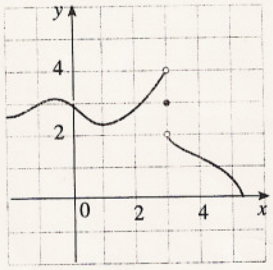
 2.2. Exercícios

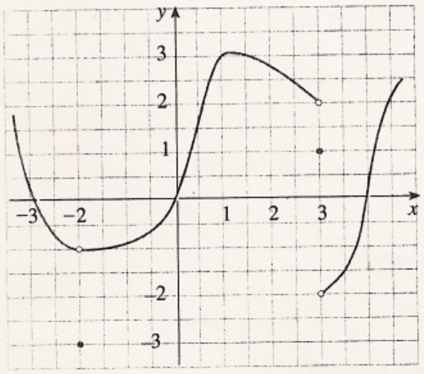
Doc 02

3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.
(a) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

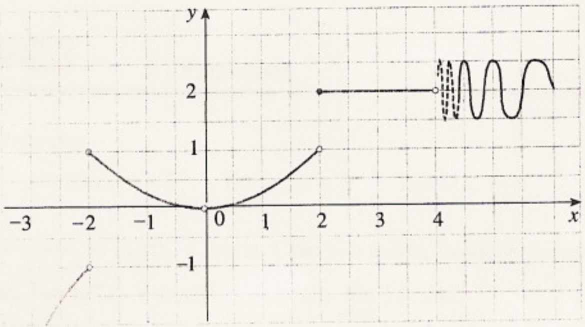
4. Para a função f cujo gráfico é dado, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$
(c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 3} f(x)$
(e) $f(3)$



5. Para a função f cujo gráfico é dado, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$ (f) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$
(g) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (h) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (i) $f(-2)$

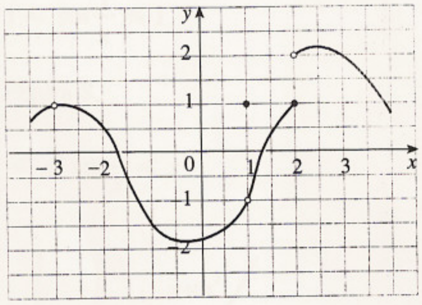


6. Para a função g cujo gráfico é dado, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $\lim_{x\to -2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x\to -2} g(x)$

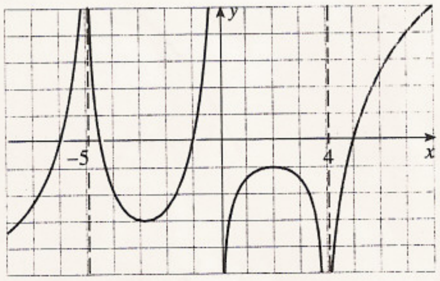


(d) $g(-2)$ (e) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (f) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$
(g) $\lim_{x\to 2} g(x)$ (h) $g(2)$ (i) $\lim_{x\to 4^+} g(x)$
(j) $\lim_{x\to 4^-} g(x)$ (k) $g(0)$ (l) $\lim_{x\to 0} g(x)$

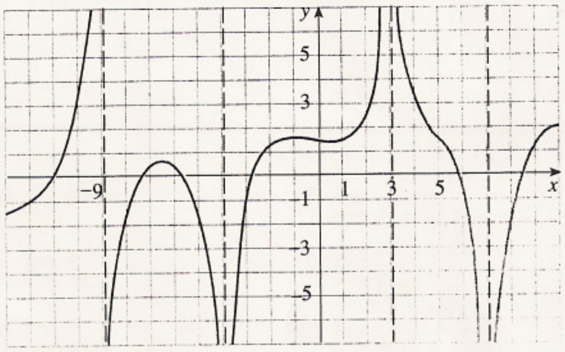
7. Determine, se existir, o valor do limite a partir do gráfico dado. Se não existir, explique por quê.
(a) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} f(x)$
(d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (f) $\lim_{x\to 2} f(x)$



8. Para a função g cujo gráfico é dado, determine.
(a) $\lim_{x\to -6} g(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$
(c) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 4} g(x)$
(e) As equações das assíntotas verticais.



9. Para a função f cujo gráfico é dado, determine.
(a) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 7} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -4} f(x)$
(d) $\lim_{x\to -9^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to -9^+} f(x)$
(f) As equações das assíntotas verticais



Lista 2 de Cálculo 1

Prof. Ana Paula Peron.

