EXEMPLO 5 □ Diferencie (a) $y = \dfrac{1}{\text{sen}^{-1} x}$ e (b) $f(x) = x \ \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$.

SOLUÇÃO

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\text{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x)$$
$$= -\frac{1}{(\text{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

(b)
$$f'(x) = \text{tg}^{-1}\sqrt{x} + x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)$$
$$= \text{tg}^{-1}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$
□

As funções trigonométricas inversas que ocorrem com mais freqüência são aquelas que acabamos de discutir. As derivadas das quatro funções remanescentes estão dadas na tabela a seguir. As provas das fórmulas são deixadas como exercício.

Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg}^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg}^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

□ As fórmulas para as derivadas de $\text{cossec}^{-1}x$ e $\sec^{-1}x$ dependem das definições que foram usadas para essas funções (veja o Exercício 54).

3.6 Exercícios

1–4 □
(a) Encontre y' diferenciando implicitamente.
(b) Resolva a equação explicitamente para y e diferencie para obter y' em termos de x.
(c) Verifique se suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$
2. $4x^2 + 9y^2 = 36$
3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$
4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

5–20 □ Encontre dy/dx diferenciando implicitamente.

5. $x^2 + y^2 = 1$
6. $x^2 - y^2 = 1$
7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$
8. $x^2 - 2xy + y^3 = c$
9. $x^2y + xy^2 = 3x$
10. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$
11. $\dfrac{y}{x-y} = x^2 + 1$
12. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$
13. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$
14. $\sqrt{1 + x^2y^2} = 2xy$
15. $4\cos x \,\text{sen}\, y = 1$
16. $x\,\text{sen}\,y + \cos 2y = \cos y$
17. $\cos(x - y) = xe^x$
18. $x\cos y + y\cos x = 1$
19. $xy = \text{cotg}(xy)$
20. $\text{sen}\,x + \cos y = \text{sen}\,x\cos y$

21. Se $x[f(x)]^3 + xf(x) = 6$ e $f(3) = 1$, encontre $f'(3)$.

22. Se $[g(x)]^2 + 12x = x^2g(x)$ e $g(4) = 12$, encontre $g'(4)$.

23–24 □ Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a diferenciação implícita para encontrar dx/dy.

23. $y^4 + x^2y^2 + yx^4 = y + 1$
24. $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$

CÁLCULO 1 - PROFª ANA PAULA

DERIVAÇÃO IMPLICITA

DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

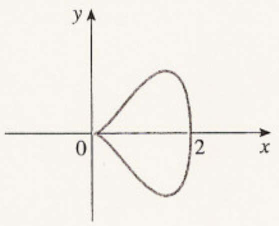
LISTA 5

25–30 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

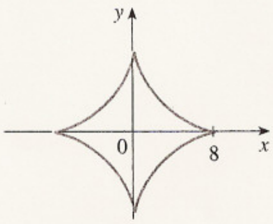
25. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1, \quad \left(-5, \frac{9}{4}\right)$ (hipérbole)

26. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1, \quad \left(-1, 4\sqrt{2}\right)$ (elipse)

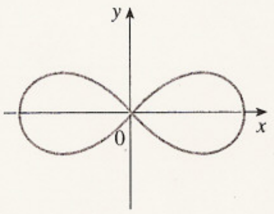
27. $y^2 = x^3(2 - x)$
$(1, 1)$
(piriforme)



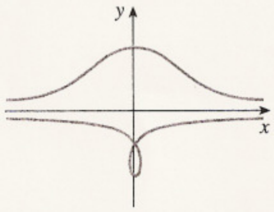
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$
(astróide)



29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



30. $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$
$(0, -2)$
(concóide de Nicomedes)



31. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada de **kampyle de Eudoxus**. Encontre uma equação da reta tangente para essa curva no ponto $(1, 2)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente sobre uma tela em comum. (Se seu recurso gráfico puder fazer gráfico de curvas definidas implicitamente, então use essa capacidade. Se não, você poderá ainda fazer o gráfico dessa curva separando sua metade superior da inferior.)

32. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é chamada de **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.
(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?
(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico da curva e as retas tangentes sobre uma tela em comum.

33. Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade implícita de plotar de um CAS.
(a) Faça o gráfico da curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as coordenadas x desses pontos.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.
(c) Encontre as coordenadas x exatas nos pontos da parte (a).
(d) Crie curvas mais extravagantes ainda modificando a equação da parte (a).

34. (a) A curva com equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

tem sido comparada com um vagão sacolejante. Use um CAS para fazer essa curva e descubra o porquê desse nome.
(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais? Encontre as coordenadas de x desses pontos.

35. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 29 onde a tangente é horizontal.

36. Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

37. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

38. Mostre que a soma dos interceptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

39. Mostre, usando a diferenciação implícita, que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

40. A Regra da Potência pode ser provada usando-se a diferenciação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é assumida de antemão como uma função diferenciável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a diferenciação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

41–50 □ Encontre a derivada da função. Simplifique onde possível.

41. $y = \operatorname{sen}^{-1}(x^2)$

42. $y = (\operatorname{sen}^{-1}x)^2$

43. $y = \operatorname{tg}^{-1}(e^x)$

44. $h(x) = \sqrt{1 - x^2}\ \operatorname{arcsen} x$

45. $H(x) = (1 - x^2)\operatorname{arctg} x$

46. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

47. $g(t) = \operatorname{sen}^{-1}(4/t)$

48. $y = x\cos^{-1}x - \sqrt{1 - x^2}$

49. $y = x^2\operatorname{cotg}^{-1}(3x)$

50. $y = \operatorname{arctg}(\cos\theta)$

51–52 □ Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

51. $f(x) = e^x - x^2\operatorname{arctg} x$

52. $f(x) = x\ \operatorname{arcsen}(1 - x^2)$

53. Prove a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método como para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

54. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1} x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leq y < \pi/2$ ou $\pi \leq y < 3\pi/2$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

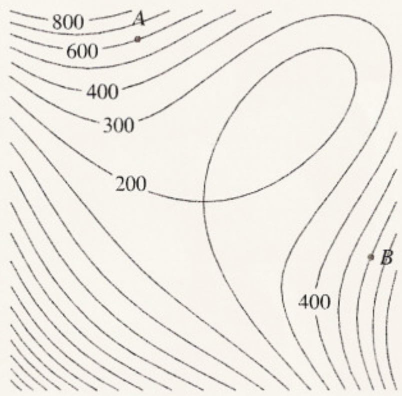
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

55–56 □ Mostre que as curvas dadas são ortogonais.

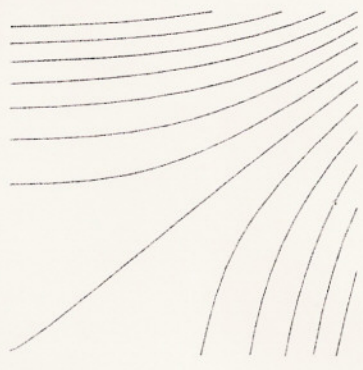
55. $2x^2 + y^2 = 3, \quad x = y^2$

56. $x^2 - y^2 = 5, \quad 4x^2 + 9y^2 = 72$

57. Curvas de nível de uma região montanhosa são curvas que ligam pontos com a mesma elevação. Uma bola caindo de uma montanha segue a curva de descida mais inclinada, ortogonal às curvas de nível. Dado o mapa de nível de uma montanha, esboce o caminho de bolas que começam nas posições A e B.



58. O homem do tempo da TV muitas vezes apresenta mapas mostrando frentes de pressão. Tais mapas exibem curvas *isobáricas* ao longo das quais a pressão do ar é constante. Considere a família isobárica mostrada na figura.



