UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - PIBIC/CNPq-UEM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ORIENTADORA: Prof^{a} Dr^{a} ANA PAULA PERON
Bolsista: ADRIANA STRIEDER PHILIPPSEN

REPRESENTAÇÃO DE FUNCIONAIS LINEARES EM ESPAÇOS DE HILBERT

Maringá, 10 de setembro de 2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA - PIBIC/CNPq-UEM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ORIENTADORA: Prof^a Dr^a ANA PAULA PERON
Bolsista: ADRIANA STRIEDER PHILIPPSEN

REPRESENTAÇÃO DE FUNCIONAIS LINEARES EM ESPAÇOS DE HILBERT

Relatório contendo os resultados finais do projeto de iniciação científica vinculado ao PIBIC/CNPq-UEM.

Maringá, 10 de setembro de 2004

Sumário

1. Introdução

A Análise Funcional é um ramo abstrato da Matemática originado da Análise Clássica. Seu desenvolvimento teve início no começo do século XX, e atualmente métodos de Análise Funcional e seus resultados são utilizados em vários ramos da Matemática e suas respectivas aplicações.
Neste relatório descreveremos com detalhes alguns dos resultados estudados, tais como: operadores lineares limitados, funcionais lineares limitados e espaços de Hilbert, para obtermos a representação de funcionais lineares em espaços de Hilbert. Tal representação será dada pelo Teorema de Riez. A referência principal utilizada foi [1].

2. Objetivos

Os objetivos gerais foram:

- Fortalecer a formação da acadêmica através do estudo de tópicos mais avançados, os quais não serão vistos durante o curso de graduação;
- Estimular a análise crítica;
- Colocar a acadêmica em contato com pelo menos uma língua estrangeira através de leitura de textos científicos;
- Estimular o aprimoramento do formalismo matemático;
- Proporcionar à acadêmica uma noção sobre pesquisa em Matemática.

3. Desenvolvimento do Projeto

Descreveremos com detalhes alguns dos tópicos desenvolvidos durante o período referente a esse relatório.

3.1. Operadores lineares

Definição 3.1.1: *Um operador linear T é um operador tal que*
i) *o domínio $D(T)$ de T é um espaço vetorial e a imagem $R(T)$ está em um espaço vetorial sobre o mesmo corpo,*
ii) *Para todo $x, y \in D(T)$ e escalares α, β, temos*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \tag{2}$$

Definição 3.1.2: *O espaço nulo $N(T)$ de T é o conjunto de todos $x \in D(T)$ tais que $T(x) = 0$.*

Teorema 3.1.1: *Seja T um operador linear. Então:*
a) *A imagem $R(T)$ é um espaço vetorial.*
b) *Se $\dim D(T) = n$, então $\dim R(T) \leq n$.*
c) *O espaço nulo $N(T)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração:
a) Considere $y_1, y_2 \in R(T)$ e mostremos que

$$\alpha\ y_1 + \beta\ y_2 \in R(T),$$

para quaisquer escalares α, β.
Como $y_1, y_2 \in R(T)$, temos $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$, para algum $x_1, x_2 \in D(T)$ e $\alpha\ x_1 + \beta\ x_2 \in D(T)$, pois $D(T)$ é um espaço vetorial. Como T é um operador linear, teremos

$$\begin{aligned} T(\alpha\ x_1 + \beta\ x_2) &= \alpha\ Tx_1 + \beta\ Tx_2 \\ &= \alpha\ y_1 + \beta\ y_2 \end{aligned}$$

daí, $\alpha\ y_1 + \beta\ y_2 \in R(T)$.
b) Escolhamos $n+1$ elementos $y_1, ..., y_{n+1}$ em $R(T)$. Então, temos que $y_1 = Tx_1, ..., y_{n+1} = Tx_{n+1}$, para $x_1, ..., x_{n+1} \in D(T)$. Já que $\dim D(T) = n$, o conjunto $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ é linearmente dependente. Daí,

$$\alpha_1\ x_1 + ... + \alpha_{n+1}\ x_{n+1} = 0 \tag{1}$$

para escalares $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ nem todos nulos. Como T é linear e $T0 = 0$, aplicando T em ambos os lados da igualdade (1), teremos

