Prova 1

Análise Funcional - SMA 5717

Professor: Everaldo de Mello Bonotto

Nome:____

N^o USP: ____

23.09.2010

Questões	Notas
01.^{a}	
02.^{a}	
03.^{a}	
04.^{a}	
05.^{a}	
06.^{a}	
07.^{a}	
08.^{a}	
09.^{a}	
10.^{a}	
Total	

1. Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado. Considere $(M, \|\cdot\|_M)$ e $(N, \|\cdot\|_N)$ subespaços vetoriais normados de X tais que as aplicações identidades $(M, \|\cdot\|_M) \to (M, \|\cdot\|_X)$ e $(N, \|\cdot\|_N) \to (N, \|\cdot\|_X)$ sejam contínuas. Seja $M + N = \{m + n \in X : m \in M, n \in N\}$. Para $x \in M + N$, seja
$$\|x\|_{M+N} = \inf\{\|m\|_M + \|n\|_N : m \in M, n \in N, x = m + n\}.$$
   a) Prove que $\|\cdot\|_{M+N}$ é uma norma em $M + N$.

   b) Mostre que se $(M, \|\cdot\|_M)$ e $(N, \|\cdot\|_N)$ são completos, então $(M + N, \|\cdot\|_{M+N})$ é completo.

2. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Existe um conjunto de vetores $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\right\} = X$?

3. Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $a < b$. Dizemos que uma função $u : (a, b) \to X$ é fracamente contínua (diferenciável), se $f \circ u : (a, b) \to \mathbb{K}$ for contínua (diferenciável), para cada $f \in X^*$. Se a derivada de $f(u(t))$ for da forma $f(v(t))$ para alguma função $v : (a, b) \to X$, então dizemos que v é chamada derivada fraca de u. Mostre que, se u for fracamente diferenciável em (a, b) com derivada fraca identicamente nula, então $u(t)$ será constante.

4. Seja X um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|_i : X \to [0, +\infty)$, $i = 1, 2$, duas normas tais que X é um espaço de Banach com qualquer dessas normas. Suponha que exista $c > 0$ tal que $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$.

   a) Mostre que $(X, \|\cdot\|_1)$ é separável se, e somente se $(X, \|\cdot\|_2)$ é separável.

   b) Encontre um espaço vetorial X e duas normas em X tais que com uma delas o espaço é separável e com a outra não.

5. Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma seqüência $\{x_n\}$ de X é uma seqüência de Cauchy fraca, se $x_n \neq x_m$ sempre que $n \neq m$, e para todo $f \in X^*$ a seqüência $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$.

a) Mostre que uma seqüência de Cauchy fraca $\{x_n\}$ é limitada.

b) Seja $A \subset X$ tal que todo subconjunto não-vazio de A contém uma seqüência de Cauchy fraca. Mostre que A é limitado.

6. Sejam X um espaço de Banach, X' o dual algébrico de X (o espaço vetorial formado pelos funcionais lineares definidos em X) e X^* o espaço dual topológico de X (o espaço vetorial formado pelos funcionais lineares contínuos definidos em X). Mostre que se X tem dimensão infinita então $X^* \subset X'$ com $X^* \neq X'$.

7. Seja X um espaço vetorial normado e considere o espaço das seqüências de X

$$\mathcal{F} = \left\{ \{x_j\} : x_j \in X, \ \text{ e } \forall \phi \in X^*, \ \sum_{j=1}^{+\infty} |\phi(x_j)|^p < \infty \right\},$$

onde $p > 1$. Mostre que para cada seqüência fixada $\{x_j\}$ de $\mathcal{F}$, a aplicação $T_{\{x_j\}} : X^* \to \ell_p$, definida por $T_{\{x_j\}}(\phi) = \{\phi(x_j)\}$, é uma aplicação linear limitada.

8. Seja X um espaço vetorial normado e $M > 0$. Sejam $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ elementos de X* e $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ reais fixados. Mostre que as duas propriedades são equivalentes:

a) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in X$ tal que $\|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$ e $f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i \ \forall i = 1, 2, ..., n$.

b) $\displaystyle \left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\|$, $\forall \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ reais.

9. Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma função satisfazendo

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y),$$

$x, y \in X$, $x \neq y$. Mostre que f possui um único ponto fixo em X. Se substituirmos a hipótese de (X, ρ) ser compacto por (X, ρ) ser completo, o resultado ainda continua sendo válido?

10. Considere o espaço de Banach $(\mathcal{C}_{[1]}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, onde $\mathcal{C}_{[1]}(\mathbb{R})$ representa o espaço vetorial das funções contínuas $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que são periódicas de período 1, e $\|x\| = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, $x \in \mathcal{C}_{[1]}(\mathbb{R})$. Dada uma função $x \in \mathcal{C}_{[1]}(\mathbb{R})$ e $n \in \mathbb{Z}$, o número complexo $c_n[x] = \displaystyle\int_0^1 x(t) e^{-2i\pi nt} dt$ é denominado de coeficiente de Fourier de ordem n da função x, e a séria $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n[x] e^{2i\pi nt}$ é chamada de série de Fourier de x.

a) Mostre que as reduzidas da série de Fourier é dada por $S_n[x] = \displaystyle\int_0^1 \frac{sen[(2n+1)\pi(t-s)]}{sen[\pi(t-s)]} x(s) ds.$

b) Mostre que o conjunto das funções $x \in \mathcal{C}_{[1]}(\mathbb{R})$ cuja série de Fourier converge no ponto $t = 0$ é de primeira categoria em $\mathcal{C}_{[1]}(\mathbb{R})$.

Obs.: $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$.