A Tabela 2 ilustra a divergência da integral do Exemplo 10. Note que os valores não se aproximam de nenhum número fixado.

TABELA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\, dx$
2	0,8636306042
5	1,8276735512
10	2,5219648704
100	4,8245541204
1000	7,1271392134
10000	9,4297243064

7.8 Exercícios

1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria.
   (a) $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4}\, dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$
   (c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\, dx$ (d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\, dx$

2. Quais das seguintes integrais é imprópria? Por quê?
   (a) $\int_1^2 \frac{1}{2x - 1}\, dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\, dx$
   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\, dx$ (d) $\int_1^2 \ln(x - 1)\, dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ e avalie-a para $t = 10$, 100 e 1000. Então encontre a área total abaixo dessa curva para $x \geq 1$.

4. (a) Plote as funções $f(x) = 1/x^{1,1}$ e $g(x) = 1/x^{0,9}$ nas janelas retangulares $[0, 10]$ por $[0, 1]$ e $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
   (b) Encontre as áreas sob os gráficos de f e g de $x = 1$ a $x = t$ e avalie para $t = 10, 100, 10^4, 10^6, 10^{10}$ e 10^{20}.
   (c) Calcule a área total sob cada curva $x \geq 1$, se ela existir.

5–40 □ Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

5. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x + 1)^2}\, dx$
6. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\, dx$
7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 - w}}\, dw$
8. $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x + 3)^{3/2}}\, dx$
9. $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$
10. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\, dt$
11. $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\, dx$
12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{w - 5}}\, dw$
13. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$
14. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$
15. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x + 2)(x + 3)}\, dx$
16. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x + 2)(x + 3)}\, dx$
17. $\int_0^{\infty} \cos x\, dx$
18. $\int_{-\infty}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$
19. $\int_{-\infty}^{1} x e^{2x}\, dx$
20. $\int_0^{\infty} x e^{-x}\, dx$
21. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$
22. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx$
23. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$
24. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2 + 4}\, dr$
25. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$
26. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\, dx$
27. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$
28. $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$
29. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\, dx$
30. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x - 9}}\, dx$
31. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{cossec}^2 t\, dt$
32. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$
33. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\, dx$
34. $\int_0^1 \frac{1}{4y - 1}\, dy$
35. $\int_0^{\pi} \sec x\, dx$
36. $\int_0^4 \frac{1}{x^2 + x - 6}\, dx$
37. $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$
38. $\int_0^2 \frac{x - 3}{2x - 3}\, dx$
39. $\int_0^2 z^2 \ln z\, dz$
40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

41–46 □ Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^x\}$
42. $S = \{(x, y) \mid x \geq -2,\ 0 \leq y \leq e^{-x/2}\}$
43. $S = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq (\ln x)/x^2\}$
44. $S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1/\sqrt{x + 1}\}$

LISTA 1O - PROFª ANA PAULA

(INTEGRAL IMPRÓPRIA)

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{tg} x \sec x\}$

46. $S = \{(x, y) \mid 3 < x \leqslant 7,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x-3}\}$

47. (a) Se $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ e 10.000. Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente?

(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

(c) Ilustre a parte (b) plotando f e g na mesma tela para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

48. (a) Se $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1000$ e 10.000. Parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é convergente ou divergente?

(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

(c) Ilustre a parte (b) colocando em um gráfico f e g na mesma tela para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

49–54 □ Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

49. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1 + x^2}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x + e^{2x}}$

52. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \operatorname{sen} x}$

54. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

55. A integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, \infty)$ é infinito, e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Avalie-a expressando-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 2 e do Tipo 1, como a seguir:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

56. Avalie

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

pelo mesmo método do Exercício 55.

57–59 □ Encontre os valores de p para os quais a integral converge e avalie a integral para aqueles valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

60. (a) Avalie a integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ e 3.

(b) Estime o valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ quando n é um inteiro positivo arbitrário.

(c) Prove sua estimativa usando indução matemática.

61. (a) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ é divergente.

(b) Mostre que

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

62. A *velocidade média* das moléculas em um gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

onde M é o peso molecular do gás, R é a constante do gás, T é a temperatura do gás, e v é a velocidade molecular. Mostre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Sabemos do Exemplo 1 que a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tem área infinita. Mostre que pela rotação de $\mathcal{R}$ ao redor do eixo x obtemos um sólido com volume finito.