$$\begin{aligned} T(\alpha_1\ x_1 + ... + \alpha_{n+1}\ x_{n+1}) &= \alpha_1\ Tx_1 + ... + \alpha_{n+1}\ Tx_{n+1} \\ &= \alpha_1\ y_1 + ... + \alpha_{n+1}\ y_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\{y_1, ..., y_{n+1}\}$ é linearmente dependente. Como este subconjunto de $R(T)$ era qualquer, concluímos que $R(T)$ não possui subconjunto de $n+1$ ou mais elementos L.I.. Logo $\dim R(T) \leq n$.
c) Sejam $x_1, x_2 \in N(T)$. Então, $Tx_1 = Tx_2 = 0$. Como T é operador linear, para quaisquer α, β temos

$$\begin{aligned} T(\alpha\ x_1 + \beta\ x_2) &= \alpha\ Tx_1 + \beta\ Tx_2 \\ &= \alpha\ 0 + \beta\ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, $\alpha\ x_1 + \beta\ x_2 \in N(T)$ e portanto $N(T)$ é espaço vetorial. ■

A inversa de um operador linear existe se, e somente se, o espaço nulo do operador possuir apenas o vetor nulo. Mais precisamente, temos o seguinte critério.

Teorema 3.1.2: *Sejam X e Y espaços vetoriais, ambos reais ou complexos. Seja $T : D(T) \to Y$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$ e imagem $R(T) \subset Y$. Então,*
a) *A inversa $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ existe se, e somente se, $Tx = 0$ implica $x = 0$,*
b) *Se T^{-1} existe, então T^{-1} é um operador linear,*

c) *Se* $\dim D(T) = n < \infty$ *e* T^{-1} *existe, então* $\dim R(T) = \dim D(T)$.

Demonstração:
a) Suponhamos que $Tx = 0$ implica $x = 0$. Se $Tx_1 = Tx_2$, como T é um operador linear

$$\begin{aligned} T(x_1 - x_2) &= Tx_1 - Tx_2 \\ &= Tx_1 - Tx_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, por hipótese, $x_1 - x_2 = 0$. Portanto $Tx_1 = Tx_2$ implica $x_1 = x_2$ e conseqüentemente T^{-1} existe. Recipocramente, se T^{-1} existe e $Tx = 0$, então pela injetividade, obtemos $x = 0$.
b) Suponhamos que T^{-1} existe, mostremos que ele é um operador linear. O domínio de T^{-1} é $R(T)$ que é espaço vetorial, pelo Teorema 3.1.1. Sejam $x_1, x_2 \in D(T)$ e suas imagens $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$. Então $x_1 = T^{-1}y_1$ e $x_2 = T^{-1}y_2$. Como T é operador linear, então para escalares α, β temos

$$\begin{aligned} \alpha\, y_1 + \beta\, y_2 &= \alpha\, Tx_1 + \beta\, Tx_2 \\ &= T(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2). \end{aligned}$$

Como, $x_j = T^{-1}y_j$, isto implica que

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) &= \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \\ &= \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2. \end{aligned}$$

Portanto, T^{-1} é linear.

c) Pelo Teorema 3.1.1, temos que $\dim R(T) \le \dim D(T)$. Pelo mesmo teorema aplicado a T^{-1} obtemos, $\dim D(T) \le \dim R(T)$. Logo, $\dim D(T) = \dim R(T)$. ∎

3.2. Operadores lineares limitados

Definição 3.2.1: *Sejam* X *e* Y *espaços normados e* $T : D(T) \to Y$ *um operador linear, onde* $D(T) \subset X$. *O operador* T *é dito limitado se existir* *um número real c tal que*

$$||Tx|| \leq c\ ||x||, \qquad x \in D(T). \tag{2}$$

Para demonstrarmos o teorema abaixo, usaremos o seguinte resultado: Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes em um espaço normado X de dimensão qualquer. Então, existe um número $c > 0$ tal que para todo escalar $\alpha_1, ..., \alpha_n$ temos

$$||\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n|| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|).$$

Teorema 3.2.1: *Se X é um espaço normado de dimensão finita, então todo operador linear em X é limitado.*

Demonstração: Seja $\dim X = n$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base para X. Seja

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \sum \alpha_j e_j$$

e consideremos um operador linear T em X. Como Té linear

$$\begin{aligned} ||Tx|| &= \left|\left|\sum \xi_j\ Te_j\right|\right| \\ &\leq \sum |\xi_j|\ ||Te_j|| \\ &\leq \max_k ||Te_k||\ \sum_{i=1}^{n} |\xi_j|. \end{aligned}$$

