3.1 Exercícios

1. (a) Como o número e está definido?
   (b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites
$$\lim_{h\to 0}\frac{2{,}7^h-1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{2{,}8^h-1}{h}$$
   corretos até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, a mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato permite você fazer isso?
   (b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de diferenciação para f e g.
   (c) Quais das funções da parte (b) crescem mais rapidamente quando x é muito grande?

3–28 □ Diferencie a função.

3. $f(x) = 5x - 1$
4. $F(x) = -4x^{10}$
5. $f(x) = x^2 + 3x - 4$
6. $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$
7. $y = x^{-2/5}$
8. $y = 5e^x + 3$
9. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
10. $R(t) = 5t^{-3/5}$
11. $Y(t) = 6t^{-9}$
12. $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$
13. $F(x) = (16x)^3$
14. $y = \sqrt[3]{x}$
15. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
16. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
17. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$
18. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$
19. $y = 3x + 2e^x$
20. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$
21. $y = 4\pi^2$
22. $y = x^{4/3} - x^{2/3}$
23. $y = ax^2 + bx + c$
24. $y = A + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2}$
25. $y = x + \sqrt[5]{x^2}$
26. $u = \sqrt[3]{t^2} + 2\sqrt{t^3}$
27. $v = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$
28. $y = e^{x+1} + 1$

29–34 □ Ache $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

29. $f(x) = 2x^2 - x^4$
30. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$
31. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$
32. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
33. $f(x) = x - 3x^{1/3}$
34. $f(x) = x^2 + 2e^x$

35. (a) Dando um *zoom* no gráfico de $f(x) = x^{2/5}$, estime o valor de $f'(2)$.
    (b) Use a Regra da Potência para achar o valor exato de $f'(2)$, e estime o valor de $f'(1)$.

36. (a) Dando um *zoom* no gráfico de $f(x) = x^2 - 2e^x$, estime o valor de $f'(1)$.
    (b) Ache o valor exato de $f'(1)$ e compare com sua estimativa da parte (a).

37–40 □ Ache uma equação da reta tangente à curva no ponto dado. Ilustre fazendo o gráfico da curva e a reta tangente sobre a mesma tela.

37. $y = x + \dfrac{4}{x}$, $(2, 4)$
38. $y = x^{5/2}$, $(4, 32)$
39. $y = x + \sqrt{x}$, $(1, 2)$
40. $y = x^2 + 2e^x$, $(0, 2)$

41. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ em uma janela retangular [-3, 5] por [-10, 50].
    (b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço rudimentar, a mão, do gráfico de f' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.9).
    (c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão com um recurso gráfico, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

42. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular [-1, 4] por [-8, 8].
    (b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar a inclinação, faça um esboço rudimentar, a mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.9).
    (c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com um recurso gráfico, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

43. Ache os pontos sobre a curva $y = x^3 - x^2 - x + 1$ onde a tangente é horizontal.

44. Quais são os valores de x que fazem com que o gráfico $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ tenha tangentes horizontais?

45. Mostre que a curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ não tem reta tangente com inclinação 4.

46. Em quais pontos sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ está a reta tangente paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e ambas as retas.

47. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passa através do ponto (0, – 4). Ache as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes intersectam a parábola.

CÁLCULO 1 - Profª ANA PAULA

DERIVADA - REGRAS

LISTA 4

48. Ache a equação das retas que passam pelo ponto (2, -3) que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.

49. A **reta normal** à curva C em um ponto P é, pela definição, a reta que passa por P e é perpendicular à reta tangente a C em P. Ache uma equação da reta normal à parábola $y = 1 - x^2$ no ponto $(2, -3)$. Esboce a parábola e sua reta normal.

50. Onde a reta normal à parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ intercepta a parábola duas vezes? Ilustre com um esboço.

51. Use a definição de uma derivada para mostrar que se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso prova a Regra da Potência para o caso onde $n = -1$.)

52. Ache uma parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tenha uma equação $y = 3x - 2$.

53. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Responda: f é diferenciável em 1? Esboce os gráficos de f e f'.

54. Em quais números a seguinte função g é diferenciável?

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

55. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é diferenciável? Ache uma fórmula para f'.
(b) Esboce os gráficos de f e f'.

56. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é diferenciável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

57. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

58. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Ache os valores de m e b que faça f diferenciável em toda parte.

59. Ache uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tem tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

60. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.
(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta corta a partir dessa reta tangente pelo eixo coordenado é P.
(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e os eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

61. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

62. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

3.2 As Regras do Produto e do Quociente

As fórmulas desta seção nos permitem diferenciar novas funções formadas a partir das antigas funções por multiplicação ou divisão.

A Regra do Produto

Por analogia com as Regras da Soma e Diferença, alguém poderia tentar conjecturar, como Leibniz fez três séculos atrás, que a derivada de um produto é o produto da derivada. Podemos ver, contudo, que a conjectura acima está errada examinando um exemplo particular. Seja $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Então a Regra do Produto fornece $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2x$. Mas $(fg)(x) = x^3$, assim $(fg)'(x) = 3x^2$. Assim, $(fg)' \neq f'g'$. A fórmula correta foi descoberta por Leibniz (logo depois de tentar a fórmula falsa) e é chamada de Regra do Produto.

Depois de formular a Regra do Produto, vamos ver como poderíamos descobri-lo. No caso onde $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são funções positivas, podemos interpretar o produto uv como uma área de um triângulo (veja a Figura 1). Se x variar uma quantidade Δx, temos a variação correspondente em u e v como se segue

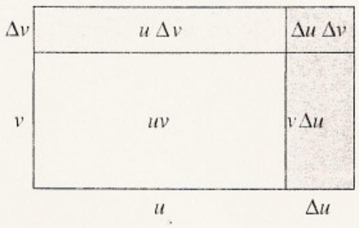


FIGURA 1
A geometria da Regra do Produto.

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e um novo valor do produto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, pode ser interpretado como a área do maior triângulo da Figura 1 (com Δu e Δv positivos).

3.2 Exercícios

1. Encontre a derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de duas maneiras: usando a Regra do Produto e fazendo primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

2. Encontre a derivada da função

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

de duas maneiras: usando a Regra do Quociente e simplificando primeiro. Mostre que suas respostas são equivalentes. Qual método você prefere?

3–22 □ Diferencie.

3. $f(x) = x^2 e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

8. $f(u) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$

9. $G(s) = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$

10. $g(x) = (1 + \sqrt{x})(x - x^3)$

11. $H(x) = (x^3 - x + 1)(x^{-2} + 2x^{-3})$

12. $H(t) = e^t(1 + 3t^2 + 5t^4)$

13. $y = \dfrac{3t - 7}{t^2 + 5t - 4}$

14. $y = \dfrac{4t + 5}{2 - 3t}$

15. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

16. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

17. $y = (r^2 - 2r)e^r$

18. $y = \dfrac{u^2 - u - 2}{u + 1}$

19. $y = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

20. $y = \dfrac{e^x}{x + e^x}$

21. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

22. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

23–26 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva em um dado ponto.

23. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

24. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0{,}4)$

25. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

26. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

27. (a) A curva $y = 1/(1 + x^2)$ é chamada de **bruxa de Maria de Agnesi**. Encontre uma equação da reta tangente para essa curva no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

28. (a) A curva $y = x/(1 + x^2)$ é chamada de **serpentina**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(3, 0{,}3)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

29. (a) Se $f(x) = e^x/x^3$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

30. (a) Se $f(x) = x/(x^2 - 1)$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

31. Suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os valores de (a) $(fg)'(5)$, (b) $(f/g)'(5)$ e (c) $(g/f)'(5)$.

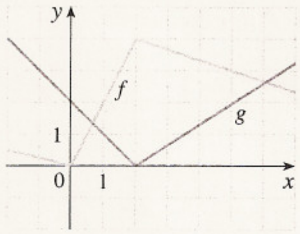
32. Se $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$ e $g'(3) = 5$, encontre os seguintes números:
(a) $(f + g)'(3)$
(b) $(fg)'(3)$
(c) $(f/g)'(3)$
(d) $\left(\dfrac{f}{f - g}\right)'(3)$

33. Se $f(x) = e^x g(x)$, onde $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)$.

34. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre

$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\right|_{x=2}$$

35. Se f e g forem funções cujos gráficos estão ilustrados, seja $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encontre $u'(1)$.
(b) Encontre $v'(5)$.



