Iniciação Científica:
Sobre diferenciabilidade de funções definidas positivas na reta real

Processo Número 117019/2022-4

Pedro Piacentini
Orientadora: Ana Paula Peron

Período: 01/08/2022 a 31/07/2022

Sumário

1 Introdução **2**

2 Pré-requisitos **3**

2.1 Sequências e Séries Numéricas 3

2.1.1 Sequências e Limite de Sequências numéricas 3

2.1.2 Séries Numéricas 4

2.1.2.1 Definição e propriedades básicas 4

2.1.2.2 Critério de comparação 6

2.1.2.3 Série absolutamente convergente 7

2.1.2.4 Critério da razão 8

3 Teoria básica de funções definidas positivas **10**

3.1 Matrizes e funções definidas positivas 10

Referências Bibliográficas **16**

Capítulo 1

Introdução

As funções definidas positivas desempenham um papel crucial em várias áreas da matemática e suas aplicações. Este estudo teve como partida a referência bibliográfica [Berg et al., 1984], que estabeleceu os fundamentos dessas funções e sua relevância. A pesquisa foi realizada por meio de encontros semanais, nos quais revisávamos nosso progresso e definíamos nossos objetivos de estudo.Além disso, conduzimos estudos individuais para aprofundar nosso conhecimento e propriedades dessas funções.

O presente projeto foi uma colaboração envolvendo eu, outro colega de estudo e uma orientadora. Juntos, buscamos explorar e compreender os conceitos-chave apresentados por Berg. Para uma compreensão mais abrangente, também investigamos sequências numéricas, com foco na bibliografia de referência de [Guidorizzi, 2001].

Para internalizar efetivamente os princípios e teorias apresentados nessas fontes, adotamos uma abordagem prática. Isso envolveu examinar detalhadamente cada passagem e resolver exemplos, permitindo-nos visualizar a aplicação prática dos conceitos teóricos. Neste relatório, detalhamos esses exemplos.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar os resultados desses estudos detalhados, destacando a compreensão adquirida sobre funções definidas positivas e sequências numéricas.

Este estudo visa contribuir para o entendimento mais amplo desses tópicos matemáticos, que são fundamentais para o entendimento do artigo [Buescu and Paixão, 2011], que é o objetivo principal do projeto. A seguir, apresento uma análise detalhada do meu processo de estudo individual e os resultados obtidos.

Capítulo 2

Pré-requisitos

Os resultados apresentados neste primeiro capítulo são baseados no livro [Guidorizzi, 2001]. O conteúdo deste capítulo fornece a base necessária para uma compreensão mais aprofundada dos tópicos explorados no capítulo subsequente.

2.1 Sequências e Séries Numéricas

2.1.1 Sequências e Limite de Sequências numéricas

Uma sequência de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto dos números naturais.

Exemplo 2.1.1. *Seja a sequência de termo geral* $a_n = 2^n$. *Temos:*

$$a_0 = 2^0,\ a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2,\ \ldots$$

Exemplo 2.1.2. *Seja a sequência de termo geral* $s_n = \sum_{k=1}^{n} k$. *Temos:*

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + 2,\ s_3 = 1 + 2 + 3,\ \ldots$$

Definição 2.1.1. *Se* $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n$ *for finito, então a sequência* $\{a_n\}$ *é convergente*

Exemplo 2.1.3. *Calcule* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 5}$. *Temos:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{1}{n^2}}{2 + \dfrac{5}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Observação 2.1.1. *Seja f uma função a valores reais definida no intervalo $[q,\ +\infty[$, q natural, e a sequência de termo geral*

$$a_n = f(n),\ n \geq q.$$

Então

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

desde que o limite do segundo membro exista.

Teorema 2.1.1. *Se $\{a_n\}$ é crescente e limitada, então $\{a_n\}$ é convergente.*

Exemplo 2.1.4. *Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$. Temos:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \quad &= \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{1/x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}.
\end{aligned}$$

Note que, usando a Regra de L'Hopital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1.$$

2.1.2 Séries Numéricas

2.1.2.1 Definição e propriedades básicas

Definição 2.1.2. *Seja $\{a_n\}$, uma sequência numérica, onde $n \geq q$ e $q \in \mathbb{N}$. O limite da sequência de termo geral*

$$s_n = \sum_{k=q}^{n} a_k$$

é chamado de série numérica associada à sequência a_n. Os números s_n são denominados somas parciais da série e a_n é o termo geral da série.

Definição 2.1.3. *O limite da série, quando existe, é chamado de soma da série e é dado por*

$$\sum_{k=q}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=q}^{n} a_k.$$

A série será convergente, se sua soma for finita, caso contrário a série será divergente.

Teorema 2.1.2 (Propriedades básicas)**.**

- *Seja α um número real dado. Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ for convergente, então $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha a_k$ também é convergente e vale:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

- *Se* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ *forem convergentes, então* $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k)$ *também é e vale:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k+\sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

- $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *será convergente se e somente se, para todo natural* p, $\sum_{k=p}^{+\infty} a_k$ *for convergente. Além disso, se* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *for convergente, temos, para* $p \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k=\sum_{k=0}^{p-1} a_k+\sum_{k=p}^{+\infty} a_k.$$

Teorema 2.1.3. *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente, então* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

Exemplo 2.1.5. *(Série geométrica). Mostre que, para* $0<|r|<1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k=\dfrac{1}{1-r}$.

Pela soma de termos de uma PG de razão r, temos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k=\lim_{n\to+\infty}(1+r^2+...+r^n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\right)=\frac{-1}{r-1}.$$

Note que, como $|r|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n+1}=0$.

Observação 2.1.2. *A série* $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$, *onde* α *é um real, será chamada de série harmônica de ordem* α. *Veremos a seguir que a série harmônica de ordem* α *é convergente para* $\alpha>1$ *e divergente para* $\alpha\leq 1$.

Exemplo 2.1.6. *(Série harmônica). Considere a série harmônica* $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$.

Note que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^\alpha}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=\frac{1}{(n+1)^\alpha}>0.$$

Portanto, a sequência de termo geral $s_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}$ é crescente. Além disso, temos que:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}\leq 1+\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Temos que para $\alpha>1$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right]=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Portanto $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ é crescente e limitada superiormente, com soma s finita:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Logo a série $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ com $\alpha > 1$, pela Definição 2.1.3, é convergente.

Para os próximos casos, note que:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Agora para $\alpha = 1$ e $\alpha < 1$, respectivamente, temos:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1 - \alpha} - \frac{1}{1 - \alpha} = +\infty.$$

Portanto para $\alpha \leq 1$ a série é divergente.

Exemplo 2.1.7. *(Série telescópica). Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e suponha que $a_k = b_k - b_{k+1}$, $k \geq 1$.*

a) Verifique que $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_1 - b_{n+1}$

b) Conclua que se $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$ com b real, então a soma da série será finita e igual a $b_1 - b$.

a)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + ... - b_n + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}.$$

b)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - b.$$

2.1.2.2 Critério de comparação

Definição 2.1.4. *Sejam as séries $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. Suponhamos que exista um natural p tal que, para todo $k \geq p$, $0 \leq a_k \leq b_k$. Nestas condições, tem-se:*

- *$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ convergente $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ convergente.*
- *$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ divergente $\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ divergente.*

Exemplo 2.1.8. *A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k} \operatorname{sen} \dfrac{1}{k}$ é convergente ou divergente?*

Como para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{sen} x < x$. Temos que

$$0 \leq \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k} \frac{1}{k}.$$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente (obs. 2.1.2), segue do critério de comparação que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{1}{k}$ é convergente.

Exemplo 2.1.9. *A série* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2+2k+1}$ *é convergente ou divergente?*

Temos

$$\frac{k}{k^2+2k+1} = \frac{\frac{k}{k^2}}{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k} \frac{1}{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}$$

e, para todo $k \geq 1$,

$$\frac{1}{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{k}{k^2} \frac{1}{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}} \geq \frac{k}{k^2} \frac{1}{4}.$$

Portanto

$$\frac{k}{k^2+k+1} \geq \frac{1}{4k}$$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k} = +\infty$, (obs. 2.1.2) temos, pelo critério de comparação, que a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k^2+2k+1}$ é divergente.

2.1.2.3 Série absolutamente convergente

Definição 2.1.5. *Dizemos que a série* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *é absolutamente convergente se* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ *for convergente.*

Exemplo 2.1.10. *Verifique que a série* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ *é absolutamente convergente.*

Como para todo $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ temos que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente, pelo critério de comparação $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right|$ é convergente. Portanto a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{senk}{k^2}$ é absolutamente convergente.

Teorema 2.1.4. *Se* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ *é convergente, então* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$*, também é convergente. Em outras palavras, se a série é absolutamente convergente então ela é convergente.*

Exemplo 2.1.11. *A série* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{senk}{k^2}$ *é convergente ou divergente?*

Como visto no exemplo anterior, a série é absolutamente convergente, portanto, pelo teorema acima, a série é convergente.

2.1.2.4 Critério da razão

Seja a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ com $a_k \neq 0$ para todo natural k. Suponhamos que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ exista, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Temos que:

- Se $L < 1$, a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ será convergente.
- Se $L > 1$ ou $L = +\infty$, a série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ será divergente.
- Se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo 2.1.12. *Determine x para que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ seja convergente.*

Verifiquemos, antes de aplicar o critério da razão, o comportamento da série para $x = 0$: é imediato que a soma da série é 0, portanto, convergente. Supondo $x \neq 0$ apliquemos o critério da razão:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)x}{n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = |x|.$$

Pelo critério da razão, sabemos que a série converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Verifiquemos agora para $|x| = 1$: quando $x = 1$ a série diverge afinal $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Para $x = -1$ também diverge, pois $\lim\limits_{n\to+\infty} n(-1)^n$ não existe. Logo, a série converge apenas para $|x| < 1$.

Exemplo 2.1.13. *Mostre que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Aplicando o critério da razão, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo critério da razão, para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ a série dada converge.

Exemplo 2.1.14. *Utilizando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, mostre que para todo x, tem-se que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.*

Aplicando a fórmula de Taylor ao redor do ponto 0 temos

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^0}{n!}(x-0)^n + \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\theta_x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0<\theta_x<1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\theta_x}}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + e^{\theta_x} \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Agora basta verificar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. Para $x=0$ é imediato. Para $x \neq 0$ Tome x_0 como o maior natural tal que $x_0 \leq |x|$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n-1} \cdot \frac{x}{n-2} \cdot \ ... \ \cdot \frac{x}{x_0+1} \cdot \frac{x^{x_0}}{x_0!} \\
&= \frac{x^{x_0}}{x_0!} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n-1} \cdot \frac{x}{n-2} \cdot \ ... \ \cdot \frac{x}{x_0+1}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\left| \frac{x}{n-1} \cdot \frac{x}{n-2} \cdot \ ... \ \cdot \frac{x}{x_0+1} \right| < 1.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$, temos que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Capítulo 3

Teoria básica de funções definidas positivas

Neste capítulo, concentramos nossa atenção nas funções definidas positivas. Através de análises minuciosas de cada passagem, buscamos desvendar as teorias e propriedades fundamentais que sustentam essa área da matemática. Nossos estudos são guiados pelo livro de referência [Berg et al., 1984].

3.1 Matrizes e funções definidas positivas

Os resultados apresentados neste capítulo são baseados no livro [Berg et al., 1984].

Definição 3.1.1. *Uma matriz $n \times n$ de números complexos $A = (a_{ij})$ é definida positiva se e somente se*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} a_{ij} = c^* A c \geq 0$$

para todo $n \geq 1$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Definição 3.1.2. *Seja X um conjunto não vazio. A função $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ é um núcleo definido positivo se e somente se*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \varphi(x_i, x_j) \geq 0$$

para todo $n \geq 1$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Definição 3.1.3. *Seja X um conjunto não vazio. A função $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ é um núcleo definido negativo se e somente se*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \varphi(x_i, x_j) \leq 0$$

para todo $n \geq 1$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ com $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Definição 3.1.4. *Uma matriz quadrada complexa $A = (a_{ij})$ é dita hermitiana se $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.*

A definição a seguir foi retirada do livro [Anton and Rorres, 2010].