Pelo resultado enunciado acima, obtemos

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c}\ \left|\left|\sum \xi_j e_j\right|\right| = \frac{1}{c}||x||.$$

Logo

$$||Tx|| \leq \gamma ||x||, \qquad \gamma = \frac{1}{c}\max_k ||Te_k||.$$

Portanto, pela Definição 3.2.1, T é limitada. ■

Teorema 3.2.2: *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \to Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$. Então,*

a) *T é contínuo se, e somente se, T é limitado;*
b) *Se T é contínuo em um único ponto, ele é contínuo.*

Demonstração:
a) Se $T = 0$ a afirmação é trivial. Seja $T \neq 0$, então $||T|| \neq 0$. Suponhamos que T é um operador linear contínuo em $x_0 \in D(T)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||Tx - Tx_0|| \leq \varepsilon, \qquad x \in D(T) \tag{3}$$

quando

$$||x - x_0|| \leq \delta.$$

Consideremos $y \neq 0$ em $D(T)$ e seja

$$x = x_0 + \frac{\delta}{||y||}\, y.$$

Como T é linear, temos

$$\begin{aligned} ||Tx - Tx_0|| &= ||T(x - x_0)|| \\ &= \left|\left| T\left(\frac{\delta}{||y||}\, y\right)\right|\right| \\ &= \frac{\delta}{||y||}\, ||Ty||. \end{aligned}$$

Como $||x - x_0|| = \delta$, (3) implica que

$$\frac{\delta}{||y||}\, ||Ty|| \leq \varepsilon,$$

ou seja,

$$||Ty|| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\, ||y||$$

Fazendo $c = \varepsilon/\delta$, obtemos

$$||Ty|| \leq c\, ||y||$$

e isto mostra que T é limitado. Recipocramente, suponhamos que T é limitado. Consideremos $x_0 \in D(T)$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como T é linear, para cada $x \in D(T)$ tal que

$$||x - x_0|| < \delta, \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{||T||}$$

obtemos

$$\begin{aligned} ||Tx - Tx_0|| &= ||T(x - x_0)|| \\ &\leq ||T|| \, ||x - x_0|| \\ &< ||T|| \, \delta \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que T é contínuo em x_0. Como x_0 era arbitrário, T é contínuo.
b) A continuidade de T em um ponto, implica que T é limitado pela primeira parte da demonstração do item a). Novamente pelo item a), segue que T é contínuo. ■

Corolário 3.2.1: *Seja T um operador linear limitado. Então*
a) *$x_n \to x$ implica que $Tx_n \to Tx$, onde $x, x_n \in D(T)$*
b) *O espaço nulo $N(T)$ é fechado.*

Demosntração:
a) Quando $n \to \infty$, temos que

$$\begin{aligned} ||Tx_n - Tx|| &= ||T(x_n - x)|| \\ &\leq ||T|| \, ||x_n - x|| \to 0. \end{aligned}$$

b) Para cada $x \in \overline{N(T)}$ existe uma seqüência (x_n) em $N(T)$ tal que $x_n \to x$. Pelo item a), $Tx_n \to Tx$. Como $Tx_n = 0$, segue que $Tx = 0$, ou seja, $x \in N(T)$. Como $x \in \overline{N(T)}$ era qualquer, $N(T)$ é fechado. ■

3.3. Funcionais lineares

Definição 3.3.1: *Um funcional linear f é um operador linear com domínio em um espaço vetorial X e a imagem no corpo escalar K de X; isto é,*

$$f : D(f) \longrightarrow K$$

onde $K = \mathbb{R}$ se X é real e $K = \mathbb{C}$ se X é complexo.