(Limite / Continuidade).

EXEMPLO 11 □ Mostre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Note primeiro que *não podemos* usar

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe (veja o Exercício 4 da Seção 2.2). Porém, como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

vamos ter, conforme está ilustrado na Figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

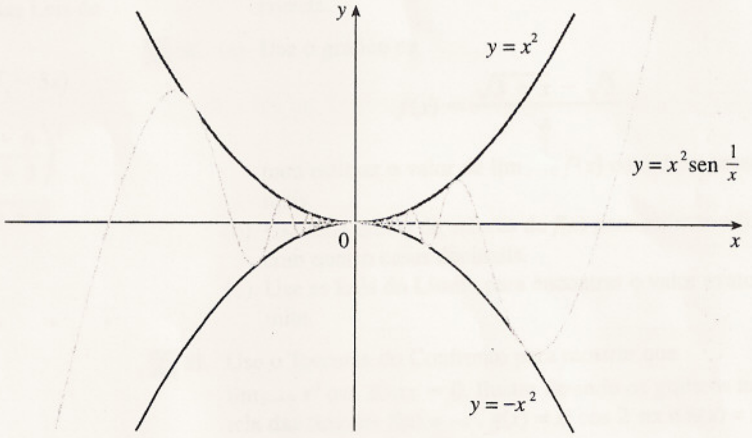


FIGURA 8

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$$

Tomando-se no Teorema da Espremedura $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, e $h(x) = x^2$ obtém-se

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 8$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to a} [f(x) + h(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^2$

(c) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$ (d) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

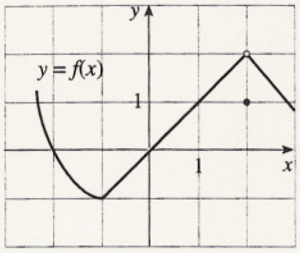
(g) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (h) $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

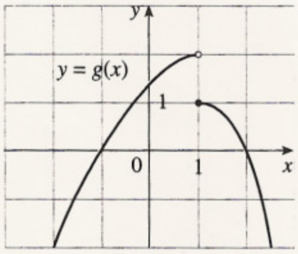
2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista o limite, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} x^3 f(x)$ (f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$





3–9 □ Calcule os limites justificando cada passagem pelas Leis do Limite que forem usadas.

3. $\lim_{x \to 4} (5x^2 - 2x + 3)$

4. $\lim_{x \to 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$

5. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$

6. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}\right)^2$

7. $\lim_{t \to -2} (t + 1)^9(t^2 - 1)$

8. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

está correta.

11–28 □ Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x + 12}{x + 3}$

12. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

13. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

14. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

15. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(h - 5)^2 - 25}{h}$

16. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^4 - 1}{h}$

18. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{t \to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

20. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 + t - 6}{t^2 - 4}$

21. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{2 - t} - \sqrt{2}}{t}$

22. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

23. $\lim_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

24. $\lim_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}\right]$

25. $\lim_{t \to 0} \left[\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t}\right]$

26. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

27. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}{x - 2}$

28. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

29. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

fazendo o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

(b) Faça uma tabela dos valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e conjecture qual será o valor do limite.

(c) Use as Leis do Limite para mostrar que sua conjectura está correta.

30. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Leis do Limite para encontrar o valor exato do limite.

31. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 \cos 20\pi x = 0$. Ilustre fazendo os gráficos na mesma tela das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 2\,\pi x$ e $h(x) = x^2$.

32. Use o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\, \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre fazendo na mesma tela os gráficos de f, g e h (como no Teorema do Confronto).

33. Se $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$ para todo x, encontre $\lim_{x \to -1} f(x)$.

34. Se $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ para $0 \leqslant x \leqslant 2$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

35. Prove que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

36. Prove que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

37–42 □ Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

37. $\lim_{x \to -4} |x + 4|$

38. $\lim_{x \to -4^-} \dfrac{|x + 4|}{x + 4}$

39. $\lim_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

40. $\lim_{x \to 1.5} \dfrac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

41. $\lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$ **42.** $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

43. A *função sinal,* denotada por sgn, está definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.
(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites que se seguem.
(i) $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$
(iii) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x|$

44. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 3 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.
(b) Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?
(c) Esboce o gráfico de f.

