Iniciação Científica: Sobre diferenciabilidade de funções definidas positivas na reta real

processo número

Matheus Anduca Schiavetto
Orientadora: Ana Paula Peron

Período: 01/08/2022 a 31/07/2022

Sumário

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Números complexos

O conjunto dos números complexos contém todos os números reais e incluem as raízes de números reais negativos, portanto foi criada uma variável para que isso seja possível:

Seja i $\in \mathbb{C}$, onde i $= \sqrt{-1}$, denotamos essa variável como unidade imaginário, sendo esse responsável por possibilitar a existência desse conjunto.

Exemplo: $\sqrt{-4}$ não pertence aos $\mathbb{R}$ mas $\sqrt{-4}$ pertence aos $\mathbb{C}$, Assim:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i.$$

1.1.1 Forma Algébrica

Podemos escrever os números complexos com o auxílio da unidade imaginária, conforme a formatação abaixo:

$$z = a + bi,$$

onde a é a parte real e b é a parte imaginaria do número complexo z.

Além disso, existem classificações para os números complexos de acordo com suas características algébricas, sendo elas:

Real	b = 0
Imaginário	b $\neq$ 0, a $\neq$ 0
Imaginário puro	b $\neq$ 0,a = 0

1.1.2 Operações

Tendo em mente como os números complexos são representados, posemos supor que suas operações são realizadas de maneira diferente daquelas realizadas no espaço dos números reais.

Assim, precisamos analisar as operações nesse espaço numérico.

Adição/Subtração	Somamos/Subtraímos parte real com parte real e parte imaginaria com parte imaginaria.
Multiplicação	usamos a distributiva e o fato de que $i^2 = -1$.
Divisão	multiplica-se pelo conjugado do denominador $\left(\frac{z}{w} = \frac{z}{w}.\frac{\bar{w}}{\bar{w}}\right)$

Exemplo: $z = 2 + 3i$ e $w = 3 - 2i$.

$$z + w = (2 + 3) + (3 - 2)i = 5 + i$$

$$\begin{aligned} z.w &= (2 + 3i).(3 - 2i) = 6 - 4i + 9i - 6i^2 \\ &= 6 + 5i + 6 \\ &= 12 + 5i. \end{aligned}$$

Exemplo:

$$z = 2 - 3i \quad e \quad w = 3 - i$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 - 3i}{3 - i}.\frac{3 + i}{3 + i} \\ &= \frac{6 + 2i - 9 - 3i^2}{3^2 - i^2} \\ &= \frac{6 - 7i + 3}{9 + 1} \\ &= \frac{9 - 7i}{10} \\ &= \frac{9}{10} - \frac{7i}{10}. \end{aligned}$$

1.1.3 Representação geométrica

A representação geométrica de números complexos se dá pela seguinte maneira:

se $z = a + bi$, podemos representar a no eixo x e b no eixo y, podendo representar z como um par ordenado (a,b). Veja a figura 1.1.

Onde o eixo y representa a parte imaginaria e o eixo x representa a parte real.

1.1.4 Módulo ou ângulo(ρ)

O módulo se trata de uma informação importante que utilizaremos quando estudarmos ângulos e coordenadas polares, portanto deveremos entende-lô e estudá-lo.

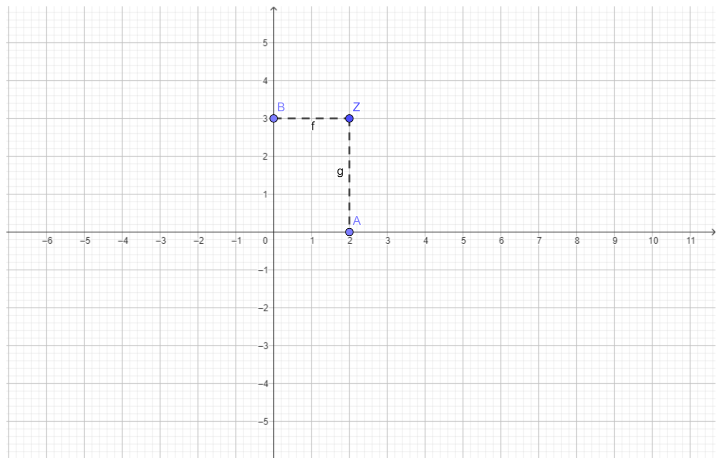

Figura 1.1: Representação geométrica de $z = a + bi$

Seja $z = a + bi$, o módulo se trata da distância do ponto que representa z em uma representação geométrica ao ponto (0,0), logo:

$$|z|^2 = \rho^2 = a^2 + b^2.$$

Exemplo 1.1.1. *Calcule o módulo de $z = 3 + 4i$,*

Temos que $\rho_z = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

Com a explicação de módulo, temos a seguinte representação de um número complexo em um plano cartesiano:

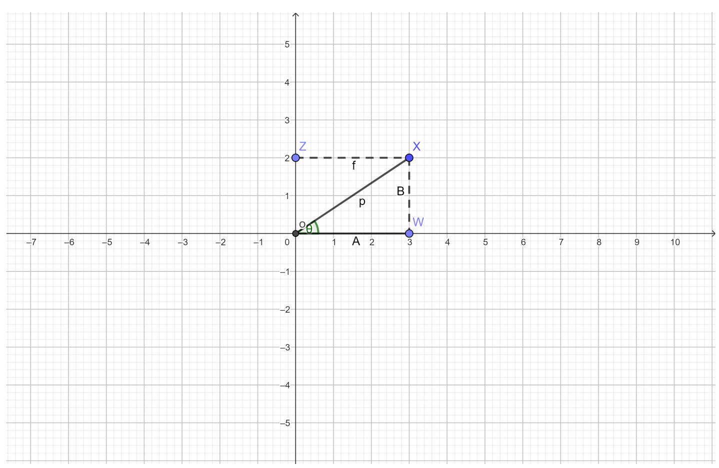

Figura 1.2: representação para cálculo do Ângulo

Assim, podemos calcular o valor do ângulo formado pelo eixo x e o segmento Oz por meio das seguintes fórmulas:

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{\rho}; \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho}.$$

1.1.5 Coordenadas polares

Com as fórmulas do item anterior, podemos reescrever z em função de seno e cosseno, assim:

$$\text{sen}\theta = \tfrac{b}{\rho}; \quad b = \rho.\,\text{sen}\theta.$$

Também temos:

$$\cos\theta = \tfrac{a}{\rho}; \quad a = \rho.\cos\theta.$$

Portanto, temos:

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta).$$

Exemplo 1.1.2. *Com os valores do exemplo 1.1.1, escreva z na sua forma polar.*

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{3}{5}$$

Logo $\theta = \arctan\frac{4}{3}$

Claro que $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) = 5(\frac{3}{5} + i\frac{4}{5})$.

1.1.6 Operações na forma polar

Como mudamos a forma de representar um número complexo, também existem diferenças nas formas de realizar operações, sendo essas listadas a seguir:

- Multiplicação: multiplique ρ e some θ:

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)).$$

- Divisão: oposto da multiplicação.

$$\tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1-\theta_2)).$$

- Potenciação: 1° fórmula de Moivre.

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}n\theta).$$

Capítulo 2

Sequências e Séries de Funções

O material desta seção tem como referência o livro [Guidorizzi, 2001] e as video aulas do professor Cláudio Possani, do canal UNIVESP ([Possani, 2015]).

2.1 Sequência de funções

Diferente a sequência numérica, a qual cada a_n resultava em um valor , na sequência de funções cada valor a_n resulta em uma **Função**.