Definição 3.3.2: *Um funcional linear limitado f é um operador linear limitado com a imagem no corpo escalar do espaço normado X e cujo domínio $D(f)$ está contido. Assim existe um número real c tal que para todo $x \in D(f)$*

$$|f(x)| \leq c||x||. \tag{4}$$

Além disso, a norma de f é

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{||x||} \tag{5a}$$

ou

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ ||x|| = 1}} |f(x)|. \tag{5b}$$

A fórmula $||Tx|| \leq ||T||\ ||x||$ implica que

$$|f(x)| \leq ||f||\ ||x||. \tag{6}$$

3.4. Operadores e funcionais lineares em espaços de dimensão finita

Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Sejam $E = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base de X e $B = \{b_1, ..., b_r\}$ uma base de Y. Então, todo $x \in X$ possui uma única representação

$$x = \xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k. \tag{7}$$

Como T é linear,

$$y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \; Te_k. \tag{8}$$

Como a representação (7) é única, temos o seguinte resultado:
T é determinado unicamente se as imagens $y_k = Te_k$ dos n vetores da base $e_1, ..., e_n$ são dados.
Como y e $y_k = Te_k$ estão em Y, eles têm única representação da forma

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j \tag{9a}$$

$$Te_k = \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j. \tag{9b}$$

Substituindo em (8) temos

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \; \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} \; b_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \; \xi_k\right) b_j. \end{aligned}$$

Como $\{b_1, ..., b_r\}$ é linearmente independente, os coeficientes de cada b_j da esquerda e da direita são os mesmos, daí

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \; \xi_k, \qquad j = 1, ..., r. \tag{10}$$

Assim segue o seguinte resultado: *A imagem $y = Tx = \sum \eta_j b_j$ de $x = \sum \xi_k e_k$ pode ser obtida de (10).*

Os coeficientes em (10) formam uma matriz $T_{EB} = (\tau_{jk})$ com r linhas e n colunas. Se os elementos da base E de X e B de Y estão arranjados em alguma ordem fixada e arbitrária, então a matriz T_{EB} é determinada unicamente pelo operador linear T. Daí, dizemos que a matriz T_{EB} representa o operador T com relação àquelas bases.
Podemos reescrever (10) com a notação de matriz

$$\tilde{y} = T_{EB}\tilde{x} \tag{10'}$$

onde $\tilde{y} = (\eta_j)$ e $\tilde{x} = (\xi_k)$ são vetores colunas. Similarmente, (9b) pode ser reescrita na notação de matriz:

$$Te = T_{EB}^T\ b \tag{9b'}$$

onde Te é o vetor coluna com componentes $Te_1, ..., Te_n$ e b é o vetor coluna com componentes $b_1, ..., b_r$, e T_{EB}^T representa a matriz transposta de T_{EB}.

Agora, consideremos funcionais lineares em X, onde $\dim X = n$. Para cada funcional linear f e cada $x = \sum \xi_j e_j \in X$, teremos

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j, \tag{11a}$$

onde

$$\alpha_j = f(e_j), \qquad j = 1, ..., n, \tag{11b}$$

e f é unicamente determinada por seus valores α_j nos n vetores da base de X.
Recipocramente, cada n-uplas de escalres $\alpha_1, ..., \alpha_n$ determina um funcional linear de X por (11). Em particular, consideremos as n-uplas abaixo

$$(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, ..., 0), ...,\ (0, 0, ..., 1).$$

Por (11) isto nos fornece n funcionais, denotados por $f_1, .., f_n$ com valores

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k. \end{cases}$$

δ_{jk} é chamado de delta de Kronecker. O conjunto $\{f_1, ..., f_n\}$ é chamado base dual da base $\{e_1, ..., e_n\}$ de X. Isto é justificado pelo seguinte resultado

Teorema 3.4.1: *Seja X um espaço vetorial n-dimensional e $E = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base para X. Então, $F = \{f_1, ..., f_n\}$ dado por f_k acima, uma base para o espaço algébrico dual X^* de X e* $\dim X^* = \dim X = n$.

Demonstração: O conjunto F é linearmente independente, pois se

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0, \qquad x \in X, \tag{12}$$

fazendo $x = e_j$, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{jk} = \beta j = 0,$$

de modo que todos os β_k's em (12) são nulos. Agora mostraremos que todo $f \in X^*$ pode ser representado como uma combinação linear dos elementos de F de uma única maneira. Escrevemos $f(e_j) = \alpha_j$ como em (11b) e por (11a), temos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j, \qquad x \in X.$$

Por outro lado, pela definição de f_k, obtemos

$$f_j(x) = f_j(\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n) = \xi_j.$$

Das duas últimas equações, temos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x).$$

Portanto, a representação única de um funcional linear arbitrário f em X em termos dos funcionais $f_1, ..., f_n$ é

$$f = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n.$$

■

Lema 3.4.1: *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita. Se $x_0 \in X$ tem propriedade que $f(x_0) = 0$, para todo$f \in X^{**}$, então $x_0 = 0$.*