Definição 3.1.5. *Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo $\vec{x}$ em $\mathbb{R}^n$ é denominado autovetor de A se existir um escalar λ tal que*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

O escalar λ é denominado autovalor de A.

Proposição 3.1.1. *Se φ é definido positivo em $X \times X$, então $\varphi(x,\, x) \geq 0$ para todo $x \in X$, i.e. φ é não negativo na diagonal de $X \times X$.*

Prova. Seja φ um núcleo definido positivo. Então $(a_{ij}) = (\varphi(x_i, x_j))$ é uma matriz definida positiva. Se c é um vetor onde apenas $c_p = 1$ não é nulo, então

$$(\varphi(x_i, x_j)) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \cdots & c_p & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{c_p} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{pp} \geq 0.$$

Proposição 3.1.2. *Se φ é definido positivo em $X \times X$, então φ é hermitiano.*

Prova. Sejam φ um núcleo definido positivo e x_1, ..., $x_n \in X$. Então $(a_{ij}) = (\varphi(x_i, x_j))$ é uma matriz $n \times n$ definida positiva. Se $c \in \mathbb{R}^n$ é um vetor onde apenas $c_p = 1$ e $c_q = 1$ não são nulos, então

$$(\varphi(x_i, x_j)) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cdots & c_p & \cdots & c_q & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \overline{c_p} \\ \vdots \\ \overline{c_q} \\ \vdots \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a_{pp} + a_{pq} + a_{qp} + a_{qq} \geq 0 \\ &\Rightarrow a_{pq} + a_{qp} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \mathfrak{Re}(a_{pq}) + \mathfrak{Re}(a_{qp}) + \mathfrak{Im}(a_{pq}) + \mathfrak{Im}(a_{qp}) = \mathfrak{Re}(a_{pq} + a_{qp}) \\ &\Rightarrow \mathfrak{Im}(a_{pq}) = -\mathfrak{Im}(a_{qp}). \end{aligned}$$

Além disso, para c um vetor onde apenas $c_q = -1$ e $c_p = 1$ não são nulos, p e $q \leq n$,

$$\begin{bmatrix} \cdots & c_p & \cdots & c_q & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \overline{c_p} \\ \vdots \\ \overline{c_q} \\ \vdots \end{bmatrix} = a_{pp} - ia_{pq} + ia_{qp} + a_{qq} \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow -ia_{pq} + ia_{qp} = i(-\mathfrak{Re}(a_{pq}) - \mathfrak{Im}(a_{pq}) + \mathfrak{Re}(a_{qp}) + \mathfrak{Im}(a_{qp})) \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow -\mathfrak{Re}(a_{pq}) - \mathfrak{Im}(a_{pq}) + \mathfrak{Re}(a_{qp}) + \mathfrak{Im}(a_{qp}) = ix, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow -\mathfrak{Re}(a_{pq}) + \mathfrak{Re}(a_{qp}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(a_{pq}) = \mathfrak{Re}(a_{qp}).
\end{aligned}
$$

Com isso, $a_{pq} = \overline{a_{qp}}$.

Proposição 3.1.3. *Uma matriz $n \times n$ de números complexos $A = (a_{ij})$ é definida positiva se e somente se todos autovalores de A forem não negativos.*

Prova. Se uma matriz $n \times n$ de números complexos $A = (a_{ij})$ é definida positiva e o escalar λ é um autovalor de A pelas Definições 3.1.1 e 3.1.5, temos que

$$
c^* A c \geq 0 \Rightarrow c^* \lambda c \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0.
$$

Proposição 3.1.4. *Um núcleo φ é definido positivo em $X \times X$ se somente se para todo subconjunto $X_0 \subseteq X$ a restrição de φ para $X_0 \times X_0$ for definida positiva.*