45. Seja $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.
(a) Encontre
(i) $\lim_{x \to 1^+} F(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1^-} F(x)$
(b) Existe $\lim_{x \to 1} F(x)$?
(c) Esboce o gráfico de F.

46. Seja

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ 8 - x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcule, se existirem, os limites.
(i) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$ (ii) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (iii) $\lim_{x \to 1} h(x)$
(iv) $\lim_{x \to 2^-} h(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} h(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} h(x)$
(b) Esboce o gráfico de h.

47. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule
(i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x \to -2{,}4} [\![x]\!]$
(b) Se n for um inteiro, calcule
(i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$
(c) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$?

48. Seja $f(x) = x - [\![x]\!]$.
(a) Esboce o gráfico de f.
(b) Se n for um inteiro, calcule
(i) $\lim_{x \to n^-} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to n^+} f(x)$
(c) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

49. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe mas não é igual a $f(2)$.

50. Na Teoria da Relatividade, a Fórmula da Contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto no repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

51. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

52. Se r for uma função racional, use o Exercício 51 para mostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

53. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

prove que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

54. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

55. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

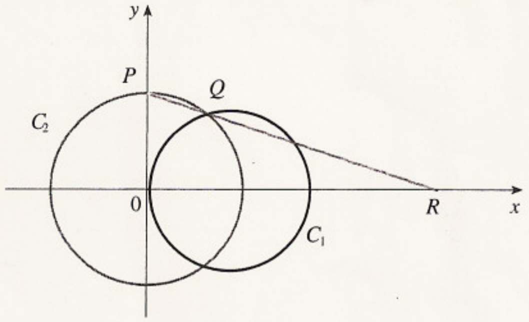
56. Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

57. Existe um número a tal que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

58. A figura mostra um círculo fixo C_1, com equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 encolher, isto é, quando $r \to 0^+$?

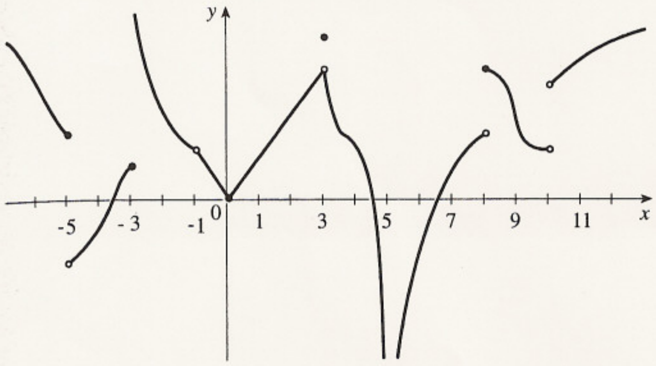


Exercícios 2.5

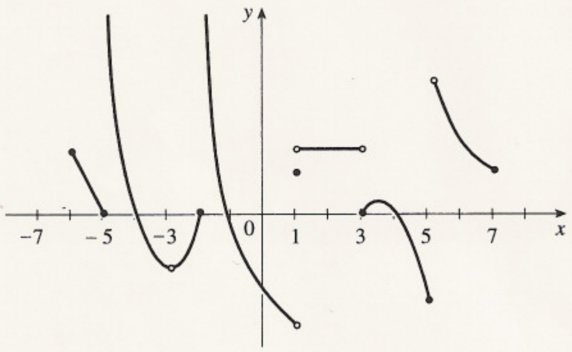
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, estabeleça os números nos quais f é descontínua e explique por quê.
   (b) Para cada um dos números estabelecidos na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, estabeleça os intervalos nos quais g é contínua.



5. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda parte, exceto em $x = 3$ e é contínua à esquerda em 3.

6. Esboce o gráfico de uma função que tenha um salto de descontinuidade em $x = 2$ e uma descontinuidade removível em $x = 4$, mas é contínua no resto.

7. Um estacionamento cobra \$ 3 pela primeira hora, ou parte dela, e \$ 2 por hora sucessiva, ou parte, até o máximo de \$ 10.
   (a) Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido.
   (b) Discuta as descontinuidades da função e sua significância para alguém que use o estacionamento.

8. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
   (a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo
   (b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Nova Iorque
   (c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Nova Iorque
   (d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida
   (e) A corrente no circuito para luzes de uma sala como uma função do tempo

9. Se f e g forem funções contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x \to 3} [2f(x) - g(x)] = 4$, encontre $g(3)$.