36. Se f for uma função diferenciável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções:
(a) $y = x^2 f(x)$
(b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$
(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$
(d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

37. Neste exercício estimamos a taxa segundo a qual a renda pessoal total está subindo na área metropolitana de uma dada cidade. Em julho de 1993, a população dessa área era de 3.354.000, e estava crescendo aproximadamente em 45.000 pessoas por ano. O rendimento anual médio era de \$ 21.107 por pessoa, e essa média estava crescendo em torno de \$ 1900 por ano (bem acima da média nacional, de cerca de \$ 660 anuais). Use a

Resumo

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física; a taxa de reação e a compressibilidade na química; a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia; o custo e o lucro marginal na economia; a taxa do fluxo do calor na geologia; a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia; a taxa de espalhamento de um boato na sociologia – todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Isto é uma ilustração do fato de que parte do poder da matemática está em sua abstração. Um único conceito matemático abstrato (tal como a derivada) pode ter interpretações diferentes em cada uma das ciências. Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados para todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver propriedades de conceitos especiais separadas para cada ciência. O matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) colocou isso sucintamente: "Os matemáticos comparam os mais diversos fenômenos e descobrem as analogias secretas que os unem".

3.3 Exercícios

1–6 □ Uma partícula move-se segundo a lei do movimento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, onde t é medido em segundos e s em pés.
(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Qual a velocidade depois de 3 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo no sentido positivo?
(e) Encontre a distância total percorrida durante os 8 primeiros segundos.
(f) Desenhe um diagrama como na Figura 2 para ilustrar o movimento da partícula.

1. $f(t) = t^2 - 10t + 12$
2. $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 10$
3. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$
4. $f(t) = t^4 - 4t + 1$
5. $s = \dfrac{t}{t^2 + 1}$
6. $s = \sqrt{t}(3t^2 - 35t + 90)$

7. A função posição de uma partícula é dada por
$$s = t^3 - 4{,}5t^2 - 7t \qquad t \geqslant 0$$
Quando a partícula atinge a velocidade de 5 m/s?

8. Se uma bola for atirada verticalmente para cima com velocidade de 80 pés/s, então sua altura depois de t segundos é $s = 80t - 16t^2$.
(a) Qual a altura máxima atingida pela bola?
(b) Qual a velocidade da bola quando estiver 96 pés acima do solo na subida?

9. (a) Uma companhia produz chips de computador. Ela quer manter o comprimento do lado da placa muito próximo de 15 mm e deseja saber como a área $A(x)$ da placa varia quando mudamos o comprimento do lado. Encontre $A'(15)$ e explique seu significado nessa situação.
(b) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado em relação ao comprimento de seu lado é a metade de seu perímetro. Tente explicar geometricamente por que isso é verdade desenhando um quadrado cujo comprimento de lado x é aumentado em Δx. Como aproximar as mudanças resultantes na área ΔA se Δx for pequeno?

10. (a) Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo a uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x, calcule dV/dx quando $x = 3$ mm e explique seu significado.
(b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual à metade da área da superfície do cubo. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro mostrando um argumento análogo ao do Exercício 9(b).

11. (a) Encontre a taxa de variação média da área de um círculo em relação a seu raio r quando r varia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2,5 (iii) 2 a 2,1
(b) Encontre a taxa de variação instantânea quando $r = 2$.
(c) Mostre que a taxa de variação da área de um círculo em relação a seu raio (para qualquer r) é igual à circunferência do círculo. Tente explicar geometricamente por que isso é verdadeiro desenhando um círculo cujo raio foi aumentado em Δr. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δr for pequeno?

12. Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce para fora a uma velocidade de 60 cm/s. Encontre a taxa segundo a qual a área dentro do círculo está crescendo depois de (a) 1 s, (b) 3 s e (c) 5 s. O que você pode concluir?

13. Um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio r quando r é (a) 1 pé, (b) 2 pés e (c) 3 pés. Que conclusão você pode tirar?

