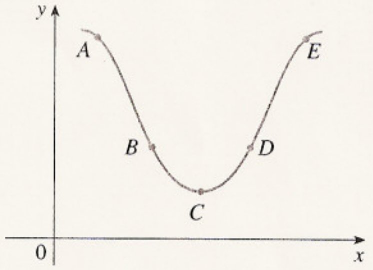
2.7 Exercícios

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
   (a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
   (b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Considere um objeto movendo-se com uma função posição $s = f(t)$.
   (a) Escreva uma expressão para a velocidade média dele no intervalo de tempo desde $t = a$ até $t = a + h$.
   (b) Escreva uma expressão para a velocidade instantânea dele no tempo $t = a$.

3. Considere a inclinação da curva em cada um dos cinco pontos dados. Classifique-os em ordem decrescente e explique seu raciocínio.



4. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5, 0{,}5]$ por $[0{,}5, 1{,}5]$ e $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[0{,}9, 1{,}1]$. Dando um *zoom* em direção ao ponto $(0, 1)$, o que você nota em $(0, 1)$?

5. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = x^2 + 2x$ no ponto $(-3, 3)$
   (i) usando a Definição 1
   (ii) usando a Definição 2
   (b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
   (c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(-3, 3)$ até que parábola e a reta tangente fiquem não distinguíveis.

6. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto $(-1, -1)$
   (i) usando a Definição 1
   (ii) usando a Definição 2
   (b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
   (c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em retângulos cada vez menores centrados no ponto $(-1, -1)$ até que a curva e a tangente fiquem não distinguíveis.

7–10 □ Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

7. $y = 1 - 2x - 3x^2$, $(-2, -7)$
8. $y = 1/\sqrt{x}$, $(1, 1)$
9. $y = 1/x^2$, $(-2, \frac{1}{4})$
10. $y = x/(1 - x)$, $(0, 0)$

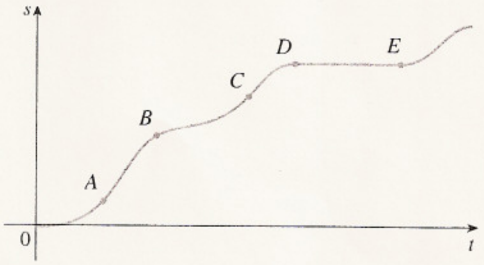
11. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 2/(x + 3)$ no ponto onde $x = a$.
   (b) Encontre as inclinações das retas tangentes nos pontos cujas coordenadas x são (i) -1, (ii) 0 e (iii) 1.

12. (a) Encontre a inclinação da tangente à parábola $y = 1 + x + x^2$ no pontos onde $x = a$.
   (b) Encontre as inclinações das retas tangentes nos pontos cujas coordenadas x são (i) -1, (ii) $-\frac{1}{2}$ e (iii) 1.
   (c) Faça o gráfico da curva e das três retas tangentes em uma tela em comum.

13. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = x^3 - 4x + 1$ no ponto onde $x = a$.
   (b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, -2)$ e $(2, 1)$.
   (c) Faça o gráfico da curva e das tangentes em uma tela em comum.

14. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{5 - 2x}$ no ponto onde $x = a$.
   (b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(2, 1)$ e $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$.
   (c) Faça o gráfico da curva e das tangentes em uma tela em comum.

15. O gráfico ilustra a função posição de um carro. Use a forma do gráfico para explicar sua resposta para as seguintes questões.
   (a) Qual a velocidade inicial do carro?
   (b) O carro está mais rápido em B ou em C?
   (c) O carro está aumentando ou diminuindo a rapidez em A, B e C?
   (d) O que aconteceu entre D e E?



16. Valéria dirige em uma auto-estrada. Esboce o gráfico da função posição do carro, se ela dirigir da seguinte maneira: no instante $t = 0$, o carro está no ponto onde o marcador de milhas mostra 15 e viaja a uma velocidade constante de 50 milhas por hora. Continua com essa velocidade por exatamente 1 hora. Então gradualmente o carro vai diminuindo a velocidade em um período de 2 minutos, quando Valéria pára para jantar. O jantar dura 26 minutos, e então ela recomeça a viagem aumentando gradualmente a velocidade até 65 milhas por hora, num período de 2 minutos. Ela dirige a 65 milhas por hora por 2 horas e então, num período de 3 minutos, gradualmente pára completamente o carro.