10–12 □ Use a definição de continuidade e propriedades dos limites para provar que a função é contínua em um dado número.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $g(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 - 1}, \quad a = 4$

13–14 □ Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

13. $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}, \quad [-4, 4]$

14. $F(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}, \quad (-\infty, 3)$

15–20 □ Explique por que a função é descontínua no número dado. Esboce o gráfico da função.

15. $f(x) = \ln |x - 2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} \qquad a = -1$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 6 & \text{se } x = -1 \end{cases} \qquad a = -1$

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x - 4} & \text{se } x \neq 4 \\ 3 & \text{se } x = 4 \end{cases} \qquad a = 4$

20. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{se } x > 2 \end{cases} \qquad a = 2$

21–28 □ Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo número em seu domínio. Estabeleça o domínio.

21. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

22. $f(t) = 2t + \sqrt{25 - t^2}$

23. $h(x) = \sqrt[5]{x - 1}\,(x^2 - 2)$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $f(x) = e^x \operatorname{sen} 5x$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

29–30 □ Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

31–34 □ Use a continuidade para calcular o limite.

31. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\displaystyle\lim_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para } x < 3 \\ 5 - x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

36–37 □ Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

36. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leqslant -1 \\ 3x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^3 & \text{se } x < 0 \\ (x + 1)^3 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

38. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\[2mm] \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geqslant R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra, R é seu raio e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

39. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ cx^2 - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

40. Encontre a constante c que torna g contínua em $(-\infty, \infty)$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2 & \text{se } x < 4 \\ cx + 20 & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

41. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que é igual a f para $x \neq a$ e é contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$, $\quad a = -2$

(b) $f(x) = \dfrac{x - 7}{|x - 7|}$, $\quad a = 7$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 64}{x + 4}$, $\quad a = -4$

(d) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$, $\quad a = 9$

42. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um mostrando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f pode satisfazer a mesma conclusão. (Mesmo que não satisfaça as hipóteses.)

43. Se $f(x) = x^3 - x^2 + x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 10$.

44. Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número c positivo tal que seu quadrado é igual a 2. (Isso prova a existência do número $\sqrt{2}$.)

45–48 □ Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

45. $x^3 - 3x + 1 = 0$, $\quad (0, 1)$

46. $x^2 = \sqrt{x + 1}$, $\quad (1, 2)$

47. $\cos x = x$, $\quad (0, 1)$

48. $\ln x = e^{-x}$, $\quad (1, 2)$

49–50 □ (a) Prove que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua calculadora para encontrar o intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

49. $e^x = 2 - x$

50. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

51–52 □ (a) Prove que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use recursos gráficos para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

51. $x^5 - x^2 - 4 = 0$

52. $\sqrt{x - 5} = \dfrac{1}{x + 3}$

53. Prove que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

54. Para provar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Pelo Exercício

Logo, pela Definição 7,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

A Figura 18 ilustra a prova mostrando alguns valores de ε e os valores correspondentes de N.

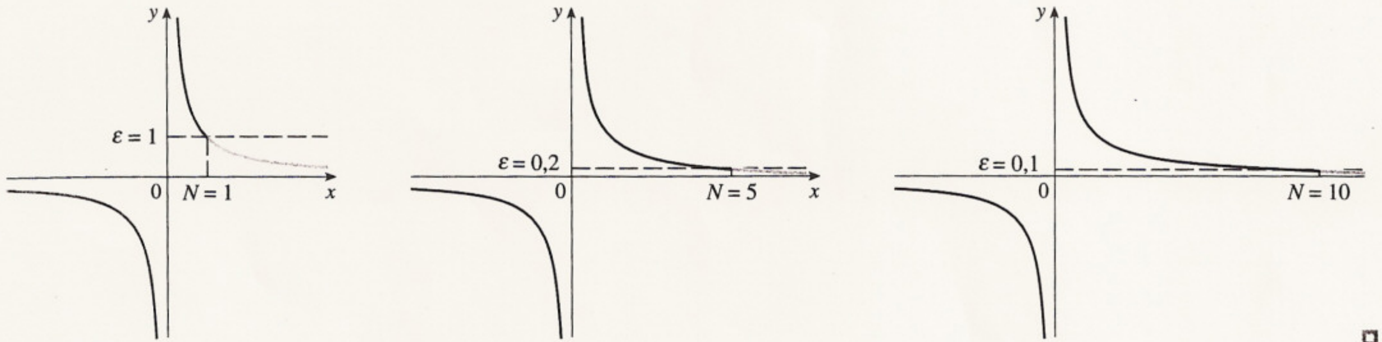


FIGURA 18

□

Finalmente, notamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

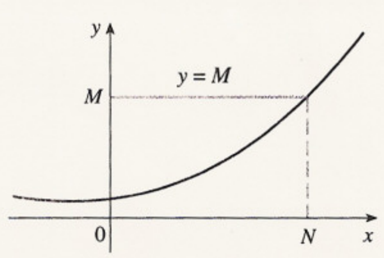


FIGURA 19
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

> **9 Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
>
> significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que
>
> $$f(x) > M \qquad \text{sempre que} \qquad x > N$$

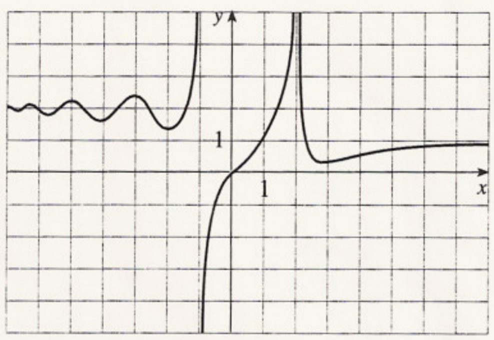
Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$ (veja o Exercício 64).

2.6 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens que se seguem.
   (a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.
   (b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com um gráfico as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, determine os limites.
   (a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
   (d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
   (f) Determine as equações das assíntotas.



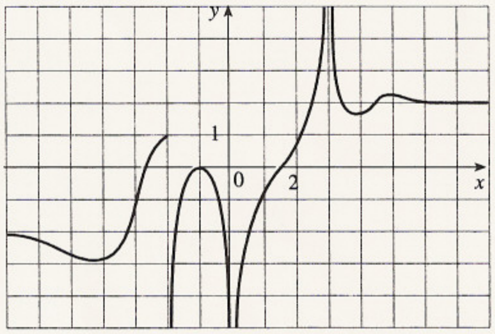
4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine os limites.

(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$

(f) Determine as equações das assíntotas



5–8 □ Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $f(0) = 0,\quad f(1) = 1,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\quad f$ é ímpar

6. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1,$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 3,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -3$

9. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então use o gráfico de f para sustentar sua conjectura.

10. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correto até a segunda casa decimal.

(b) Use a tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite até quatro casas decimais.

11–14 □ Calcule o limite e justifique cada passagem indicando a propriedade apropriada dos limites.

11. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+4}{x^2 - 2x + 5}$ **12.** $\lim_{t\to\infty} \dfrac{7t^3 + 4t}{2t^3 - t^2 + 3}$

13. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$ **14.** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2 - 1}{x + 8x^2}}$

15–32 □ Encontre o limite.

15. $\lim_{r\to\infty} \dfrac{r^4 - r^2 + 1}{r^5 + r^3 - r}$ **16.** $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{6t^2 + 5t}{(1-t)(2t-3)}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1 + 4x^2}}{4 + x}$ **18.** $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x}}{4x + 1}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ **20.** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x\right)$

21. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$ **22.** $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

23. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$ **24.** $\lim_{x\to\infty} \cos x$

25. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}$ **26.** $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x}$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$ **28.** $\lim_{x\to\infty} \left(x + \sqrt{x}\right)$

29. $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 5x^2)$ **30.** $\lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}(x^2 - x^4)$

31. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^7 - 1}{x^6 + 1}$ **32.** $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}$

33. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

através do gráfico $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para fazer uma conjectura sobre o valor de limite.

(c) Prove que sua conjectura está correta.

34. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

35–40 □ Encontre as assíntotas horizontal e vertical de cada curva. Confira seu trabalho através de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

35. $y = \dfrac{x}{x + 4}$ **36.** $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

37. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x - 10}$ **38.** $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + x}$

39. $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}$ **40.** $F(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2}}$

41. Encontre uma fórmula para a função f que satisfaça as seguintes condições:
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

42. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$, e por assíntota horizontal $y = 1$.

43–46 □ Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como os interceptos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 11.

43. $y = x^2(x-2)(1-x)$

44. $y = (2+x)^3(1-x)(3-x)$

45. $y = (x+4)^5(x-3)^4$

46. $y = (1-x)(x-3)^2(x-5)^2$

47. Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

48. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece a seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.
(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

através do gráfico de ambas nas janelas de inspecção $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$.
(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

49. Seja P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor do que o grau de Q e (b) maior do que o grau de Q.

50. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:
(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar
(v) $n < 0$, n par
Então use esses esboços para encontrar os seguintes limites:
(a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$
(c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ (d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

51. Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se

$$\frac{4x-1}{x} < f(x) < \frac{4x^2+3x}{x^2}$$

para todo $x > 5$.

52. (a) Um tanque contém 5000 litros de água pura. Salmoura contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 l/min. Mostre que a concentração de sal após t minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

53. Seremos capazes de mostrar no Capítulo 9 do Volume II que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

onde g é a aceleração devida à gravidade e v^* é a velocidade final da gota.
(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.
(b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s². Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

54. (a) Fazendo os gráficos de $y = e^{-x/10}$ e $y = 0{,}1$ na mesma tela descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0{,}1$.
(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar um recurso gráfico?

55. Use o gráfico para encontrar um número N tal que

$$\left| \frac{6x^2+5x-3}{2x^2-1} - 3 \right| < 0{,}2 \quad \text{sempre que} \quad x > N$$

56. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

57. Para o limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

58. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.

59. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0{,}0001$?
(b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Prove isso diretamente usando a Definição 7.

60. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/\sqrt{x} < 0{,}0001$?
(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Prove isso diretamente usando a Definição 7.

34. Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a magnitude da força é

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.
(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.
(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?
(c) Se $W = 50$ lb e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para localizar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b).

35–44 ☐ Encontre o limite.

35. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{t}$

36. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} 8t}{\operatorname{sen} 9t}$

37. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos \theta)}{\sec \theta}$

38. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

39. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta}$

40. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$

41. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cossec} x}$

42. $\displaystyle \lim_{x \to \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos 2x}$ $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x$

43. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \operatorname{tg} \theta}$

44. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$ $(x-1)(x+2)$

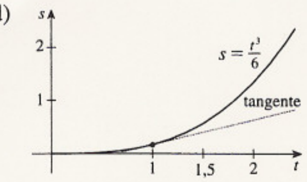
45. Diferencie cada identidade trigonométrica para obter outra nova ou antiga.

(a) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

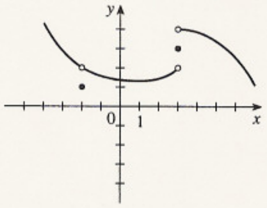
(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

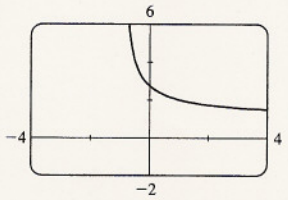
46. O semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete.

(d) 

9. (a) 0, 1,7321, −1,0847, −2,7433, 4,3301, −2,8173, 0, −2,1651, −2,6061, −5, 3,4202; não (c) −31,4

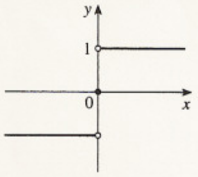
Exercícios 2.2 □

1. Sim
3. (a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser feitos arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo a –3 (mas não igual a –3).
(b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados arbitrariamente grande, porém negativos, tomando-se x suficientemente próximo de 4 através de valores maiores do que 4.
5. (a) 3 (b) 2 (c) −2 (d) Não existe (e) 1 (f) −1 (g) −1 (h) −1 (i) −3
7. (a) 2 (b) −1 (c) 1 (d) 1 (e) 2 (f) Não existe
9. (a) ∞ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) ∞ (e) $-\infty$ (f) $x = -9, x = -4, x = 3, x = 7$
11. (a) 1 (b) 0 (c) Não existe
13. 