14. (a) O volume de uma célula esférica em crescimento é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde o raio r é medido em micrômetros ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Encontre a taxa de variação média de V em relação a r quando r varia de
(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5,1 μm
(b) Encontre a taxa de variação instantânea de V em relação a r quando $r = 5\ \mu$m.
(c) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação a seu raio é igual à área de sua superfície. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro. Mostre um argumento análogo ao do Exercício 11(c).

15. A massa da parte de uma barra de metal que está situada entre o extremo esquerdo e um ponto x metros à direita é $3x^2$ kg. Encontre a densidade linear (veja o Exemplo 2) quando x for (a) 1 m, (b) 2 m e (c) 3 m. Onde a densidade é maior? E menor?

16. Se um tanque mantém 5000 galões de água, que escoa pelo fundo em 40 minutos, então a Lei de Torricelli dá o volume V de água que restou no tanque depois de t minutos como

$$V = 5000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está escoando do tanque depois de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min e (d) 40 min. Em que instante o fluxo é mais rápido? E mais vagaroso? Resuma o que você encontrou.

17. A quantidade de carga Q em coloumbs (C) que passa através de um ponto em um fio até o instante t (medido em segundos) é dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encontre a corrente quando (a) $t = 0{,}5$ s e (b) $t = 1$ s. [Veja o Exemplo 3. A unidade de corrente é o ampère (1 A = 1 C/s).] Em que instante a corrente é mais baixa?

18. A Lei de Gravitação de Newton diz que a magnitude F da força exercida por um corpo de massa m sobre um corpo de massa M é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional e r é a distância entre os corpos.
(a) Se os corpos estão se movendo, encontre dF/dr e explique seu significado. O que o sinal de menos indica?
(b) Suponha sabido que a Terra atrai um objeto com uma força que decresce a uma taxa de 2 N/km quando $r = 20.000$ km. O quão rápido essa força varia quando $r = 10.000$?

19. A Lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e o volume permanece constante: $PV = C$.
(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à pressão.
(b) Uma amostra de gás está em um recipiente a baixa pressão e é regularmente comprimida a temperatura constante por 10 minutos. O volume decresce mais rapidamente no início ou final dos 10 minutos? Explique.
(c) Prove que a compressibilidade isotérmica (veja o exemplo 5) é dada por $\beta = 1/P$.

20. O dado na tabela diz respeito à lactonização do ácido hidroxivalérico a 25 °C. É dada a concentração $C(t)$ desse ácido em mols por litro depois de t minutos.

t	0	2	4	6	8
$C(t)$	0,0800	0,0570	0,0408	0,0295	0,0210

(a) Encontre a taxa de reação média para os seguintes intervalos de tempo:
(i) $2 \leqslant t \leqslant 6$ (ii) $2 \leqslant t \leqslant 4$ (iii) $0 \leqslant t \leqslant 2$
(b) Plote os pontos da tabela e trace por eles uma curva suave com uma aproximação ao gráfico da função concentração. Então trace a tangente em $t = 2$ e use-a para estimar a taxa de reação instantânea quando $t = 2$.

21. A tabela dá a população mundial no século XX.

Ano	População (em milhões)	Ano	População (em milhões)
1900	1650	1960	3020
1910	1750	1970	3700
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5300
1940	2300	1996	5770
1950	2520		

(a) Estime a taxa de crescimento populacional em 1920 e em 1980 fazendo a média das inclinações de duas retas secantes.
(b) Use uma calculadora gráfica ou computador para achar uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) que modela os dados (veja a Seção 1.2).
(c) Use o modelo da parte (b) para achar um modelo para a taxa de crescimento populacional no século XX.
(d) Use a parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1920 e 1980. Compare com sua estimativa da parte (a).
(e) Estime a taxa de crescimento em 1985.