Demonstração: Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base para X e $x_0 = \sum \xi_{0j} e_j$. Então, por (11) e pela hipótese temos

$$f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{0j} \alpha_j = 0,$$

para cada $f \in X^*$, ou seja, para cada escolha de $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Portanto, todos ξ_{oj} devem ser nulos. ■

3.5. Espaços com produto interno e espaço de Hilbert

Em um espaço normado podemos somar vetores e multiplicá-los por escalares, exatamente como em álgebra linear. Além disso, a norma em um tal espaço generaliza o conceito do comprimento de um vetor. Entretanto, o que ainda é ausente em espaço normado geral, e o que gostaríamos de ter, se possível, é uma analogia do produto interno usual

$$a \cdot b = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$$

e as fórmulas resultantes, notável

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}$$

e a condição para a ortogonalidade

$$a \cdot b = 0$$

as quais são importantes ferramentas em muitas aplicações. Portanto, a questão que surge é se o produto interno e ortogonalidade podem ser generalizadas à espaços vetoriais arbitrários. De fato, isso pode ser feito e nos leva a "espaços com produto interno" e espaços com produto interno completo, chamado espaço de Hilbert. Espaços com produto interno, são espaços normados especiais, como veremos. Historicamente eles são mais velhos que espaços normados gerais.

Definição 3.5.1: *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X. Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo. Um produto interno em X é uma aplicação de $X \times X$ em um corpo escalar K de X, ou seja, todo par de vetores x e y tem um escalar associado, denotado por $\langle x, y \rangle$ e é chamado de produto interno de x e y, tal que para todo vetor x, y, z e escalar α, temos:*
(IP1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
(IP2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
(IP3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \ \langle x, x \rangle \geq 0$
(IP4) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Um produto interno em X define uma norma em X dada por

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{13}$$

e uma métrica em X dada por

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}. \tag{14}$$

Note que em (IP3) a barra em $\overline{\langle y, x \rangle}$ denota o conjungado complexo. Assim, se X é um espaço vetorial real, teremos $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
De (IP1) para (IP3) obtemos as fórmulas:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \tag{15a}$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle \tag{15b}$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle. \tag{15c}$$

O produto interno satisfaz a igualdade do paralelogramo

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

De fato:

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\
&= \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle + \langle x-y, x\rangle - \langle x-y, y\rangle \\
&= 2\langle x, x\rangle^2 + 2\langle y, y\rangle^2 \\
&= 2(||x||^2 + ||y||^2)
\end{aligned}$$

Definição 3.5.2: *Um elemento x de um espaço com produto interno X é ortogonal a outro elemento $y \in X$ se $< x, y >= 0$. Dizemos então que x e y são ortogonais e denotamos por $x \perp y$. Analogamente, para os subconjuntos $A, B \subset X$ e denotamos $x \perp A$ se $x \perp a$, para $a \in A$ e $A \perp B$ se $a \perp b$, para $a \in A$ e $b \in B$.*

Obs.: Nem todo espaço normado é espaço de Hilbert. Por exemplo, o espaço l^p, com $p \neq 2$, não é espaço com produto interno, pois não satisfaz a igualdade do paralelogramo e portanto não é espaço de Hilbert.

3.6. Complemento ortogonal e soma direta

Em um espaço métrico X, a distância δ de um elemento $x \in X$ a um subconjunto não vazio $M \subset X$ é definida como

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} d(x, \tilde{y}).$$

Em espaços normados temos

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} ||x - \tilde{y}||, \qquad M \neq \emptyset. \tag{19}$$

Veremos que é importante saber se existe $y \in M$ tal que

$$\delta = ||x - y|| \tag{20}$$

e se um tal elemento existe, se ele é único. Isto é um problema de unicidade e existência.

Para considerar o problema de unicidade e existência para espaços de Hilbert, precisamos de duas concepções:

• o segmento ligando dois elementos x e y de um espaço vetorial X é definido como sendo o conjunto de todos $z \in X$ da forma

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

• um subconjunto M de X é dito ser **convexo** se para cada $x, y \in M$ do segmento ligando x e y está contido em M.