CÁLCULO 1 - Profª ANA PAULA

DERIVADA

LISTA 3

17. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 40 pés/s, sua altura (em pés) depois de t segundos é dada por $y = 40t - 16t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

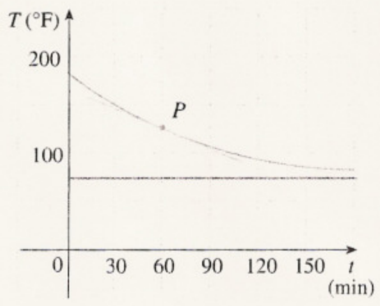
18. Se uma flecha é atirada para cima sobre a superfície da Lua com uma velocidade de 58 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 58t - 0{,}83t^2$.
(a) Encontre a velocidade da flecha após 1 segundo.
(b) Encontre a velocidade da flecha quando $t = a$.
(c) Quando a flecha volta para a Lua?
(d) Com que velocidade ela atinge a Lua?

19. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo da reta é dado pela equação do movimento $s = 4t^3 + 6t + 2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula no instante $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

20. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo da reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos.
(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:
(i) [3, 4] (ii) [3,5, 4]
(iii) [4, 5] (iv) [4, 4,5]
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.
(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações sejam as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação seja a velocidade instantânea da parte (b).

21. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor do que a taxa de variação após 1 hora?

22. Um peru assado é tirado do forno quando sua temperatura atinge 185 °F e colocado sobre uma mesa na sala, onde a temperatura é de 75 °F. O gráfico mostra como decresce a temperatura do peru até que se aproxime da temperatura da sala. (Na Seção 9.4 poderemos usar a Lei do Resfriamento de Newton para encontrar uma equação para T como uma função do tempo.)



Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.

23. (a) Use os dados do Exemplo 5 para achar a taxa média da mudança da temperatura em relação ao tempo
(i) das 8 horas da noite às 11 horas da noite.
(ii) das 8 horas da noite às 10 horas da noite.
(iii) das 8 horas da noite às 9 horas da noite.
(b) Estime a taxa instantânea da variação de T em relação ao instante 8 horas da noite medindo a inclinação de uma tangente.

24. A população P da cidade de San José, na Califórnia, de 1991 a 1997, é dada na tabela (em milhares).

Ano	1991	1993	1995	1997
P	793	820	839	874

(a) Encontre a taxa média do crescimento
(i) de 1991 a 1995
(ii) de 1993 a 1995
(iii) de 1995 a 1997
Em cada caso, inclua as unidades.
(b) Estime a taxa instantânea de crescimento em 1995 tomando a média de duas taxas médias da variação. Quais são suas unidades?
(c) Estime a taxa instantânea de crescimento em 1995 medindo a inclinação de uma tangente.

25. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5000 + 10x + 0{,}05x^2$.
(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$
(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado de *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.3.)

26. Se um tanque cilíndrico comporta 100.000 galões de água, que podem ser escoados a partir da base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100.000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está fluindo para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 e 60 minutos, encontre a taxa do fluxo e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante está a taxa do fluxo máximo? Mínimo?

Assim, computamos os valores tabulados do quociente de diferenças (as taxas médias da variação) como a seguir:

t	$\dfrac{P(t) - P(1992)}{t - 1992}$
1988	2.625.750
1990	2.781.000
1994	2.645.000
1996	2.544.250

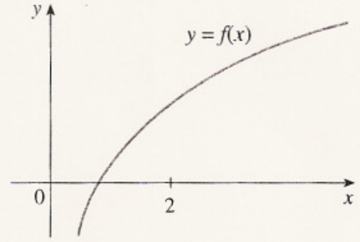
□ Outro método é plotar a função população e estimar a inclinação da reta tangente quando $t = 1992$ (veja o Exemplo 5 da Seção 2.7).

Da tabela vemos que $P'(1992)$ situa-se em algum lugar entre 2.781.000 e 2.645.000. Estimamos que a taxa de crescimento da população dos Estados Unidos em 1992 foi a média desses dois números, isto é

$$P'(1992) \approx 2{,}7 \text{ milhões de pessoas/ano}$$

2.8 Exercícios

1. Sobre um dado gráfico f, marque o comprimento que represente $f(2)$, $f(2 + h)$, $f(2 + h) - f(2)$ e h. (Escolha $h > 0$.) Qual a reta que tem inclinação $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$?