22. A taxa de juros nas Letras do Tesouro dos Estados Unidos é uma função do tempo. A tabela dá valores no meio do ano dessa função $I(t)$ sobre um período de 9 anos (como uma porcentagem por ano).

t	$I(t)$	t	$I(t)$
1983	8,62	1988	6,67
1984	9,57	1989	8,11
1985	7,49	1990	7,51
1986	5,97	1991	5,41
1987	5,83	1992	3,46

SOLUÇÃO Para aplicar a Equação 2, vamos reescrever a função multiplicando e dividindo por 7:

Note que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Observe que quando $x \to 0$, temos $7x \to 0$; portanto, pela Equação 2 com $\theta = 7x$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = \lim_{7x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{7x} = 1$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

$$= \frac{7}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$

EXEMPLO 5 □ Calcule $\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$.

SOLUÇÃO Aqui vamos dividir numerador e denominador por x:

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(pela continuidade do cosseno e Equação 2)}$$

$$= 1$$

3.4 Exercícios

1–16 □ Diferencie.

1. $f(x) = x - 3 \operatorname{sen} x$
2. $f(x) = x \operatorname{sen} x$
3. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$
4. $y = \cos x - 2 \operatorname{tg} x$
5. $g(t) = t^3 \cos t$
6. $g(t) = 4 \sec t + \operatorname{tg} t$
7. $h(\theta) = \operatorname{cossec} \theta + e^{\theta} \operatorname{cotg} \theta$
8. $y = e^x \operatorname{sen} x$
9. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$
10. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$
11. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
12. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
14. $y = \operatorname{tg} \theta (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$
15. $y = \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$
16. $y = x \operatorname{sen} x \cos x$

17. Prove que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$.
18. Prove que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$.
19. Prove que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.
20. Prove, usando a definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

21. $y = \operatorname{tg} x$, $(\pi/4, 1)$
22. $y = 2 \operatorname{sen} x$, $(\pi/6, 1)$
23. $y = x + \cos x$, $(0, 1)$
24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$, $(0, 1)$

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x \cos x$ no ponto $(\pi, -\pi)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

26. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \sec x - 2 \cos x$ no ponto $(\pi/3, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

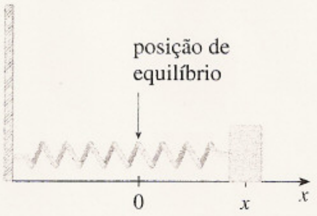
27. (a) Se $f(x) = 2x + \operatorname{cotg} x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos f e f' para $0 < x < \pi$.

28. (a) Se $f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

29. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tenha uma reta horizontal?

30. Encontre os pontos sobre a curva $y = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x)$ na qual a tangente é horizontal.

31. Uma massa em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, onde t está em segundos e x em centímetros.
(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Encontre a posição e a velocidade da massa no instante $t = 2\pi/3$. Em que sentido ela está se movendo nesse instante?



32. Uma faixa elástica é pendurada em um gancho e uma massa está presa na extremidade inferior da faixa. Quando a massa é puxada para baixo e então solta, ela vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2 \cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, onde s é medida em centímetros e t em segundos. (Consideramos o sentido positivo como sendo para baixo.)
(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Faça os gráficos das funções velocidade e posição.
(c) Quando a massa passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?
(d) A que distância da posição de equilíbrio a massa chega?
(e) Quando a velocidade é máxima?

33. Uma escada com 10 pés de comprimento está apoiada numa parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede, e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

34. Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a magnitude da força é

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.
(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.
(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?
(c) Se $W = 50$ lb e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para localizar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b).

35–44 □ Encontre o limite.

35. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{t}$

36. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 8t}{\operatorname{sen} 9t}$

37. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos \theta)}{\sec \theta}$

38. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

39. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cossec} x}$

42. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos 2x}$ $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ $(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)$

43. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \operatorname{tg} \theta}$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$ $(x-1)(x+2)$

45. Diferencie cada identidade trigonométrica para obter outra nova ou antiga.
(a) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

46. O semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, Assim, se denotarmos por ε a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada obteremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Mas $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Assim, para uma função diferenciável f podemos escrever

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{onde} \quad \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0$$

Essa propriedade de funções diferenciáveis é que nos possibilita provar a Regra da Cadeia.