Prova. Sejam φ um núcleo definido positivo e x_1, ..., $x_n \in X$. Então $(a_{ij}) = (\varphi(x_i, x_j))$ é uma matriz $n \times n$ positiva. Se $c \in \mathbb{R}^n$ é um vetor onde $c_n = 0$. Então

$$
\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_{n-1} & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \overline{c_1} \\ \vdots \\ \overline{c_{n-1}} \\ 0 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \overline{c_1} \\ \vdots \\ \overline{c_{n-1}} \end{bmatrix} \geq 0.
$$

Proposição 3.1.5. *Para qualquer núcleo definido positivo φ vale a inequação*

$$
|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).
$$

Prova. Seja $\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{pmatrix}$ uma matriz 2×2 hermitiana. Então para z, $w \in \mathbb{C}$ temos

$$
\begin{aligned}
(w\ z) \begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{z} \end{pmatrix} \quad &= a|w|^2 + bz\overline{w} + \overline{b}\overline{z}w + d|z|^2 \\
&= a|w|^2 + bz\overline{w} + \overline{bz\overline{w}} + d|z|^2 \\
&= a|w|^2 + 2\mathfrak{Re}(bz\overline{w}) + d|z|^2 \\
&= a|w|^2 + 2\mathfrak{Re}(bz\overline{w}) + d|z|^2 + \frac{|bz|^2}{a} - \frac{|bz|^2}{a} \\
&= a|w|^2 + 2\mathfrak{Re}(bz\overline{w}) + \frac{|bz|^2}{a} + d|z|^2 - \frac{|bz|^2}{a} \\
&= a\left(|w|^2 + \frac{2\mathfrak{Re}(bz\overline{w})}{a} + \frac{|bz|^2}{a^2}\right) + d|z|^2 - \frac{|bz|^2}{a} \\
&= a\left|w + \frac{bz}{a}\right|^2 + \frac{ad|z|^2}{a} - \frac{|bz|^2}{a} \\
&= a\left|w + \frac{bz}{a}\right|^2 + \frac{|z|^2}{a}(ad - |b|^2) \qquad \text{(para } a \neq 0\text{)}.
\end{aligned}
$$

Portanto a matriz é definida positiva se somente se $ad - |b|^2 \geq 0$. Além disso se φ é um núcleo definido positivo, de forma análoga à prova da Proposição 3.1.2 com um vetor onde apenas 2 elementos são não nulos (os elementos na coluna x e y) podemos concluir que $\begin{bmatrix} \varphi(x,x) & \varphi(x,y) \\ \varphi(y,x) & \varphi(y,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x,x) & \varphi(x,y) \\ \overline{\varphi(x,y)} & \varphi(y,y) \end{bmatrix}$ é definida positiva. Portanto,

$$\varphi(x,x)\varphi(y,y) - |\varphi(x,y)|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

Proposição 3.1.6. *Se $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função arbitrária, então $\varphi(x,y) := f(x)\overline{f(y)}$ é definido positivo.*

Prova. Sejam x_1, ..., $x_n \in X$ e c_1, ..., $c_n \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\varphi(x_i,x_j) \qquad &= \sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j} f(x_i)\overline{f(x_j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j f(x_j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i f(x_i)} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.1.1. $\psi(x,y) = (x-y)^2$ *é definido negativo em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Prova. Sejam x_1, ..., $x_n \in \mathbb{R}$ e c_1, ..., $c_n \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j (x_i - x_j)^2 \qquad &= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j ({x_i}^2 - 2x_i x_j + {x_j}^2) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j {x_i}^2 - 2c_i c_j x_i x_j + c_i c_j {x_j}^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j {x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j {x_j}^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j {x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j {x_j}^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} c_j {x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} c_j {x_j}^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j x_i x_j \\
&= -2\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j x_i x_j = -2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i x_i c_j x_j \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -2\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = -2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.1. *Sejam $\varphi_1, \varphi_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ núcleos positivos definidos. Então $\varphi_1 \cdot \varphi_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ também é definido positivo.*

Prova. Se $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$ são matrizes definidas positivas $n \times n$, então basta mostrar que $C := (a_{jk} b_{jk})$ é definida positiva.