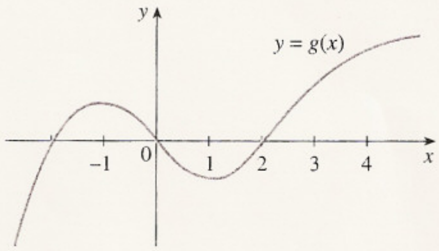


2. Para a função f cujo gráfico está ilustrado no Exercício 1, disponha os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \qquad f'(2) \qquad f(3) - f(2) \qquad \tfrac{1}{2}[f(4) - f(2)]$$

3. Para a função g cujo gráfico é dado, disponha os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



4. Se a reta tangente a $y = f(x)$ em (4. 3) passa no ponto (0, 2), encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

5. Esboce o gráfico de uma função de f para o qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

6. Esboce o gráfico de uma função g para o qual $g(0) = 0$, $g'(0) = 3$, $g'(1) = 0$ e $g'(2) = 1$.

7. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto (2, 2).

8. Se $g(x) = 1 - x^3$, encontre $g'(0)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^3$ no ponto (0, 1).

9. (a) Se $F(x) = x^3 - 5x + 1$, encontre $F'(1)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 5x + 1$ no ponto (1, –3).
   (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

10. (a) Se $G(x) = x/(1 + 2x)$, encontre $G'(a)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à curva $y = x/(1 + 2x)$ no ponto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.
    (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

11. Seja $f(x) = 3^x$. Estime o valor de $f'(1)$ de duas maneiras:
    (a) Use a Definição 2 e tome valores sucessivamente menores de h.
    (b) Dê um *zoom* sobre o gráfico de $y = 3^x$ e estime a inclinação.

12. Seja $g(x) = \text{tg } x$. Estime o valor de $g'(\pi/4)$ de duas maneiras:
    (a) Use a Definição 2 e tome valores sucessivamente menores de h.

(b) Dê um *zoom* sobre o gráfico de $y = \text{tg}\, x$ e estime a inclinação.

13–18 □ Encontre $f'(a)$.

13. $f(x) = 1 + x - 2x^2$

14. $f(x) = x^3 + 3x$

15. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

17. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3 - x}}$

18. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

19–24 □ Cada limite representa a derivada de alguma função f em algum número a. Estabeleça f e a em cada caso.

19. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

20. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

21. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x - 1}$

22. $\lim\limits_{x \to 3\pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - 3\pi}$ $f(x) = \cos x$

23. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right) - 1}{t}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{x}$

25–26 □ Uma partícula move-se ao longo de uma reta com equação do movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

25. $f(t) = t^2 - 6t - 5$

26. $f(t) = 2t^3 - t + 1$

27. O custo da produção de x onças (1 libra = 12 onças) de ouro provenientes de uma nova mina é $C = f(x)$ dólares.
(a) Qual o significado da derivada de $f'(x)$? Quais são suas unidades?
(b) O que significa $f'(800) = 17$?
(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ irão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

28. O número de bactéria depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(t)$.
(a) Qual o significado da derivada de $f'(5)$? Quais são suas unidades?
(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. O que é maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, o que afetaria sua conclusão? Explique.

29. O consumo de combustível (medido em galões por hora) de um carro viajando a uma velocidade de v milhas por hora é $c = f(v)$.
(a) Qual o significado da derivada de $f'(v)$? Quais suas unidades?
(b) Escreva uma sentença (em termos leigos) que explique o significado da equação $f'(20) = -0{,}05$.

30. A quantidade (em libras) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete a um preço de P dólares por libra é $Q = f(p)$.
(a) Qual o significado da derivada de $f'(8)$? Quais são suas unidades?
(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

31. Seja $C(t)$ o montante de moeda per capita em circulação nos Estados Unidos em um instante t. A tabela, fornecida pelo Departamento do Tesouro, dá valores de $C(t)$ em 30 de junho do ano especificado. Interprete e estime os valores de $C'(1980)$.

t	1960	1970	1980	1990
$C(t)$	\$ 177	\$ 265	\$ 571	\$ 1063

32. A expectativa de vida melhorou dramaticamente no século XX. A tabela dá os valores de $E(t)$, a expectativa de vida no nascimento (em anos) de um menino no ano t nos Estados Unidos. Interprete e estime os valores de $E'(1910)$ e $E'(1950)$.

t	$E(t)$	t	$E(t)$
1900	48,3	1950	65,6
1910	51,1	1960	66,6
1920	55,2	1970	67,1
1930	57,4	1980	70,0
1940	62,5	1990	71,8

33–34 □ Determine se existe ou não $f'(0)$.