Teorema 3.6.1: *Sejam X um espaço com produto interno e $M \neq \emptyset$ um subconjunto convexo completo. Então para cada $x \in X$ dado existe um único $y \in M$ tal que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} ||x - \tilde{y}|| = ||x - y||. \tag{21}$$

Demonstração:

i) Existência: pela definição de ínfimo, existe uma seqüência (y_n) em M tal que

$$\delta n \longrightarrow \delta, \tag{22}$$

onde $\delta_n = ||x - y_n||$. Mostremos que (y_n) é de Cauchy. Seja $v_n = y_n - x$, então $||v_n|| = \delta_n$. Como M é convexo, então $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ e

$$\begin{aligned}
||v_n + v_m|| &= ||y_n - x + y_m - x|| \\
&= ||y_n + y_m - 2x|| \\
&= 2||\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x|| \\
&\geq 2\delta.
\end{aligned}$$

Pela igualdade do paralelogramo

$$\begin{aligned}
||y_n - y_m||^2 &= ||v_n - v_m||^2 \\
&= -||v_n + v_m||^2 + 2(||v_n||^2 + ||v_m||^2) \\
&\leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2)
\end{aligned}$$

e (22) implica que (y_n) é de Cauchy. Como M é completo, (y_n) converge, seja $y_n \longrightarrow y$. Como $y \in M$ temos $||x-y|| \geq \delta$. Também de (22)

$$\begin{aligned} ||x-y|| &\leq ||x-y_n|| + ||y_n - y|| \\ &= \delta_n + ||y_n - y|| \longrightarrow \delta. \end{aligned}$$

Portanto, $||x-y|| = \delta$.
ii) Unicidade: suponhamos que $y, y_0 \in M$ satisfazem

$$||x-y|| = \delta \qquad e \qquad ||x-y_0|| = \delta$$

e mostremos que $y = y_0$.
Pela igualdade do paralelogramo

$$\begin{aligned} ||y-y_0||^2 &= ||(y-x)-(y_0-x)||^2 \\ &= 2||y-x||^2 + 2||y_0-x||^2 - ||(y-x)+(y_0-x)||^2 \\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 2^2||\frac{1}{2}(y+y_0) - x||^2. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}(y+y_0) \in M$, então $||\frac{1}{2}(y+y_0)|| \geq \delta$. Isso implica que o lado direito é menor ou igual a $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$. Daí teremos a desigualdade

$$||y-y_0|| \leq 0.$$

Por definição, a norma é sempre não negativa, logo

$$||y-y_0|| = 0,$$

e portanto $y = y_0$. ∎

Lema 3.6.1: *No teorema 3.6.1, seja M um subespaço completo Y e $x \in X$ fixo. Então $z = x - y$ é ortogonal a Y.*

Demonstração: Suponhamos que z não seja ortogonal a Y,então existe $y_1 \in Y$ tal que

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0. \tag{23}$$

Temos $y_1 \neq 0$, se não fosse teríamos $\langle z, y_1 \rangle = 0$. Para qualquer escalar α,

$$\begin{aligned}
||z - \alpha y_1||^2 &= \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \langle z, z - \alpha y_1 \rangle - \alpha \langle y_1, z - \alpha y_1 \rangle \\
&= \overline{\langle z - \alpha y_1, z \rangle} - \alpha \overline{\langle z - \alpha y_1, y_1 \rangle} \\
&= \overline{\langle z, z \rangle} - \overline{\alpha} \overline{\langle y_1, z \rangle} - \alpha [\overline{\langle z, y_1 \rangle} - \overline{\alpha} \overline{\langle y_1, y_1 \rangle}] \\
&= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \beta - \alpha [\overline{\beta} - \overline{\alpha \langle y_1, y_1 \rangle}].
\end{aligned}$$

A expressão dentro do colchete é zero se escolhemos

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}.$$

De (21) temos $||z|| = ||x - y|| = \delta$, logo

$$\begin{aligned}
||z - \alpha y_1||^2 &= ||z||^2 - \frac{\overline{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle} \beta \\
&= ||z||^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \\
&\leq \delta^2.
\end{aligned}$$

Mas isto é absurdo, pois $z - \alpha y_1 = x - y_2$, onde $y_2 = y + \alpha y_1 \in Y$. De modo que $||z - \alpha y_1|| \geq \delta$, pela definição de δ. Logo, $\langle z, y_1 \rangle = 0$ e portanto $z \perp Y$. ■

Definição 3.6.1: *Um espaço vetorial X é soma direta de dois subespaços Y e Z, denotado por*

$$X = Y \oplus Z,$$

se cada $x \in X$ tem uma única representação, $x = y + z$, $y \in Y$ e $z \in Z$. Então Z é chamado de complemento algébrico de Y em X e vice-versa; e Y, Z é chamado de par complementar de subespaços em X.

