

Primeiro Número	Segundo Número	Produto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.

   (b) Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte (a).
2. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja um mínimo.
3. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja um mínimo.
4. Encontre um número positivo tal que a soma do número e seu recíproco sejam tão pequenos quanto possível.
5. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.
6. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.

7. Um fazendeiro com 750 pés de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?
(a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.
(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.
(c) Escreva uma expressão para a área total.
(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
(e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.
(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

8. Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 pés de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.
(a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas pequenas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.
(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza a notação e marque no diagrama seus símbolos.
(c) Escreva uma expressão para o volume.
(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
(e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.
(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

9. Um fazendeiro quer cercar uma área de 1,5 milhão de pés quadrados num campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?

10. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem um volume de 32.000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

11. Se 1200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

12. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa $ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa $ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato de tais contêineres.

13. Faça o Exercício 12 supondo que o contêiner tem uma tampa que é feita do mesmo material usado nos lados.

14. (a) Mostre que, de todos os retângulos com uma área dada, aquele com um menor perímetro é um quadrado.
(b) Mostre que, de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com a maior área é um quadrado.

15. Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.

16. Encontre o ponto sobre a reta $6x + y = 9$ que está mais próximo do ponto $(-3, 1)$.

17. Encontre o ponto sobre a hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2, 0)$.

18. Encontre o ponto sobre a parábola $x + y^2 = 0$ que está mais próximo do ponto $(0, -3)$.

19. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

20. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

21. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo eqüilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

22. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 8 - x^2$.

23. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

24. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

25. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior valor possível de tal cilindro.

26. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível de tal cilindro.

27. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior área superficial possível para tal cilindro.

28. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. Veja o Exercício 52 na página 24.) Se o perímetro da janela for 30 pés, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

29. As bordas de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm, e as bordas laterais medem 4 cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

30. Um pôster deve ter uma área de 180 pol^2 com uma borda de 1 polegada na base e nos lados, e uma borda de 2 polegadas em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?

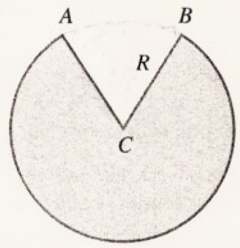
31. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo eqüilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) um máximo? (b) um mínimo?

32. Responda o Exercício 31 se um pedaço estiver dobrado no formato de um quadrado e o outro no formato de um círculo.

33. Uma lata cilíndrica sem o topo é feita para receber V cm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

34. Uma cerca de 8 pés de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 4 pés do edifício. Qual o comprimento da menor escada que irá atingir do chão, por cima da cerca, a parede do prédio?

35. Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



36. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que peixes migratórios tentam minimizar a energia total requerida para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u ($u < v$), então o tempo requerido para nadar uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.
(a) Determine o valor de v que minimiza E.
(b) Esboce o gráfico de E.

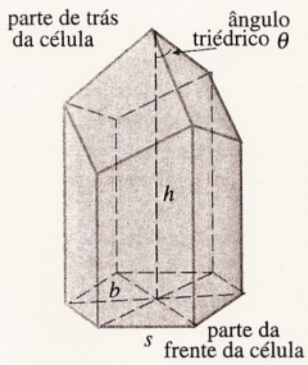
Nota: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior do que a velocidade da corrente.

37. Em uma colméia, cada célula é um prisma hexagonal regular, aberto no extremo com um ângulo triédrico no outro extremo. Acredita-se que as abelhas formam essas células de forma a minimizar a área superficial para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame dessas células mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria da célula, pode ser mostrado que a área superficial S é dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg}\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\operatorname{cossec}\theta$$

onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.
(a) Calcule $dS/d\theta$.
(b) Que ângulo deveriam preferir as abelhas?
(c) Determine a área superficial mínima da célula (em termos de s e h).

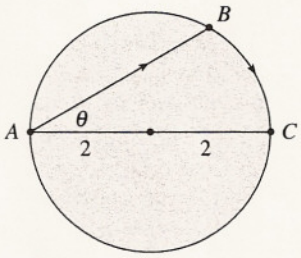
Nota: Medidas reais do ângulo θ em colméias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais do que 2°.



38. Um bote deixa uma doca às 2 horas da tarde e viaja na direção sul a uma velocidade de 20 km/h. Outro bote largou na frente em direção a leste a 15 km/h e atingiu a mesma doca às 3 horas da tarde. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

39. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

40. Uma mulher em um ponto A na praia de lago circular com raio 2 mi quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de 4 mi/h e remar um bote a 2 mi/h. Como ela deve proceder?



41. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 10 pés de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

42. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto (3, 5) e que corta fora a menor área do primeiro quadrante.

43. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é eqüilátero.

44. A moldura para uma pipa é feita de 6 pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos