Assim, a função comprimento de arco é dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8}\ln x - 1$$

Por exemplo, o comprimento de arco ao longo da curva de (1, 1) a (3, $f(3)$) é

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8{,}1373$$

□ A Figura 8 mostra a interpretação da função comprimento de arco no Exemplo 4. A Figura 9 mostra o gráfico de sua função comprimento de arco.

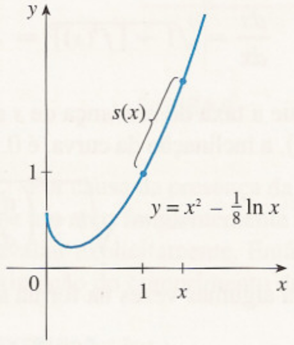


FIGURA 8

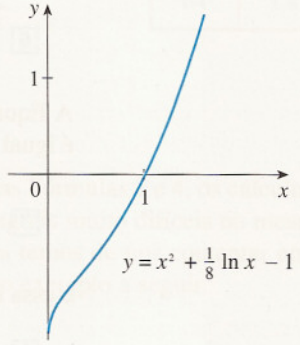


FIGURA 9

8.1 Exercícios

1. Use a Fórmula 3 do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = 2 - 3x$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Verifique sua resposta notando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

2. Use a fórmula do comprimento de arco para achar o comprimento da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. Verifique sua resposta notando que a curva é um quarto de círculo.

3–4 □ Ache o comprimento de arco da curva dada do ponto A ao ponto B.

3. $y^2 = (x - 1)^3$; $A(1, 0)$, $B(2, 1)$

4. $12xy = 4y^4 + 3$; $A(\frac{7}{12}, 1)$, $B(\frac{67}{24}, 2)$

5–6 □ Plote a curva e visualmente estime seu comprimento. Então calcule seu comprimento exato

5. $y = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{3/2}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$

6. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

7–18 □ Calcule o comprimento da curva.

7. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

8. $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$, $2 \leqslant x \leqslant 4$

9. $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{8x^2}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$

10. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3)$, $0 \leqslant y \leqslant 9$

11. $y = \ln(\sec x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

12. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, $\pi/6 \leqslant x \leqslant \pi/3$

13. $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

14. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$

15. $y = \cosh x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

16. $y^2 = 4x$, $0 \leqslant y \leqslant 2$

17. $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

18. $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a > 0$

temos

$$S = \int 2\pi x \, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} \, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1} \, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du \qquad \text{(onde } u = 1 + 4y\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \qquad \text{(como na Solução 1)}$$

□

EXEMPLO 3 □ Ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ao redor do eixo x.

□ Outro método: Use a Fórmula 6 com $x = \ln y$.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 5 com

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

temos

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2} \, du \qquad \text{(onde } u = e^x\text{)}$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta \, d\theta \qquad \text{(onde } u = \operatorname{tg}\theta \text{ e } \alpha = \operatorname{tg}^{-1} e\text{)}$$

□ Ou use a Fórmula 21 na Tabela de Integrais.

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta \operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad \text{(pelo Exemplo 8 na Seção 7.2)}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha \operatorname{tg}\alpha + \ln(\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$$

Como $\operatorname{tg}\alpha = e$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + e^2$ e

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

□

8.2 Exercícios

1–4 □ Monte, mas não avalie, uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo dado.

1. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$; eixo x
2. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$; eixo x
3. $y = \sec x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; eixo y
4. $y = e^x$, $1 \leqslant y \leqslant 2$; eixo y

5–14 □ Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x.

5. $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$
6. $y^2 = 4x + 4$, $0 \leqslant x \leqslant 8$
7. $y = \sqrt{x}$, $4 \leqslant x \leqslant 9$
8. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, $1 \leqslant x \leqslant 4$

9. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

10. $y = \cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

11. $y = \cosh x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

12. $2y = 3x^{2/3}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 8$

13. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

14. $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

15–20 □ A curva dada é girada ao redor do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

15. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

16. $y = 1 - x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

17. $x = e^{2y}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$

18. $x = \sqrt{2y - y^2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

19. $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y^2 - \ln y), \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

20. $x = a\cosh(y/a), \quad -a \leqslant y \leqslant a$

21–22 □ Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para encontrar a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x.

21. $y = x^4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

22. $y = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

23–24 □ Use um CAS ou uma tabela de integrais para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

23. $y = 1/x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

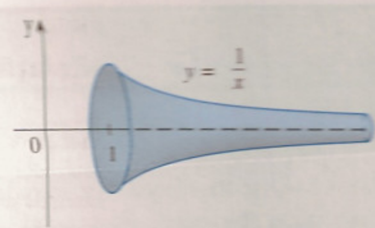
24. $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

25–26 □ Use um CAS para calcular a área exata da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo y. Se seu CAS tiver problemas para avaliar a integral, expresse a área da superfície como uma integral na outra variável.

25. $y = x^3, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

26. $y = \ln(x + 1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

27. Se a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ é girada ao redor do eixo x, o volume do sólido resultante é finito (veja o Exercício 63 na Seção 7.8). Mostre que a área da superfície é infinita. (A superfície é mostrada na figura e é conhecida como **trombeta de Gabriel**.)



28. Se a curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, é girada ao redor do eixo x, calcule a área da superfície resultante.

29. Calcule a área da superfície gerada pela rotação de um laço da curva $8y^2 = x^2(1 - x^2)$ ao redor do eixo x.

30. Um grupo de engenheiros está construindo uma antena parabólica cujo formato será formado pela rotação da curva $y = ax^2$ ao redor do eixo y. Se a antena deve ter 10 pés de diâmetro e uma profundidade máxima de 2 pés, encontre o valor de a e a área da superfície da antena.

31. A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

é girada ao redor do eixo x para formar uma superfície chamada elipsóide. Calcule a área da superfície desse *elipsóide*.

32. Ache a área da superfície do toro no Exercício 59 na Seção 6.2.

33. Se a curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, é girada ao redor da reta horizontal $y = c$, onde $f(x) \leqslant c$, encontre a fórmula para a área da superfície resultante.

CAS 34. Use o resultado do Exercício 33 para montar uma integral para encontrar a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, ao redor da reta $y = 4$. Então use um CAS para avaliar a integral.

35. Calcule a área da superfície obtida pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ ao redor da reta $y = r$.

36. Mostre que a área da superfície de uma zona de uma esfera que está entre dois planos paralelos é $S = \pi dh$, onde d é o diâmetro da esfera e h é a distância entre os planos. (Note que S depende apenas da distância entre os planos e não de sua localização, desde que ambos os planos interceptem a esfera.)

37. A Fórmula 4 é válida apenas quando $f(x) \geqslant 0$. Mostre que quando $f(x)$ não é necessariamente positiva, a fórmula para a área da superfície torna-se

$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

38. Seja L o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, onde f é positiva e tem uma derivada contínua. Seja S_f a área da superfície gerada pela rotação da curva ao redor do eixo x. Se c é uma constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ e seja S_g a área da superfície correspondente gerada pela curva $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Expresse S_g em termos de S_f e L.