Exemplo 2.1.1.

$$f_n(x) = x^n; f_0(x) = 1; f_1(x) = x; f_2(x) = x^2.$$

2.1.1 Convergência pontual

Definição 2.1.1. *Seja f_n uma sequência de funções e f uma função com $f, f_n D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte propriedade para cada $x \in D$:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

*Então f_n **converge pontualmente** para f em D.*

Exemplo 2.1.2. $f_n(x) = x^n$ *converge no intervalo]-1,1] para a função* $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & -1 < x < 1. \end{cases}$

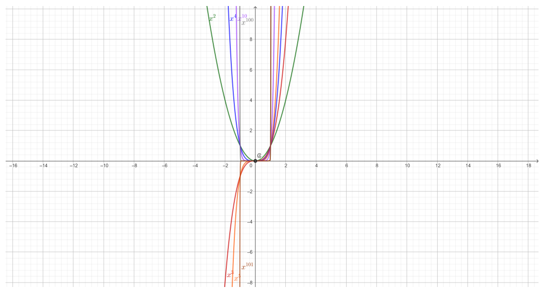

Figura 2.1: representação gráfica de x^n, onde $n = 2, 3, 4, 5, 10, 100, 101$.

2.1.2 Convergência Uniforme

Definição 2.1.2. *Seja f_n uma sequência de funções , f_n **converge uniformemente** para f em [a,b] se e somente se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir $G = G(\varepsilon)$:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon; \quad a \leq x \leq b, \quad \forall n > G$$

A definição é mais bem exposta na figura abaixo:

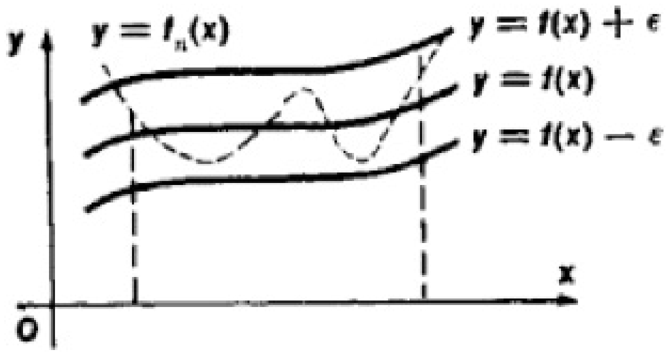

Figura 2.2: Representação gráfica de convergência uniforme

2.2 Séries de funções

A série de função consiste em uma série na qual seu termo geral consiste em uma função.

Exemplo 2.2.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} sen^n(x).$$

2.2.1 Série de potência

Uma série de potência em torno de $a \in \mathbb{R}$ consiste em uma série do seguinte formato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n; \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

2.2.2 Teorema da derivação termo a termo

A derivação termo a termo consiste na forma de se derivar uma série, para análise, vamos supor uma série de potencia de carácter

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x-a)^n.$$

Existem algumas propriedades para essa série:
- f é contínua.
- f é derivável e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n.c_n.(x-a)^{n-1}$$

2.2.3 Teorema da integração termo a termo

O teorema da integração termo a termo funciona de maneira análoga ao teorema da derivação, mas desta vez tem como objetivo a integração de uma série, vamos pegar como exemplo a série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(x-a)^n,$$

existem algumas propriedades para essa série:
- f é integrável e

$$\int f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}.(x-a)^{n+1} + c$$

2.2.4 Série de Taylor

A série de Taylor consiste em uma série de potência em particular, onde:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!};$$

tendo, portanto o seguinte formato:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n.$$

Exemplo 2.2.2. *$f(x) = e^x$; $a = 0$.*

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Assim, temos que a série de Taylor desta função é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Capítulo 3

Núcleos definidos positivos e definidos negativos

O conteúdo desta seção tem como referência o livro [Berg et al., 1984].

3.1 Definições e resultados preliminares

Definição 3.1.1. *Uma matriz $n \times n$ de números complexos $A = (a_{ij})$ é definida positiva se e somente se*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} a_{ij} = c^* A c \geq 0$$

para todo $n \geq 1$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Definição 3.1.2. *Seja X um conjunto não vazio. A função $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ é um núcleo definido positivo se e somente se*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \varphi(x_i, x_j) \geq 0$$

para todo $n \geq 1$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Definição 3.1.3. *Seja X um conjunto não vazio. A função $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ é um núcleo definido negativo se e somente se*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \varphi(x_i, x_j) \leq 0$$

para todo $n \geq 1$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ com $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Teorema 3.1.1. *Sejam $\varphi_1, \varphi_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ núcleos positivos definidos. Então $\varphi_1 \cdot \varphi_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ também é definido positivo.*