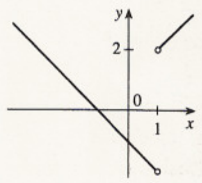
15. 0,806452, 0,641026, 0,510204, 0,409836, 0,369004, 0,336689, 0,165563, 0,193798, 0,229358, 0,274725, 0,302115, 0,330022; $\frac{1}{3}$
17. −0,003884, −0,003941, −0,003988, −0,003994, −0,003999, −0,004124, −0,004061, −0,004012, −0,004006, −0,004001; −0,004
19. 0,459698, 0,489670, 0,493369, 0,496261, 0,498336, 0,499583, 0,499896, 0,499996; $\frac{1}{2}$
21. ∞ **23.** ∞ **25.** $-\infty$ **27.** $-\infty$ **29.** $-\infty$; ∞
31. (a) 2,71828 (b) 

33. (a) 4
35. (a) 0,998000, 0,638259, 0,358484, 0,158680, 0,038851, 0,008928, 0,001465; 0
(b) 0,000572, −0,000614, −0,000907, −0,000978, −0,000993, −0,001000; −0,001
37. Não importa quantas vezes daremos o *zoom* na direção da origem, o gráfico aparenta consistir em retas quase verticais. Isso indica oscilações mais freqüentes à medida que $x \to 0$.
39. $x \approx \pm 0{,}90, \pm 2{,}24$; $x = \pm \operatorname{sen}^{-1}(\pi/4), \pm(\pi - \operatorname{sen}^{-1}(\pi/4))$

Exercícios 2.3 □

1. (a) 5 (b) 9 (c) 2 (d) $-\frac{1}{3}$ (e) $-\frac{3}{8}$ (f) 0 (g) Não existe (h) $-\frac{6}{11}$
3. 75 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** −3 **9.** 0 **11.** Não existe
13. $-\frac{1}{5}$ **15.** −10 **17.** 4 **19.** 6 **21.** $-\sqrt{2}/4$
23. 108 **25.** $-\frac{1}{2}$ **27.** $-\frac{1}{4}$ **29.** (a), (b) $\frac{2}{3}$ **33.** 1
37. 0 **39.** Não existe **41.** Não existe
43. (a) 

(b) (i) 1
(ii) −1
(iii) Não existe
(iv) 1

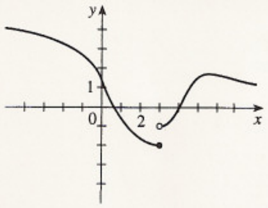
45. (a) (i) 2 (ii) −2 (b) Não (c) 

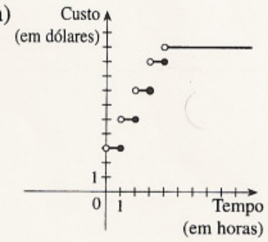
47. (a) (i) −2 (ii) Não existe (iii) −3
(b) (i) $n - 1$ (ii) n (c) a não é um inteiro.
57. 15; −1

Exercícios 2.4 □

1. (a) $|x - 2| < 0{,}02$ (b) $|x - 2| < 0{,}002$
3. $\frac{4}{7}$ (ou qualquer número menor positivo)
5. 1,44 (ou qualquer número menor positivo)
7. 0,6875 (ou qualquer número menor positivo)
9. 0,11, 0,012 (ou qualquer número menor positivo)
11. 0,07 (ou qualquer número menor positivo)
13. (a) $\sqrt{1000/\pi}$ cm (b) Dentro de aproximadamente 0,0445 cm
(c) Raio: área; $\sqrt{1000/\pi}$; 1000; 5; $\approx$ 0,0445 **39.** Dentro de 0,1

Exercícios 2.5 □

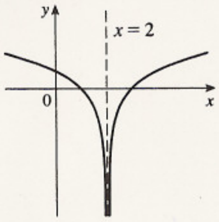
1. $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$
3. (a) −5 (salto), −3 (infinito), −1 (indefinido), 3 (removível), 5 (infinito), 8 (salto), 10 (indefinido) (b) −5, à esquerda; −3, à esquerda; −1, nenhum dos dois; 3, nenhum dos dois; 5, nenhum dos dois; 8, à direita; 10, nenhum dos dois
5. 