Teorema 3.6.2: *Seja Y um subespaço fechado qualquer de um espaço de Hilbert H. Então*

$$H = Y \oplus Y^{\perp} \tag{24}$$

onde $Y^{\perp} = \{z \in H; z \perp Y\}$ é o complemento ortogonal de Y.

Demonstração: Já que H é completo e Y é fechado, então Y é completo. Como Y é convexo, o Teorema 3.6.1 e o Lema 3.6.1 implicam que para cada $x \in H$ existe $y \in Y$ tal que

$$x = y + z, \qquad z \in Y^{\perp}. \tag{25}$$

Mostremos que (25) é representado de maneira única. Suponhamos que $x = y_1 + z_1$ assim $y + z = y_1 + z_1$, onde $y, y_1 \in Y$ e $z, z_1 \in Y^{\perp}$. Então $y - y_1 = z_1 - z$. Como $y - y_1 \in Y$ e $z_1 - z \in Y^{\perp}$, temos que $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ implica que $y = y_1$. Portanto, também temos $z = z_1$. ■

y em (24) é chamado de projeção ortogonal de x em Y.

Lema 3.6.2: *O complemento ortogonal $Y^{\perp}$ de um subespaço fechado Y de um espaço de Hilbert é o espaço nulo $N(P)$ da projeção ortogonal P de H sobre Y.*

O complemento ortogonal é um **anulador especial**, onde por definição o **anulador** $M^{\perp}$ de um conjunto $M \neq \emptyset$ em um espaço com produto interno X é o conjunto

$$M^{\perp} = \{x \in X; x \perp M\}.$$

Então, $x \in M^{\perp}$ se e, somente se, $\langle x, v \rangle = 0$, para todo $v \in M$. Isto explica o nome.
Note que $M^{\perp}$ é um espaço vetorial, já que $x, y \in M^{\perp}$ implica que para todo $v \in M$ e quaisquer escalares α, β, tem-se

$$\langle \alpha x + \beta y, v \rangle = \alpha \langle x, v \rangle + \beta \langle y, v \rangle = 0,$$

portanto $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$.

Em geral, temos $M \subset M^{\perp\,\perp}$, onde $(M^{\perp})^{\perp}$ é escrito por $M^{\perp\,\perp}$, pois $x \in M$ então $x \perp M^{\perp}$ (de fato: $y \in M^{\perp}$ implica que $\langle y, v \rangle = 0, v \in M$ e, assim, $x = v$) e pela definição anterior $x \in (M^{\perp})^{\perp}$.

Lema 3.6.3: *Se Y é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, então*

$$Y = Y^{\perp\perp}. \tag{26}$$

Demonstração:
Já vimos que $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Seja $x \in Y^{\perp\perp}$, então $x = y+z$, onde $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$. Como $Y^{\perp\perp}$ é um espaço vetorial e $x \in Y^{\perp\perp}$, teremos que

$$z = x - y \in Y^{\perp\perp}.$$

Mas, pelo Teorema 3.6.2 $z \in Y^{\perp}$. Assim, obtemos que $z \perp z$. Logo, $z = 0$ de modo que $x = y$, isto é, $x \in Y$. Daí, $Y^{\perp\perp} \subset Y$. ■

Lema 3.6.4: *Para qualquer subconjunto $M \neq \emptyset$ de um espaço de Hilbert H, o gerado de M é denso em H se, e somente se, $M^{\perp} = \{0\}$.*

Demonstração:
Seja $x \in M^{\perp}$ e suponhamos que o gerado V de M seja denso em H. Então $x \in \overline{V} = H$. Logo existe uma seqüência (x_n) em V tal que $x_n \longrightarrow x$. Como $x \in M^{\perp}$ e $M^{\perp} \perp V$, temos que $\langle x_n, x \rangle = 0$. A continuidade do produto interno implica que $\langle x_n, x \rangle \longrightarrow \langle x, x \rangle$. Logo, $\langle x, x \rangle = ||x||^2 = 0$, ou seja, $x = 0$. Portanto, $M^{\perp} = \{0\}$. Recipocramente, suponhamos que $M^{\perp} = \{0\}$. Se $x \perp V$, então $x \perp M$, assim $x \in M^{\perp}$ e $x = 0$. Portanto, $V^{\perp} = 0$. Como V é subespaço de H, obtemos que $\overline{V} = H$, pelo Teorema 3.6.2, com $Y = \overline{V}$. ■