Teorema 3.1.2. *Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função qualquer, então $\varphi(x, y) = f(x)\overline{f(y)}$ é definida positiva, isso pois:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\varphi(x_i,x_j) = |\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)|^2$$

Corolário 3.1.1. *Seja $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ definida positiva tal que $|\varphi(x,y)| < p$ para todo $(x,y) \in X \times X$. Então se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < p\}$ e $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 0$, a composta $f \circ \varphi$ é também definida positiva. Em particular, se φ é definida positiva, então exp(φ) também é.*

3.2 Relações entre núcleos definidos positivos e definidos negativos

Existem varias relações importantes entre núcleos definidos positivos e negativos, onde muitas dessas são analisadas em casos especiais que conforme nos aprofundamos se tornam mais gerais. Nesta seção veremos algumas dessas propriedades:

Teorema 3.2.1. *Seja φ uma função definida positiva. É uma análise trivial concluir que $-\varphi$ é negativa definida*

Teorema 3.2.2. *Seja ψ um núcleo hermitiano. Definimos $\varphi(x,y) := \psi(x,x_0) + \psi(y,x_0) - \psi(x,y) - \psi(x_0,x_0)$. Então φ é definida positiva se e somente se ψ for definida negativa.*

Prova: Sejam $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *e* $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ tais que$\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$. Temos:

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\varphi(x_j,x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\varphi_0(x_j,x_k) \qquad = -\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\psi(x_j,x_k).$$

Por outro lado, vamos supor que ψ é definida negativa, definimos $c_0 := -\sum_{j=1}^{n} c_j$. Então temos:

$$\begin{aligned} 0 \geq \sum_{j,k=0}^{n} c_j\overline{c_k}\psi(x_j,x_k) \qquad &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\psi(x_j,x_k) + \sum_{j=1}^{n} c_j\overline{c_0}\psi(x_j,x_0) + \sum_{k=1}^{n} c_0\overline{c_k}\psi(x_0,x_k) + |c_0|^2\psi(x_0,x_0) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}[\psi(x_j,x_k) - \psi(x_j,x_0) - \psi(x_0,x_k) + \psi(x_0,x_0)] \\ &= -\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k}\varphi(x_j,x_k). \end{aligned}$$

Isso mostra que φ é definida positiva.

Teorema 3.2.3. *Uma função ψ é definida negativa se e somente se $e^{-t\psi}$ é definida positiva para todo $t > 0$.*

Prova: Se $e^{-t\psi}$ é definida positiva, então $1-e^{-t\psi}$ é definida negativa. Além disso, pela regra de L'Hopital:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-e^{-t\psi}}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\psi e^{-t\psi}}{1} = \psi.$$

Como o limite pontual de funções definida negativa é uma função definida negativa, segue que ψ é definida negativa .

Agora suponha que ψ é definida negativa. Precisamos mostrar que $e^{-t\psi}$ é definida positiva pois se $t > 0$, $t\psi$ é negativa definida, e pelo caso anterior $e^{-t\psi}$ é definida positiva.
Para isso, usando o teorema anterior:

$$-\psi(x,y) = \varphi(x,y) - \psi(x,x_0) - \overline{\psi(y,x_0)} + \psi(x_0,x_0).$$

Aplicando a exponencial:

$$e^{-\psi(x,y)} = e^{\varphi(x,y)}e^{-\psi(x,x_0)}\overline{e^{-\psi(y,x_0)}}e^{\psi(x_0,x_0)}.$$

Pelos Teoremas 3.1.1, 3.1.1 e 3.1.2, concluímos que $e^{-\psi}$ é definida positiva.

Referências Bibliográficas

[Berg et al., 1984] Berg, C., Christensen, J. P. R., and Ressel, P. (1984). *Harmonic analysis on semigroups*, volume 100 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York. Theory of positive definite and related functions.

[Guidorizzi, 2001] Guidorizzi, H. L. (2001). *Um curso de Cálculo*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., Rio de Janeiro. 5a. edição.

[Possani, 2015] Possani, C. (2015). *Aulas de Cálculo 4*. UNIVESP.