Para seguir será necessário utilizar um conhecimento de álgebra linear. O mesmo diz que existem n funções $f_1, ..., f_n : \{1, ..., n\} \to \mathbb{C}$ tais que

$$a_{jk} = \sum_{p=1}^{n} f_p(j)\overline{f_p(k)} \qquad \text{onde } j, k = 1, ..., n.$$

Sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ arbitrário, então

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} a_{jk} b_{jk} &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \sum_{p=1}^{n} f_p(j)\overline{f_p(k)} b_{jk} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} c_j f_p(j) \overline{c_k f_p(k)} b_{jk} \geq 0. \end{aligned}$$

Corolário 3.1.1. *Seja $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ definida positiva tal que $|\varphi(x, y)| < p$ para todo $(x, y) \in X \times X$. Então se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < p\}$ e $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 0$, a composta $f \circ \varphi$ é também definida positiva. Em particular, se φ é definida positiva, então $exp(\varphi)$ também é. Note que pelo exemplo 2.1.14 $exp(\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}\varphi^n$*

Prova. Pelo Teorema 3.1.1 para todo $n \in \mathbb{N}$ o núcleo φ^n é definido positivo, portanto $\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi^n$ é positivo definido para todo $N \in \mathbb{N}$ e o mesmo ocorre no seu limite pontual $f \circ \varphi$.

Teorema 3.1.2. *Seja $a = (a_{jk})$ alguma matriz hermitiana $n \times n$. Então A é estritamente definida positiva se e somente se*

$$det((a_{jk})_{j,k \leq p}) > 0$$

onde $p = 1, ..., n$.

Prova. Procedemos por indução em n. Se $n = 1$ o único elemento da matriz deverá ser positivo, portanto seu determinante também. Suponhamos que o teorema vale para $n - 1$. Pela suposição $a_{11} > 0$. Subtraindo $(a_{1k}/a_{11})a_{j1}$ das ks-ésimas colunas, com $k = 2, ..., n$, a nova matriz $((a'_{jk})_{j,k \leq p})$ (onde a primeira coluna se mantém e quando $k \geq 2$ temos $a'_{jk} = a_{jk} - (a_{1k}/a_{11})a_{j1}$) possui os mesmos menores complementares que a_{jk}, ie,

$$det((a_{jk})_{j,k \leq p}) = det((a'_{jk})_{j,k \leq p}), \qquad \text{onde } p = 1, ..., n.$$

Se mudarmos agora a matriz (a'_{jk}) para B, onde

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

então $det((b_{jk})_{j,k\leq p}) = det((a_{jk})_{j,k\leq p})$ para todo p. Além disso, B é hermitiana. Agora

$$det((b_{jk})_{j,k\leq p}) = a_{11} det \begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{p2} & \cdots & a'_{pp} \end{pmatrix} > 0$$

para $p = 2, 3, ..., n$. Isto implica, pela suposição de que a matriz $(n-1)\times(n-1)$, que

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

é estritamente positiva definida. Sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, temos

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} a_{jk} \quad = \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a_{jk} + \sum_{j=2}^{n} c_j \overline{c_1} a_{j1} + \sum_{k=2}^{n} c_1 \overline{c_k} a_{1k} + c_1 \overline{c_1} a_{11}.$$