7. (a) 

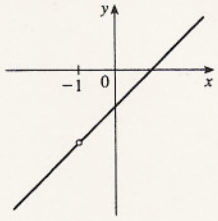
(b) Descontinuidade em $t = 1, 2, 3, 4$

9. 6

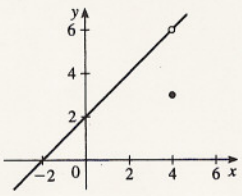
15. $f(2)$ não está definida



17. $f(-1)$ não está definida



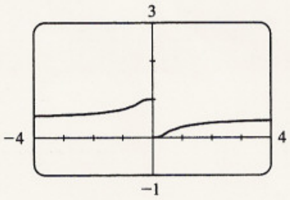
19. $\lim_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$



21. $\{x \mid x \neq -3, -2\}$ **23.** $\mathbb{R}$ **25.** $\mathbb{R}$

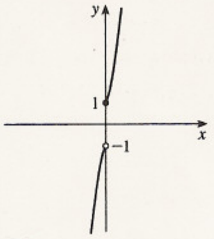
27. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

29. $x = 0$



31. $\frac{7}{3}$ **33.** 1

37. 0, contínua à direita **39.** $\frac{1}{3}$



41. (a) $g(x) = x - 4$ (c) $g(x) = x^2 - 4x + 16$

(d) $g(x) = 1/(3 + \sqrt{x})$

47. (b) (0,44, 0,45) **51.** (b) 1,434 **57.** Nada **59.** Sim

Exercícios 2.6 □

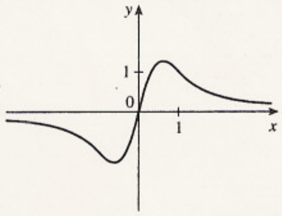
1. (a) Quando x torna-se grande, $f(x)$ tende a 5.

(b) Quando x torna-se grande, porém negativo, $f(x)$ tende a 3.

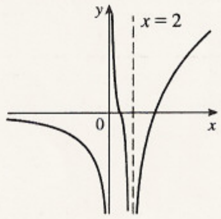
3. (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) 1 (e) 2

(f) $x = -1, x = 2, y = 1, y = 2$

5.



7.

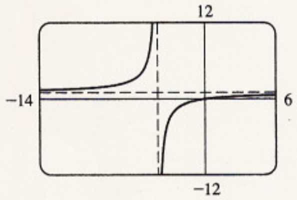


9. 0 **11.** 0 **13.** $\frac{1}{6}$ **15.** 0 **17.** 2 **19.** -1

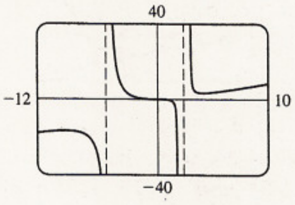
21. 0 **23.** $\frac{1}{6}$ **25.** ∞ **27.** ∞ **29.** $-\infty$ **31.** ∞

33. (a) e (b) $-\frac{1}{2}$

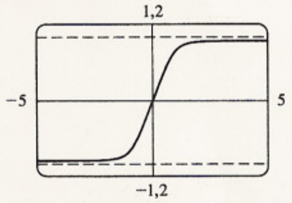
35. $y = 1, x = -4$



37. $x = 2, x = -5$

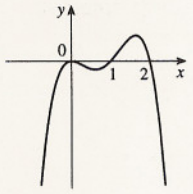


39. $y = \pm 1$

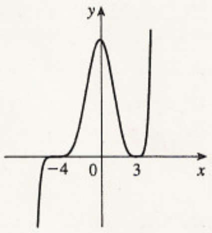


41. $(2 - x)/[x^2(x - 3)]$

43. $-\infty, -\infty$



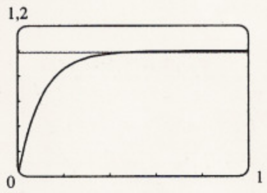
45. $\infty, -\infty$



47. 0 **49.** (a) 0 (b) ∞ ou $-\infty$ **51.** 4

53. (a) v^*

(b)



$\approx$ 0,47 s

55. $N \geqslant 13$ **57.** $N \leqslant -6, N \leqslant -22$ **59.** (a) $x > 100$

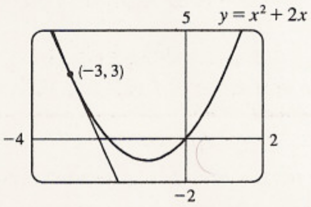
Exercícios 2.7 □

1. (a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

3. Inclinação em D, E, C, A, B

5. (a) (i) -4 (ii) -4 (b) $y = -4x - 9$

(c)



7. $y = 10x + 13$ **9.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

11. (a) $-2/(a + 3)^2$ (b) (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $-\frac{2}{9}$ (iii) $-\frac{1}{8}$