64. Use a informação e os dados dos Exercícios 25 e 26 da Seção 6.4 para calcular o trabalho necessário para lançar um satélite de 100 kg fora do campo gravitacional da Terra.

65. Calcule a *velocidade de escape* v_0 necessária para lançar um foguete de massa m fora do campo gravitacional de um planeta com massa M e raio R. Use a Lei de Newton da Gravitação (veja o Exercício 25 na Seção 6.4) e o fato de que a energia cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ supre o trabalho necessário.

66. Astrônomos usam uma técnica chamada *estereografia estelar* para determinar a densidade de estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio R a densidade das estrelas dependa somente da distância r do centro do aglomerado. Se a densidade estelar aparente for dada por $y(s)$, onde s é a distância planar observada do centro do aglomerado e $x(r)$ é a densidade real, pode ser mostrado que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\,x(r)\,dr$$

Se a densidade real de estrelas em um aglomerado for $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, ache a densidade aparente $y(s)$.

67. Um fabricante de lâmpadas quer produzir lâmpadas que durem cerca de 700 horas, mas naturalmente algumas lâm-

Assim, a função comprimento de arco é dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8}\ln x - 1$$

Por exemplo, o comprimento de arco ao longo da curva de (1, 1) a (3, $f(3)$) é

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8{,}1373$$

□ A Figura 8 mostra a interpretação da função comprimento de arco no Exemplo 4. A Figura 9 mostra o gráfico de sua função comprimento de arco.

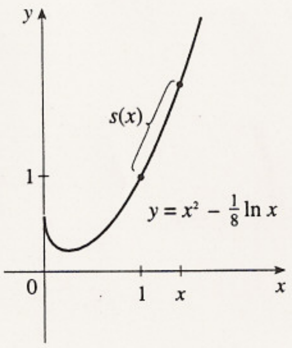


FIGURA 8

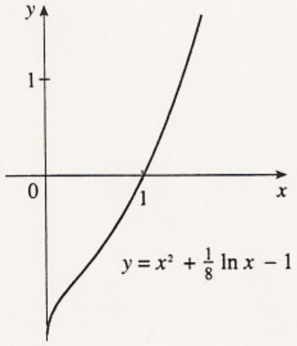


FIGURA 9

8.1 Exercícios

1. Use a Fórmula 3 do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = 2 - 3x$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Verifique sua resposta notando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

2. Use a fórmula do comprimento de arco para achar o comprimento da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. Verifique sua resposta notando que a curva é um quarto de círculo.

3–4 □ Ache o comprimento de arco da curva dada do ponto A ao ponto B.

3. $y^2 = (x - 1)^3$; $A(1, 0)$, $B(2, 1)$

4. $12xy = 4y^4 + 3$; $A(\frac{7}{12}, 1)$, $B(\frac{67}{24}, 2)$

5–6 □ Plote a curva e visualmente estime seu comprimento. Então calcule seu comprimento exato

5. $y = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{3/2}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$

6. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

7–18 □ Calcule o comprimento da curva.

7. $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

8. $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$, $2 \leqslant x \leqslant 4$

9. $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{8x^2}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$

10. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3)$, $0 \leqslant y \leqslant 9$

11. $y = \ln(\sec x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

12. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, $\pi/6 \leqslant x \leqslant \pi/3$

13. $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

14. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$

15. $y = \cosh x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

16. $y^2 = 4x$, $0 \leqslant y \leqslant 2$

17. $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

18. $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a > 0$

temos

$$S = \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u}\, du \qquad \text{(onde } u = 1 + 4y\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \qquad \text{(como na Solução 1)}$$

□

EXEMPLO 3 □ Ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, ao redor do eixo x.

□ Outro método: Use a Fórmula 6 com $x = \ln y$.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 5 com

$$y = e^x \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

temos

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad \text{(onde } u = e^x\text{)}$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta \qquad \text{(onde } u = \operatorname{tg}\theta \text{ e } \alpha = \operatorname{tg}^{-1} e\text{)}$$

□ Ou use a Fórmula 21 na Tabela de Integrais.

