Linearização e Diferenciais

11–14 □ Verifique a aproximação linear dada em $a = 0$. Então determine os valores de x para os quais a aproximação linear é precisa dentro de 0,1.

11. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

12. $\operatorname{tg} x \approx x$

13. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$

14. $e^x \approx 1 + x$

15–20 □ Encontre a diferencial da função.

15. $y = x^4 + 5x$

16. $y = \cos \pi x$

17. $y = x \ln x$

18. $y = \sqrt{1 + t^2}$

19. $y = \dfrac{u+1}{u-1}$

20. $y = (1 + 2r)^{-4}$

21–26 □ (a) Encontre a diferencial dy e (b) calcule dy para os valores dados de x e dx.

21. $y = x^2 + 2x, \quad x = 3, \; dx = \frac{1}{2}$

22. $y = e^{x/4}, \quad x = 0, \; dx = 0{,}1$

23. $y = (x^2 + 5)^3, \quad x = 1, \; dx = 0{,}05$

24. $y = \sqrt{1 - x}, \quad x = 0, \; dx = 0{,}02$

25. $y = \cos x, \quad x = \pi/6, \; dx = 0{,}05$

26. $y = \operatorname{sen} x, \quad x = \pi/6, \; dx = -0{,}1$

27–30 □ Compute Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. Então esboce um diagrama como o da Figura 6, mostrando o segmento de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

27. $y = x^2, \quad x = 1, \; \Delta x = 0{,}5$

28. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \; \Delta x = 1$

29. $y = 6 - x^2, \quad x = -2, \; \Delta x = 0{,}4$

30. $y = 16/x, \quad x = 4, \; \Delta x = -1$

31–36 □ Use as diferenciais (ou, de maneira equivalente, uma aproximação linear) para estimar o número dado.

31. $\sqrt{36{,}1}$

32. $\sqrt[3]{1{,}02} + \sqrt[4]{1{,}02}$

33. $\frac{1}{10{,}1}$

34. $(1{,}97)^6$

35. $\operatorname{sen} 59°$

36. $\ln 1{,}07$

37–38 □ Explique por que a aproximação é razoável.

37. $\sec 0{,}08 \approx 1$

38. $(1{,}01)^6 \approx 1{,}06$

39. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível em computar (a) o volume do cubo e (b) a área da superfície do cubo.

40. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.
(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área do disco calculado. Qual o erro relativo?
(b) Use diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

41. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possível de 0,5 cm.
(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área superficial calculada. Qual o erro relativo?
(b) Use diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

42. Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

43. (a) Use diferenciais para achar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr.
(b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

44. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sangüíneo, o fluxo F (o volume de sangue por unidade de tempo passando por um dado ponto) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:

$$F = kR^4$$

(Isso é conhecido como a Lei de Poiseuille; mostraremos por que isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Um artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter do tipo balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.
Mostre que a variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

45. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com diferenciais (onde c denota uma constante e u e v são funções de x).
(a) $dc = 0$
(b) $d(cu) = c\,du$
(c) $d(u + v) = du + dv$
(d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$
(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
(f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

Teorema de Rolle
Teorema Valor Médio

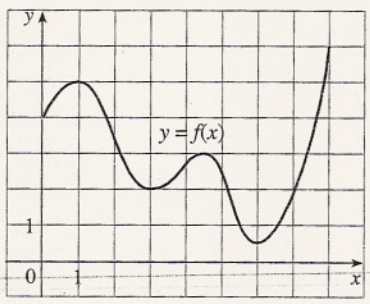
4.2 Exercícios

1–4 □ Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle sobre o intervalo dado. Então encontre todos os números c que satisfazem a conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad [0, 4]$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \quad [0, 2]$
3. $f(x) = \text{sen } 2\pi x, \quad [-1, 1]$
4. $f(x) = x\sqrt{x + 6}, \quad [-6, 0]$

. . . .

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$ mas não existe número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?
6. Seja $f(x) = (x - 1)^{-2}$. Mostre que $f(0) = f(2)$ mas não existe número c em $(0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?
7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.



8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.
9. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x + 4/x$ na janela de inspeção $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
   (b) Faça o gráfico da reta secante que passa pelos pontos $(1, 5)$ e $(8, 8{,}5)$ na mesma tela com f.
   (c) Encontre o número c que satisfaça a conclusão do Teorema do Valor Médio para essa função f e o intervalo $[1, 8]$. Então faça o gráfico da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ e note que ela é paralela à reta secante.
10. (a) Na janela de inspeção $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, faça o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$ e suas retas secantes que passam pelos pontos $(-2, -4)$ e $(2, 4)$. Use o gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos onde a reta tangente é paralela à reta secante.
    (b) Encontre os valores exatos dos números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[-2, 2]$ e compare com sua resposta da parte (a).