Esboce vários membros da família de trajetórias ortogonais dos isóbaros. Dado o fato de que o vento sopra da região de alta pressão para a de baixa, o que a família de ortogonais representa?

59–62 □ Mostre que as famílias de curvas dadas são trajetórias ortogonais uma da outra. Esboce ambas as famílias de curvas sobre o mesmo eixo.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

64. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intercepta a elipse uma segunda vez?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e a reta normal.

65. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

66. Encontre as equações de ambas as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passa através o ponto $(12, 3)$.

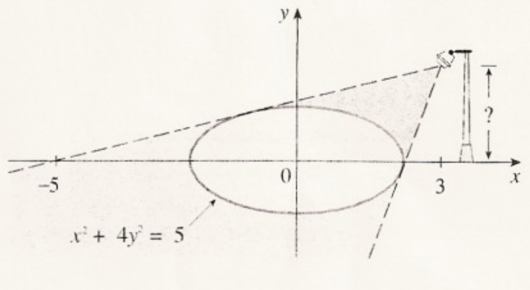
67. (a) Suponha que f seja uma função um a um, diferenciável, e que sua função inversa f^{-1} seja também diferenciável. Use a diferenciação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

contanto que o denominador não seja 0.
(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Mostre que $f(x) = 2x + \cos x$ é um a um.
(b) Qual o valor de $f^{-1}(x)$?
(c) Use a fórmula do Exercício 67(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

69. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual o afastamento da lâmpada acima do eixo x?



$$D^4 \cos x = \cos x$$

$$D^5 \cos x = -\text{sen } x$$

Vemos que as derivadas sucessivas ocorrem em um ciclo de período 4 e, em particular, $D^n \cos x = \cos x$ sempre que n é um múltiplo de 4. Conseqüentemente

$$D^{24} \cos x = \cos x$$

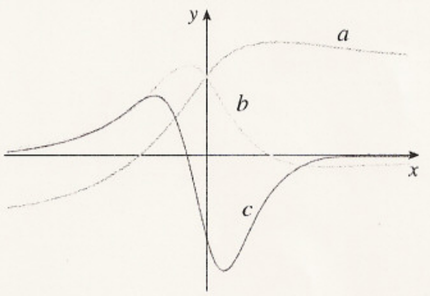
e, diferenciando mais três vezes, temos

$$D^{27} \cos x = \text{sen } x$$ □

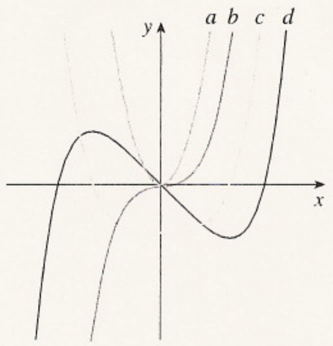
Vimos que uma aplicação das derivadas segunda e terceira ocorre analisando o movimento dos objetos usando a aceleração e um arranco. Investigaremos outra aplicação de derivada segunda no Exercício 62 e na Seção 4.3, onde mostramos como o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f. No Capítulo 11 do Volume 2 veremos como as derivadas segunda e superiores capacitam-nos representar funções como somas de série infinita.

3.7 Exercícios

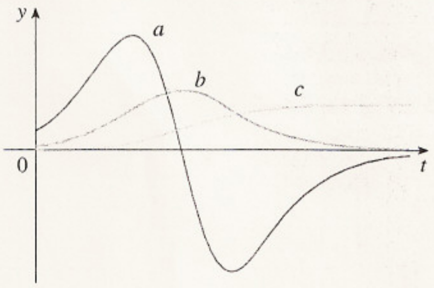
1. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique sua escolha.



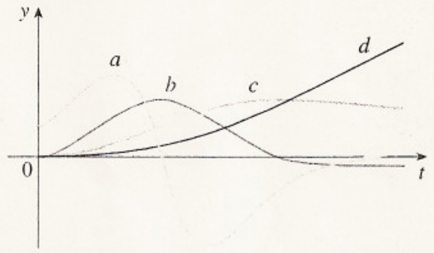
2. A figura mostra gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique sua escolha.



3. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro, e uma terceira é sua aceleração. Identifique cada curva e explique sua escolha.



4. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função posição do carro, outra é a velocidade do carro, uma terceira é a aceleração, e uma quarta é o arranco. Identifique cada curva e explique sua escolha.



5–20 □ Encontre as derivadas primeira e segunda da função.

5. $f(x) = x^5 + 6x^2 - 7x$

6. $f(t) = t^8 - 7t^6 + 2t^4$

7. $y = \cos 2\theta$

8. $y = \theta \text{ sen } \theta$

9. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

10. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

11. $F(s) = (3s + 5)^8$

12. $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u}}$

13. $y = \dfrac{x}{1 - x}$

14. $y = xe^{cx}$

15. $y = (1 - x^2)^{3/4}$

16. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

17. $H(t) = \text{tg}\ 3t$

18. $g(s) = s^2 \cos s$

19. $g(t) = t^3 e^{5t}$

20. $h(x)\ \text{tg}^{-1}(x^2)$

21. (a) Se $f(x) = 2 \cos x + \text{sen}^2 x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Para ver se suas respostas para a parte (a) são razoáveis compare os gráficos de f, f' e f''.

22. (a) Se $f(x) = e^x - x^3$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Para ver se suas respostas para a parte (a) são razoáveis compare os gráficos de f, f' e f''.

23–24 □ Encontre y'''.

23. $y = \sqrt{2x + 3}$

24. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

25. Se $f(x) = (2 - 3x)^{-1/2}$, encontre $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ e $f'''(0)$.

26. Se $g(t) = (2 - t^2)^6$, encontre $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ e $g'''(0)$.

27. Se $f(0) = \text{cotg}\ \theta$, encontre $f'''(\pi/6)$.

28. Se $g(x) = \sec x$, encontre $g'''(\pi/4)$.

29–32 □ Encontre y'' diferenciando implicitamente.

29. $x^3 + y^3 = 1$

30. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

31. $x^2 + xy + y^2 = 1$

32. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

33–37 □ Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$.

33. $f(x) = x^n$

34. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$

35. $f(x) = e^{2x}$

36. $f(x) = \sqrt{x}$

37. $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$

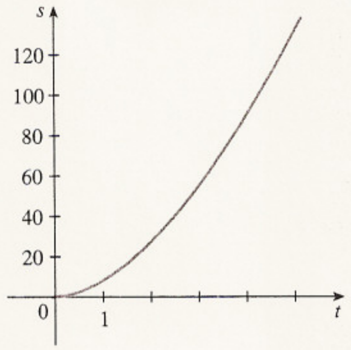
38–40 □ Encontre a derivada dada achando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

38. $D^{99} \text{sen}\ x$

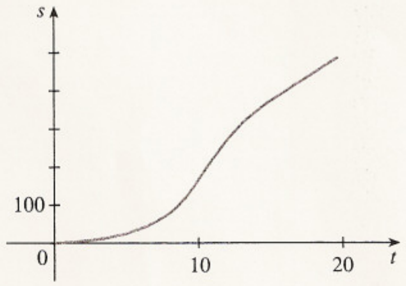
39. $D^{50} \cos 2x$

40. $D^{1000} xe^{-x}$

41. Um carro inicia do repouso, e o gráfico de sua função posição está mostrado na figura, onde s é medida em pés e t em segundos. Use-o para fazer o gráfico da velocidade e estime a aceleração em $t = 2$ segundos do gráfico da velocidade. Então esboce um gráfico da função aceleração.



42. (a) O gráfico de uma função posição de um carro é mostrado, onde s é medida em pés e t em segundos. Use-o para fazer o gráfico da velocidade e da aceleração do carro. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o arranco em $t = 10$ segundos. Quais são as unidades para o arranco?