33. $f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} x^2 \,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Projeto Escrito

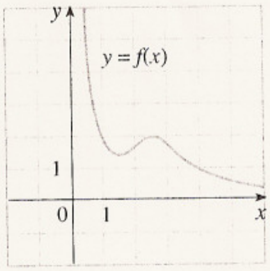
Métodos Iniciais para Encontrar Tangentes

A primeira pessoa a formular explicitamente as idéias de limite e derivada foi sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que "Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes". Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e seu professor em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar retas tangentes, e esses métodos desempenham papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

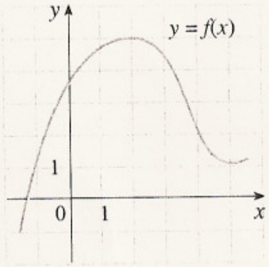
2.9 Exercícios

1–3 □ Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

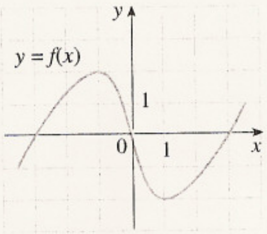
1. (a) $f'(1)$
(b) $f'(2)$
(c) $f'(3)$
(d) $f'(4)$



2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

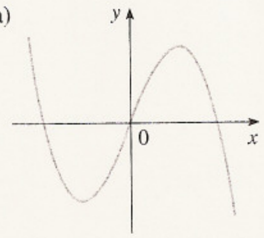


3. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

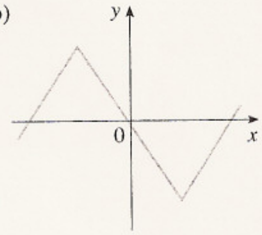


4. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I-IV. Dê razões para suas escolhas.

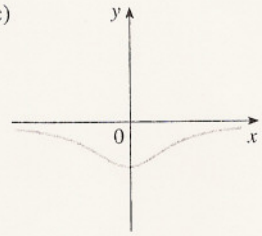
(a)



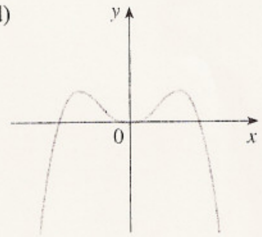
(b)



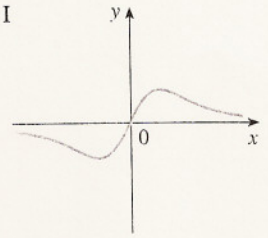
(c)



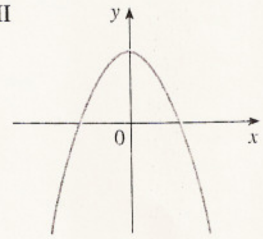
(d)



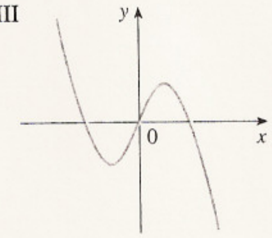
I



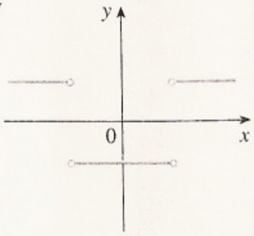
II



III

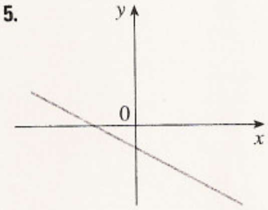


IV

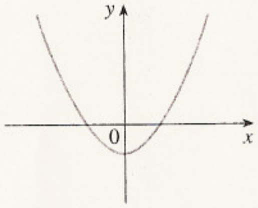


5–13 □ Trace ou copie o gráfico de f. (Suponha os eixos com a mesma escala.) Use então o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f'.

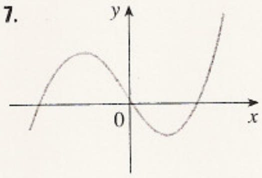
5.



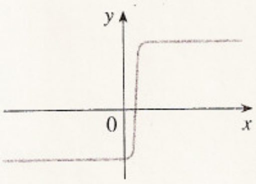
6.



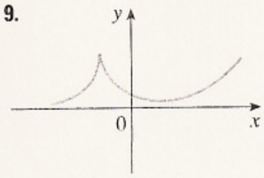
7.



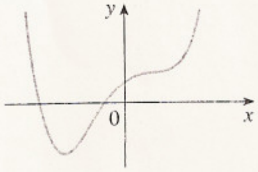
8.