11–14 □ Verifique que a função satisfaça as hipóteses do Teorema do Valor Médio sobre o intervalo dado. Então encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$
12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$
13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$
14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

. . . .

15. Seja $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não existe valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?
16. Seja $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Mostre que não existe valor c tal que $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?
17. Mostre que a equação $x^5 + 10x + 3 = 0$ tem exatamente uma raiz real.
18. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\pi x/2) = 0$ tem exatamente uma raiz real.
19. Mostre que a equação $x^5 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-1, 1]$.
20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.
21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.
    (b) Mostre que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.
22. (a) Suponha que f seja diferenciável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem no mínimo uma raiz.
    (b) Suponha que f seja duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem no mínimo uma raiz real.
    (c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?
23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno pode ser $f(4)$?
24. Suponha que f seja contínua em $[2, 5]$ e $1 \leqslant f'(x) \leqslant 4$ para todo x em $(2, 5)$. Mostre que $3 \leqslant f(5) - f(2) \leqslant 12$.
25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leqslant 2$ para todo x?
26. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$. [*Sugestão:* Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]
27. Mostre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

Respostas :

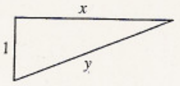
39. $y' = x^x(\ln x + 1)$ **41.** $y' = x^{\operatorname{sen} x}[\cos x \ln x + (\operatorname{sen} x)/x]$
43. $y' = (\ln x)^x(\ln \ln x + 1/\ln x)$ **45.** $e^x x^{e^x}(\ln x + 1/x)$
47. $y' = 2x/(x^2 + y^2 - 2y)$
49. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/(x-1)^n$

Exercícios 3.9 □

1. (a) 0 (b) 1 **3.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3{,}62686$
5. (a) 1 (b) 0
21. $\operatorname{cotgh} x = \frac{5}{4}$, $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, $\cosh x = \frac{5}{3}$, $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cossec} x = \frac{3}{4}$
23. (a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) 0 (f) 1
(g) ∞ (h) $-\infty$ (i) 0
31. $x \operatorname{senh} x + \cosh x$ **33.** $2x \cosh(x^2)$
35. $-(2 \operatorname{senh} x)/(1 + \cosh x)^2$
37. $-(t \operatorname{cossech}^2 \sqrt{1 + t^2})/\sqrt{1 + t^2}$ **39.** $e^t \operatorname{sech}^2(e^t)$
41. $3e^{\cosh 3x} \operatorname{senh} 3x$ **43.** $1/[2\sqrt{x}\,(1 - x)]$
45. $\operatorname{senh}^{-1}(x/3)$ **47.** $-1/\left(x\sqrt{x^2 + 1}\right)$
49. (a) 0,3572 (b) 70,34°
51. (b) $y = 2 \operatorname{senh} 3x - 4 \cosh 3x$ **53.** $\left(\ln\left(1 + \sqrt{2}\right), \sqrt{2}\right)$

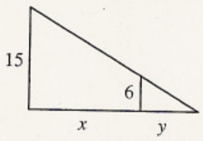
Exercícios 3.10 □

1. $dV/dt = 3x^2\, dx/dt$ **3.** 70
5. (a) A altura do aeroplano é 1 mi e sua velocidade é de 500 mi/h.
(b) A taxa segundo a qual a distância do aeroplano à estação é crescente quando o aeroplano está a 2 mi da estação.
(c)



(d) $y^2 = x^2 + 1$
(e) $250\sqrt{3}$ mi/h

7. (a) A altura do poste (15 pés), a altura do homem (6 pés), e a velocidade do homem (5 pés/s)
(b) A taxa segundo a qual o topo de sua sombra está se movendo quando ele está a 40 pés do poste
(c)

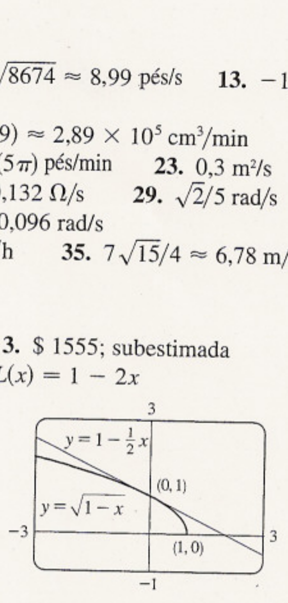


(d) $\dfrac{15}{6} = \dfrac{x + y}{y}$ (e) 25/3 pés

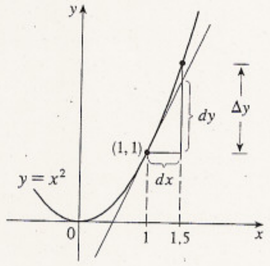
9. 65 mi/h **11.** $837/\sqrt{8674} \approx 8{,}99$ pés/s **13.** $-1{,}6$ cm/min
15. $\frac{720}{13} \approx 55{,}4$ km/h
17. $(10.000 + 800.000\pi/9) \approx 2{,}89 \times 10^5$ cm³/min
19. $\frac{10}{3}$ cm/min **21.** $6/(5\pi)$ pés/min **23.** 0,3 m²/s
25. 80 cm³/min **27.** 0,132 Ω/s **29.** $\sqrt{2}/5$ rad/s
31. (a) 360 pés/s (b) 0,096 rad/s
33. $1650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h **35.** $7\sqrt{15}/4 \approx 6{,}78$ m/s