43–46 □ A equação do movimento é dada por uma partícula, onde s está em metros e t em segundos. Encontre (a) a velocidade e a aceleração como funções em t, (b) a aceleração depois de 1 segundo e (c) a aceleração no instante em que a velocidade é 0.

43. $s = t^3 - 3t$

44. $s = t^2 - t + 1$

45. $s = \text{sen}\ 2\pi t$

46. $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$

47–48 □ Uma equação do movimento é dada, onde s está em metros e t em segundos. Encontre (a) o instante em que a aceleração é 0 e (b) o deslocamento e a velocidade nesse instante.

47. $s = t^4 - 4t^3 + 2$

48. $s = 2t^3 - 9t^2$

49. Uma partícula move-se de acordo com uma lei do movimento $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, $t \geq 0$, onde t está medido em segundos e s em metros.
(a) Encontre a aceleração no instante t e depois de 3 s.
(b) Faça o gráfico das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leq t \leq 8$.
(c) Quando a partícula está aumentando a rapidez? E quando está diminuindo?

50. Uma partícula move-se ao longo do eixo x, sua posição no instante t dado por $x(t) = t/(1 + t^2)$, $t \geq 0$, onde t está medido em segundos e x em metros.
(a) Encontre a aceleração no instante t. Quando ela está em 0?
(b) Faça o gráfico das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leq t \leq 4$.
(c) Quando a partícula está aumentando a rapidez? E quando está diminuindo?

51. Uma massa atada a uma mola vertical tem função posição dada por $y(t) = A \operatorname{sen} \omega t$, onde A é a amplitude de sua oscilação e ω é uma constante.
(a) Encontre a velocidade e aceleração como função do tempo.
(b) Mostre que a aceleração é proporcional ao deslocamento de y.
(c) Mostre que a velocidade é máxima quando a aceleração é 0.

52. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com deslocamento $s(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$. Mostre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique a diferença entre os significados das derivadas dv/dt e dv/ds.

53. Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

54. Encontre um polinômio de terceiro grau Q tal que $Q(1) = 1$, $Q'(1) = 3$, $Q''(1) = 6$ e $Q'''(1) = 12$.

55. A equação $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$ é chamada de **equação diferencial**, pois envolve a função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre as constantes A e B tal que sua função $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ satisfaça essa equação. (Equações diferenciais serão estudadas em detalhes no Capítulo 9 do Volume 2.)

56. Encontre as constantes A, B e C tal que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça a equação diferencial $y'' + y' - 2y = x^2$.

57. Para que valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$?

58. Encontre os valores de λ para os quais $y = e^{\lambda x}$ satisfaz a equação $y + y' = y''$.

59–61 □ A função g é uma função duas vezes diferenciável. Encontre f'' em termos de g, g' e g''.

59. $f(x) = xg(x^2)$

60. $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

61. $f(x) = g(\sqrt{x})$

62. Se $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 5$, faça os gráficos de f e f''. Em quais intervalos $f''(x) > 0$? Nesses intervalos, como está relacionado o gráfico de f a suas retas tangentes? O que acontece nos intervalos onde $f''(x) < 0$?

63. (a) Compute algumas das primeiras derivadas da função $f(x) = 1/(x^2 + x)$ até ver que os cálculos ficam algebricamente intratáveis.
(b) Use a identidade

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

para computar as derivadas mais facilmente. Então encontre uma expressão para $f^{(n)}(x)$. Esse método de dividir uma fração em termos de frações mais simples, chamado de *frações parciais*, será visto com mais detalhes na Seção 7.4.

64. (a) Se $F(x) = f(x)g(x)$, onde f e g têm derivadas de todas as ordens, mostre que

$$F'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

(b) Encontre fórmulas similares para F''' e $F^{(4)}$.
(c) Conjecture uma fórmula para $F^{(n)}$.

65. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g são funções duas vezes diferenciáveis, mostre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

66. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g possuem derivadas terceiras, encontre uma fórmula para d^3y/dx^3 similar à dada no Exercício 65.