Note que para $\sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a_{jk}$ temos $a_{jk} = a'_{jk} + \dfrac{a_{1k}a_{j1}}{a_{11}}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} a_{jk} \quad &= \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k}\left(a'_{jk} + \frac{a_{1k}a_{j1}}{a_{11}}\right) + \sum_{j=2}^{n} c_j \\
&= \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a'_{jk} + \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k}\frac{a_{1k}a_{j1}}{a_{11}} + \sum_{j=2}^{n} c_j \overline{c_1} a_{j1} + \sum_{k=2}^{n} c_1 \overline{c_k} a_{1k} + |c_1|^2 a_{11} \\
&= \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a'_{jk} \\
&+ \frac{1}{a_{11}} \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a_{1k} a_{j1} + \frac{a_{11}}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} c_j \overline{c_1} a_{j1} + \sum_{k=2}^{n} c_1 \overline{c_k} a_{1k}\right) + \frac{1}{a_{11}}|c_1|^2 a_{11}^2 \\
&= \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a'_{jk} \\
&+ \frac{1}{a_{11}}\left[\sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a_{1k} a_{j1} + a_{11}\left(\sum_{j=2}^{n} c_j \overline{c_1} a_{j1} + \sum_{k=2}^{n} c_1 \overline{c_k} a_{1k}\right) + |c_1|^2 a_{11}^2\right] \\
&= \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a'_{jk} \\
&+ \frac{1}{a_{11}}\left[\sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1} \sum_{k=2}^{n} \overline{c_k} a_{1k} + a_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} c_k \overline{c_1} a_{k1} + \sum_{k=2}^{n} c_1 \overline{c_k} a_{1k}\right) + (|c_1| a_{11})^2\right] \\
&= \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a'_{jk} + \frac{1}{a_{11}}\left[\sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1} \sum_{j=2}^{n} \overline{c_j a_{j1}} + a_{11}\left(\sum_{k=2}^{n} c_k \overline{c_1 a_{k1}} + \sum_{k=2}^{n} \overline{c_k} c_1 a_{1k}\right) + (|c_1| a_{11})^2\right] \\
&= \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a'_{jk} + \frac{1}{a_{11}}\left[\left|\sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1}\right|^2 + 2a_{11}\mathfrak{Re}\left(c_1 \sum_{k=2}^{n} \overline{c_k} a_{1k}\right) + (|c_1| a_{11})^2\right].
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} c_j a_{j1}\right|^2 &= \left|c_1 a_{11} + \sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1}\right|^2 \\
&= (c_1 a_{11} + \sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1}) \cdot (\overline{c_1 a_{11}} + \sum_{j=2}^{n} \overline{c_j a_{j1}}) \\
&= (|c_1| a_{11})^2 + c_1 a_{11} \sum_{j=2}^{n} \overline{c_j a_{j1}} + \overline{c_1 a_{11}} \sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1} + \left|\sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1}\right|^2 \\
&= (|c_1| a_{11})^2 + 2 a_{11} \mathfrak{Re}\left(c_1 \sum_{k=2}^{n} \overline{c_k} a_{1k}\right) + \left|\sum_{j=2}^{n} c_j a_{j1}\right|^2 .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} a_{jk} = \sum_{j,k=2}^{n} c_j \overline{c_k} a'_{jk} + \frac{1}{a_{11}} \left|\sum_{j=1}^{n} c_j a_{j1}\right|^2 .$$

Se $(c_2, ..., c_n) \neq 0$ então a primeira soma é positiva, e para $(c_2, ..., c_n) = 0$, mas $c_1 \neq 0$ o segundo termo é estritamente positivo. Portanto, A é uma matriz estritamente definida positiva.

Teorema 3.1.3. *Seja $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ um núcleo hermitiano. Então φ é definido positivo se e somente se*

$$det((\varphi(x_j, x_k))_{j,k \leq n} \geq 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$.

Prova. Se φ é definido positivo, então como provado pelo Teorema 3.1.2, todos seus determinantes principais são não negativos.

Referências Bibliográficas

[Anton and Rorres, 2010] Anton, H. and Rorres, C. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons.

[Berg et al., 1984] Berg, C., Christensen, J. P. R., and Ressel, P. (1984). *Harmonic analysis on semigroups*, volume 100 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York. Theory of positive definite and related functions.

[Buescu and Paixão, 2011] Buescu, J. and Paixão, A. C. (2011). On differentiability and analyticity of positive definite functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 375(1):336–341.

[Guidorizzi, 2001] Guidorizzi, H. L. (2001). *Um curso de Cálculo*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., Rio de Janeiro. 5a. edição.