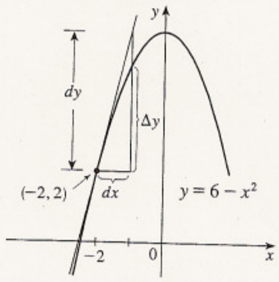
Exercícios 3.11 □

1. 148 °F; subestimada **3.** \$ 1555; subestimada
5. $L(x) = 3x - 2$ **7.** $L(x) = 1 - 2x$
9. $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0{,}9} \approx 0{,}95$,
$\sqrt{0{,}99} \approx 0{,}995$



11. $-0{,}69 < x < 1{,}09$ **13.** $-0{,}045 < x < 0{,}055$
15. $dy = (4x^3 + 5)\,dx$ **17.** $dy = (1 + \ln x)\,dx$
19. $dy = -2/(u - 1)^2\,du$ **21.** (a) $dy = (2x + 2)\,dx$ (b) 4
23. (a) $dy = 6x(x^2 + 5)^2\,dx$ (b) 10,8
25. (a) $dy = -\operatorname{sen} x\,dx$ (b) $-0{,}025$
27. $\Delta y = 1{,}25$, $dy = 1$ **29.** $\Delta y = 1{,}44$, $dy = 1{,}6$





31. $6 + \frac{1}{120} \approx 6{,}0083$ **33.** 0,099 **35.** 0,857
39. (a) 270 cm³ (b) 36 cm²
41. (a) $84/\pi \approx 27$ cm²; $\frac{1}{84} \approx 0{,}012 = 1{,}2\%$
(b) $1764/\pi^2 \approx 179$ cm³; $\frac{1}{56} \approx 0{,}018 = 1{,}8\%$
43. (a) $2\pi rh\,\Delta r$ (b) $\pi(\Delta r)^2 h$
47. (a) 4,8, 5,2 (b) Muito grande

Capítulo 3 Revisão □

Testes Falso-Verdadeiro

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadeiro **11.** Verdadeiro **13.** Falso

Exercícios

1. $y' = 2(7x + 18)(x + 2)^7(x + 3)^5$
3. $y' = (9 - 2x)/(9 - 4x)^{3/2}$ **5.** $y' = -\operatorname{sen} x \cos(\cos x)$
7. $e^{-1/x}(1 + 1/x)$ **9.** $y' = -\left(\sec^2\sqrt{1 - x}\right)/\left(2\sqrt{1 - x}\right)$
11. $y' = 8/(8 - 3x)^2$ **13.** $y' = 2 \sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta$
15. $y' = -(x - 1)^{-2}$ **17.** $y' = (1 + c^2)e^{cx} \operatorname{sen} x$
19. $y' = e^{x + e^x}$ **21.** $y' = (1 - 2xy^3)/(3x^2y^2 + 6y + 4)$
23. $y' = \frac{1}{5}(x \operatorname{tg} x)^{-4/5}(\operatorname{tg} x + x \sec^2 x)$ **25.** $y' = 2x/(2y + 1)$
27. $y' = 2(2x - 5)/[(x - 2)^2(x - 3)^2]$
29. $y' = (2x - 1)/[(x^2 - x) \ln 10]$
31. $y' = \operatorname{cotg} x - \operatorname{sen} x \cos x$
33. $y' = \cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{1 + x^3}\right)\left(\sec^2\sqrt{1 + x^3}\right)\left(3x^2/\left(2\sqrt{1 + x^3}\right)\right)$
35. $y' = -6x \operatorname{cossec}^2(3x^2 + 5)$ **37.** $y' = -\operatorname{sen}(2 \operatorname{tg} x) \sec^2 x$
39. $y' = \dfrac{(x - 2)^4(3x^2 - 55x - 52)}{2\sqrt{x + 1}\,(x + 3)^8}$
41. $y' = 2x^2 \cosh(x^2) + \operatorname{senh}(x^2)$ **43.** $y' = 3 \operatorname{tgh} 3x$
45. $(\cosh x)/\sqrt{\operatorname{senh}^2 x - 1}$ **47.** -120 **49.** $-5x^4/y^{11}$
53. $y = -\frac{3}{2}x + 4$ **55.** $y = 4x + \sqrt{3} - (4\pi/3)$
57. $y = \frac{3}{2}x + \ln 2$
59. (a) $(10 - 3x)/\left(2\sqrt{5 - x}\right)$ (b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -x + 8$
(c)