Portanto

5 $$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e}$$

A Fórmula 5 está ilustrada pelo gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$ da Figura 4 e na tabela para valores pequenos de x. Isso ilustra o fato de que, correto até a sétima casa decimal,

$$e \approx 2{,}7182818$$

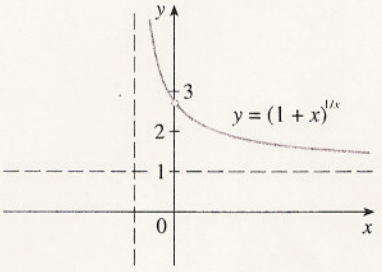


FIGURA 4

x	$(1 + x)^{1/x}$
0,1	2,59374246
0,01	2,70481383
0,001	2,71692393
0,0001	2,71814593
0,00001	2,71826824
0,000001	2,71828047
0,0000001	2,71828169
0,00000001	2,71828181

Se colocarmos $n = 1/x$ na Fórmula 5, então $n \to \infty$ quando $x \to 0^+$, e uma expressão alternativa para e é

6 $$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.8 Exercícios

1. Explique por que a função logaritmo natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–20 □ Diferencie a função.

2. $f(x) = \ln(2 - x)$
3. $f(\theta) = \ln(\cos \theta)$
4. $f(x) = \cos(\ln x)$
5. $f(x) = \log_3(x^2 - 4)$
6. $f(x) = \log_{10}\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)$
7. $F(x) = \ln \sqrt{x}$
8. $G(x) = \sqrt[3]{\ln x}$
9. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$
10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$
11. $g(x) = \ln \dfrac{a - x}{a + x}$
12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
13. $F(x) = e^x \ln x$
14. $h(y) = \ln(y^3 \operatorname{sen} y)$
15. $y = \dfrac{\ln x}{1 + x}$
16. $y = (\ln \operatorname{tg} x)^2$
17. $y = \ln |x^3 - x^2|$
18. $G(u) = \ln \sqrt{\dfrac{3u + 2}{3u - 2}}$
19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
20. $y = \ln(x + \ln x)$

21–24 □ Encontre y' e y''.

21. $y = x \ln x$
22. $y = \ln(1 + x^2)$
23. $y = \log_{10} x$
24. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

25–28 □ Diferencie f e encontre o domínio de f.

25. $f(x) = \ln(2x + 1)$

26. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

27. $f(x) = x^2 \ln(1 - x^2)$

28. $f(x) = \ln \ln \ln x$

29. Se $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, encontre $f'(e)$.

30. Se $f(x) = x^2 \ln x$, encontre $f'(1)$.

31–32 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

31. $y = \ln \ln x$, $(e, 0)$

32. $y = \ln(x^2 + 1)$, $(1, \ln 2)$

33. Se $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

34. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e suas retas tangentes.

35–46 □ Use a diferenciação logarítmica para achar a derivada de função.

35. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

36. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

37. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \ \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

38. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

39. $y = x^x$

40. $y = x^{1/x}$

41. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

42. $y = (\operatorname{sen} x)^x$

43. $y = (\ln x)^x$

44. $y = x^{\ln x}$

45. $y = x^{e^x}$

46. $y = (\ln x)^{\cos x}$

47. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

48. Encontre y' se $x^y = y^x$.

49. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

50. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

51. Use a definição da derivada para provar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

52. Mostre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

3.9 Funções Hiperbólicas

Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem freqüentemente em matemática e suas aplicações, e por isso merecem nomes especiais. Elas são análogas de muitas formas às funções trigonométricas, e têm a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. Por essa razão são chamadas de **funções hiperbólicas**, particularmente **seno hiperbólico, cosseno hiperbólico** e assim por diante.

Definições de Funções Hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Os gráficos do seno e cosseno hiperbólico podem ser esboçados usando-se um recurso gráfico como nas Figuras 1 e 2.