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta \operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad \text{(pelo Exemplo 8 na Seção 7.2)}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha \operatorname{tg}\alpha + \ln(\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$$

Como $\operatorname{tg}\alpha = e$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + e^2$ e

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$$

□

8.2 Exercícios

1–4 □ Monte, mas não avalie, uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo dado.

1. $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 3$; eixo x

2. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $0 \leq x \leq \pi/2$; eixo x

3. $y = \sec x$, $0 \leq x \leq \pi/4$; eixo y

4. $y = e^x$, $1 \leq y \leq 2$; eixo y

5–14 □ Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x.

5. $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$

6. $y^2 = 4x + 4$, $0 \leq x \leq 8$

7. $y = \sqrt{x}$, $4 \leq x \leq 9$

8. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 4$

9. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

10. $y = \cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

11. $y = \cosh x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

12. $2y = 3x^{2/3}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 8$

13. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

14. $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

15–20 □ A curva dada é girada ao redor do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

15. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

16. $y = 1 - x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

17. $x = e^{2y}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$

18. $x = \sqrt{2y - y^2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

19. $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y^2 - \ln y), \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

20. $x = a \cosh(y/a), \quad -a \leqslant y \leqslant a$

21–22 □ Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para encontrar a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x.

21. $y = x^4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

22. $y = \operatorname{tg} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

CAS **23–24** □ Use um CAS ou uma tabela de integrais para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

23. $y = 1/x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

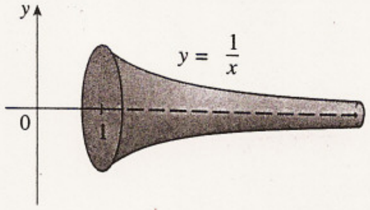
24. $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

CAS **25–26** □ Use um CAS para calcular a área exata da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo y. Se seu CAS tiver problemas para avaliar a integral, expresse a área da superfície como uma integral na outra variável.

25. $y = x^3, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$

26. $y = \ln(x + 1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

27. Se a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ é girada ao redor do eixo x, o volume do sólido resultante é finito (veja o Exercício 63 na Seção 7.8). Mostre que a área da superfície é infinita. (A superfície é mostrada na figura e é conhecida como **trombeta de Gabriel**.)



28. Se a curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, é girada ao redor do eixo x, calcule a área da superfície resultante.

29. Calcule a área da superfície gerada pela rotação de um laço da curva $8y^2 = x^2(1 - x^2)$ ao redor do eixo x.

30. Um grupo de engenheiros está construindo uma antena parabólica cujo formato será formado pela rotação da curva $y = ax^2$ ao redor do eixo y. Se a antena deve ter 10 pés de diâmetro e uma profundidade máxima de 2 pés, encontre o valor de a e a área da superfície da antena.

31. A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

é girada ao redor do eixo x para formar uma superfície chamada elipsóide. Calcule a área da superfície desse *elipsóide*.

32. Ache a área da superfície do toro no Exercício 59 na Seção 6.2.

33. Se a curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, é girada ao redor da reta horizontal $y = c$, onde $f(x) \leqslant c$, encontre a fórmula para a área da superfície resultante.

CAS 34. Use o resultado do Exercício 33 para montar uma integral para encontrar a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, ao redor da reta $y = 4$. Então use um CAS para avaliar a integral.

35. Calcule a área da superfície obtida pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ ao redor da reta $y = r$.

36. Mostre que a área da superfície de uma zona de uma esfera que está entre dois planos paralelos é $S = \pi d h$, onde d é o diâmetro da esfera e h é a distância entre os planos. (Note que S depende apenas da distância entre os planos e não de sua localização, desde que ambos os planos interceptem a esfera.)

37. A Fórmula 4 é válida apenas quando $f(x) \geqslant 0$. Mostre que quando $f(x)$ não é necessariamente positiva, a fórmula para a área da superfície torna-se

$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

38. Seja L o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, onde f é positiva e tem uma derivada contínua. Seja S_f a área da superfície gerada pela rotação da curva ao redor do eixo x. Se c é uma constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ e seja S_g a área da superfície correspondente gerada pela curva $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Expresse S_g em termos de S_f e L.