Prova da Regra da Cadeia Suponha que $u = g(x)$ é diferenciável em a e $y = f(u)$ é diferenciável em $b = g(a)$. Se Δx for um incremento de x e Δu e Δy forem os incrementos correspondentes em u e y, então poderemos usar a Equação 7 para escrever

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Da mesma forma

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

onde $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta u \to 0$. Se substituirmos agora a expressão para Δu da Equação 8 na Equação 9, obteremos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

logo $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Quando $\Delta x \to 0$, a Equação 8 mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ como $\Delta x \to 0$. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Isso prova a Regra da Cadeia.

3.5 Exercícios

1–6 Escreva na forma $f(g(x))$ a função composta. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então encontre a derivada dy/dx.

1. $y = (x^2 + 4x + 6)^5$
2. $y = \text{tg } 3x$
3. $y = \cos(\text{tg } x)$
4. $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$
5. $y = e^{\sqrt{x}}$
6. $y = \text{sen}(e^x)$

7–42 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$
8. $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$
9. $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$
10. $f(t) = \dfrac{1}{(t^2 - 2t - 5)^4}$
11. $h(t) = \left(t - \dfrac{1}{t}\right)^{3/2}$
12. $f(t)\ \text{tg}\ \sqrt[3]{1 + \text{tg } t}$
13. $y = \cos(a^3 + x^3)$
14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = e^{-mx}$

16. $y = 4 \sec 5x$

17. $G(x) = (3x - 2)^{10}(5x^2 - x + 1)^{12}$

18. $g(t) = (6t^2 + 5)^3(t^3 - 7)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = xe^{-x^2}$

22. $y = e^{-5x} \cos 3x$

23. $F(y) = \left(\dfrac{y - 6}{y + 7}\right)^3$

24. $s(t) = \sqrt[4]{\dfrac{t^3 + 1}{t^3 - 1}}$

25. $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2z - 1}}$

26. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{7 - 3x}}$

27. $y = \operatorname{tg}(\cos x)$

28. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

29. $y = 5^{-1/x}$

30. $y = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}$

31. $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$

32. $y = \operatorname{sen}^2(\cos kx)$

33. $y = (1 + \cos^2 x)^6$

34. $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

35. $y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^x}$

36. $y = e^{5 \operatorname{sen} \theta}$

37. $y = e^{x \cos x}$

38. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

39. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

40. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

41. $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg} \sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$

42. $y = 2^{3^{x^2}}$

43–46 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

43. $y = \dfrac{8}{\sqrt{4 + 3x}}$, $(4, 2)$

44. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$, $(\pi/6, 1)$

45. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

46. $y = 10^x$, $(1, 10)$

47. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ no ponto $(0, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

48. (a) A curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ é chamada de **curva ponta de bala**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

49. (a) Se $f(x) = \sqrt{1 - x^2}/x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

50. (a) Se $f(x) = 1/(\cos^2 \pi x + 9 \operatorname{sen}^2 \pi x)$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

51. Encontre todos os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

52. Encontre as coordenadas x de todos os pontos sobre a curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$ em que a reta tangente é horizontal.

53. Suponha que $F(x) = f(g(x))$ e $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ e $f'(6) = 7$. Encontre $F'(3)$.

54. Suponha que $w = u \circ v$ e $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $u'(0) = 3$, $u'(2) = 4$, $v'(0) = 5$ e $v'(2) = 6$. Encontre $w'(0)$.

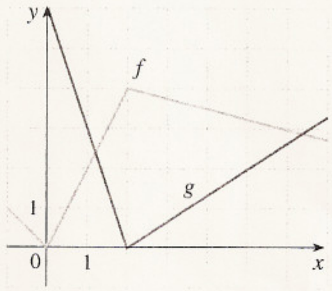
55. É dada uma tabela de valores para f, g, f' e g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

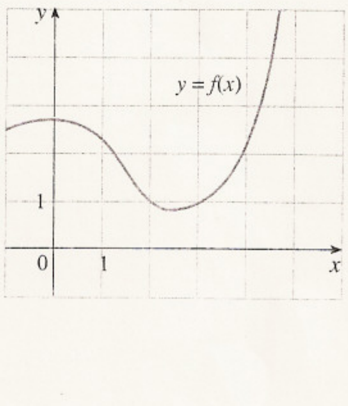
(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.
(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

56. Sejam f e g as funções do Exercício 55.
(a) Se $F(x) = f(f(x))$, encontre $F'(2)$.
(b) Se $G(x) = g(g(x))$, encontre $G'(3)$.