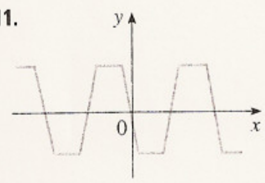
9.



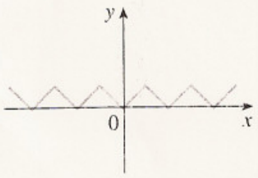
10.



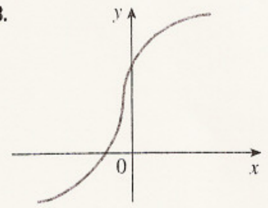
11.



12.



13.



14–16 □ Faça um esboço cuidadoso de f e esboce o gráfico de f' como nos Exercícios 5-13. Você pode sugerir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

14. $f(x) = \text{sen } x$

15. $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, e $f'(2)$ fazendo uso de um recurso gráfico para um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Use os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para provar que sua conjectura em (c) está correta.

18. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de um recurso gráfico para um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Use os valores de (a) e (b) para para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para provar que sua conjectura em (d) está correta.

19–27 □ Encontre a derivada da função dada usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

19. $f(x) = 5x + 3$

20. $f(x) = 5 - 4x + 3x^2$

21. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

22. $f(x) = x + \sqrt{x}$

23. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

24. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

25. $G(x) = \dfrac{4 - 3x}{2 + x}$

26. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

27. $f(x) = x^4$

28. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?

(d) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico f' e compare-o com o esboço de (b).

29. (a) Se $f(x) = x - (2/x)$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique se sua resposta em (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

30. (a) Se $f(t) = 6/(1 + t^2)$, encontre $f'(t)$.

(b) Verifique se sua resposta em (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

31. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela (do Bureau of Labor Statistics) dá a porcentagem de desemprego na força de trabalho americana de 1988 a 1997.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1988	5,5	1993	6,9
1989	5,3	1994	6,1
1990	5,6	1995	5,6
1991	6,8	1996	5,4
1992	7,5	1997	4,9

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa a tabela de valores de $U'(t)$.

32. Seja $S(t)$ a taxa de fumantes no final da escola secundária no instante t. A tabela (do Instituto de Pesquisas Sociais e da Universidade do Michigan) dá a porcentagem de alunos que declararam ter fumado um ou mais cigarros por dia durante os últimos 30 dias.

t	$S(t)$	t	$S(t)$
1978	27,5	1988	18,1
1980	21,4	1990	19,1
1982	21,0	1992	17,2
1984	18,7	1994	19,4
1986	18,7	1996	22,2

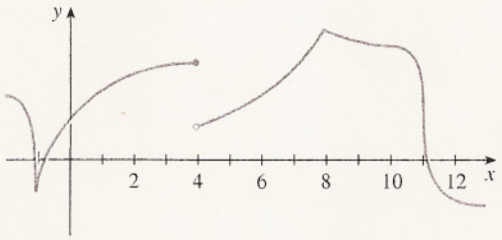
(a) Qual o significado de $S'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa uma tabela de valores para $S'(t)$.

(c) Faça os gráficos de S e S'.

(d) Como seria possível obter valores mais precisos para $S'(t)$?

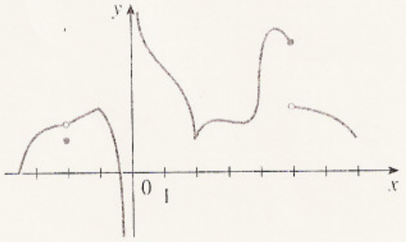
33. O gráfico de f é dado. Estabeleça, explicando, os números nos quais f não é diferenciável.



34. O gráfico de g é dado.

(a) Em quais números g é descontínua? Por quê?

(b) Em quais números g não é diferenciável? Por quê?



35. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê um *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e então em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f nas vizinhanças desses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

36. Dê um *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você nota? Relate o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

37. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.8.3 para encontrar $f'(a)$.
(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.
(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Lembre-se da forma do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

38. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.
(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.
(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente em $(0, 0)$.
(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

39. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

40. Onde a função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ não é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

41. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para que valores de x é f diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

42. A **derivada esquerda** e a **direita** de f em a são definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se e somente se essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ encontre a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

43. Lembre-se de que uma função f é chamada de *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e de *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo x. Prove cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

44. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de quanto tempo a água está correndo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função de t, que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

45. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ correta até o grau mais próximo.