57. Se f e g forem as funções cujos gráficos estão mostrados, seja $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



58. Se f for a função cujo gráfico está mostrado, seja $h(x) = f(f(x))$ e $g(x) = f(x^2)$. Use o gráfico de f para estimar o valor de cada uma das derivadas.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



59. Use a tabela para estimar o valor de $h'(0,5)$, onde $h(x) = f(g(x))$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	12,6	14,8	18,4	23,0	25,9	27,5	29,1
$g(x)$	0,58	0,40	0,37	0,26	0,17	0,10	0,05

60. Se $g(x) = f(f(x))$, use a tabela para estimar o valor de $g'(1)$.

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$f(x)$	1,7	1,8	2,0	2,4	3,1	4,4

61. Suponha que f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

62. Suponha que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e α é um número real. Seja $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

63. O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}(10\pi t)$$

onde s é medido em centímetros e t em segundos. Encontre a velocidade da partícula após t segundos.

64. Se a equação de movimento de uma partícula for dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, dizemos que a partícula está em um *movimento harmônico simples*.
(a) Encontre a velocidade da partícula no instante t.
(b) Quando a velocidade é zero?

65. A Cefeu é uma constelação cujo brilho é variável. A estrela mais visível dessa constelação é a Delta Cefeu, para a qual o intervalo de tempo entre brilhos máximos é de 5,4 dias. O brilho médio dessa estrela é 4,0, com uma variação de $\pm 0{,}35$. Em vista desses dados, o brilho de Delta Cefeu no instante t, onde t é medido em dias, foi modelado pela função

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35\,\text{sen}(2\pi t/5{,}4)$$

(a) Encontre a taxa de variação do brilho após t dias.
(b) Encontre, correta até duas casas decimais, a taxa de crescimento após 1 dia.

66. No Exemplo da Seção 1.3 chegamos a um modelo para duração da luz do dia (em horas) na Filadélfia no t-ésimo dia do ano:

$$L(t) = 12 + 2{,}8\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use esse modelo para comparar como o número de horas da duração da luz do dia está crescendo na Filadélfia em 21 de março e 21 de maio.

67. O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito ou a uma força de amortecimento (tal como amortecedor em um carro) é freqüentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno ou cosseno. Suponha que a equação de movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-1{,}5t}\,\text{sen}\,2\pi t$$

onde s é medida em centímetros e t em segundos. Encontre a velocidade após t segundos e faça o gráfico das funções posição e velocidade para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

68. Sobre certas circunstâncias um boato se espalha de acordo com a equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no instante t, e a e k são constantes positivas [na Seção 9.5 veremos que esta é uma equação razoável para $p(t)$].
(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.
(b) Encontre a taxa de espalhamento do boato.
(c) Faça o gráfico de p para o caso $a = 10$, $k = 0{,}5$, onde t é medido em horas. Use o gráfico para estimar quanto tempo será necessário para o boato atingir 80% da população.

69. O *flash* de uma câmera estoca carga em um capacitor e a dispara instantaneamente quando ativado. Os dados a seguir descrevem a carga remanescente no capacitor (medida em microcoulombs, μC) no instante t (medido em segundos).

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar um modelo exponencial para a carga (veja a Seção 1.2).
(b) A derivada $Q'(t)$ representa a corrente elétrica (medida em microampères, μA) que flui do capacitor para a lâmpada do *flash*. Use a parte (a) para estimar a corrente quando $t = 0{,}04$ s. Compare com o resultado do Exemplo 2 na Seção 2.1.

70. A tabela fornece a população dos Estados Unidos de 1790 a 1860.

Ano	População	Ano	População
1790	3.929.000	1830	12.861.000
1800	5.308.000	1840	17.063.000
1810	7.240.000	1850	23.192.000
1820	9.639.000	1860	31.443.000

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para ajustar uma função exponencial aos dados. Faça um gráfico dos pontos dados e do modelo exponencial. Qual a qualidade do ajuste?
(b) Estime as taxas de crescimento populacional em 1800 e