3.7: Representação de funcionais lineares em espaços de Hilbert

Teorema 3.7.1: *Todo funcional linear limitado f em um espaço de Hilbert H, pode ser representado em termos de um produto interno, a saber*

$$f(x) = \langle x, z \rangle \tag{27}$$

onde z depende e é unicamente determinado por f e tem norma

$$||z|| = ||f||. \tag{28}$$

Demonstração: Mostraremos que
a) f tem uma representação como em (27),
b) z em (27) é único,
c) a fórmula (28) vale.
De fato:
a) Se $f = 0$, então (27) e (28) acontecem se $z = 0$. Seja $f \neq 0$. Verifiquemos quais propiedades z deve ter se (27) existe. Primeira: $z \neq 0$. Segunda: $\langle x, z\rangle = 0$ tal que $f(x) = 0$, isto é, para todo x no espaço nulo $N(f)$ de f, portanto $z \perp N(f)$. Isto sugere que consideremos $N(f)$ e seu complemento ortogonal $N(f)^{\perp}$.
$N(f)$ é um espaço vetorial fechado. Além disso, $f \neq 0$ implica que $N(f) \neq H$, de modo que pelo Teorema 3.6.2, $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$. Portanto, $N(f)^{\perp}$ contém um z_0 não nulo. Considermos

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x$$

onde $x \in H$ é qualquer. Aplicando f, obtemos

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0.$$

Portanto, $v \in N(f)$. Como $z_0 \perp N(f)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, z_0\rangle \\ &= \langle f(x)z_0 - f(z_0), z_0\rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0\rangle - f(z_0)\langle x, z_0\rangle. \end{aligned}$$

Notando que, $\langle z_0, z_0\rangle = ||z_0||^2 \neq 0$, obtemos

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle}\,\langle x, z_0\rangle.$$

Isto pode ser escrito na forma (27), onde

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0\rangle}\,z_0$$

b) Suponhamos que para todo $x \in H$ temos

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle.$$

Assim, $\langle x, z_1 \rangle - \langle x, z_2 \rangle = \langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$, para todo $x \in H$. Em particular, se $x = z_1 - z_2$, temos

$$\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = ||z_1 - z_2||^2 = 0,$$

ou seja, $z_1 - z_2 = 0$ logo $z_1 = z_2$.
Portanto, z é único.
c) Se $f = 0$, então $z = 0$ e portanto, $||f|| = 0 = ||z||$. Seja $f \neq 0$, então $z \neq 0$. De (27) com $x = z$ e $|f(x)| \leq ||f|| \, ||x||$, obtemos

$$||z||^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq ||f|| \, ||z||.$$

Como $||z|| \neq 0$,

$$||z|| \leq ||f||.$$

De (27) e da desigualdade de Schwarz, vemos que

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq ||x|| \, ||z||.$$

Então, $||f|| = \sup_{||x||=1} |\langle x, z \rangle| \leq ||z||$. Portanto, $||z|| = ||f||$. ■

Dois exemplos de espaços com produto interno que podemos considerar são:
1) Todo funcional linear f em $\mathbb{R}^n$ pode ser representado na forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, y_j$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
2) Todo funcional linear limitado f em l^2 pode ser representado na forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \, \overline{\eta_j}$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2$ e $y = (\eta_1, \eta_2, ...) \in l^2$.

4. Conclusões Parciais

Freqüentemente, em diversas aplicações, é útil conhecermos a forma geral de funcionais lineares, e muitos aspectos têm sido investigados a fim de caracterizá-los. Neste trabalho foi demonstrado o Teorema de Riez, o qual fornece uma representação para funcionais lineares em espaços de Hilbert e foram apresentados alguns exemplos. Para isso estudamos primeiramente alguns conceitos básicos, tais como: espaços de Banach e suas propriedades, operadores lineares contínuos e limitados, funcionais lineares, espaços com produto interno, espaços de Hilbert e suas propriedades.

Referências Bibliográficas

[1] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[2] Lima, E. L., *Curso de análise*, vol 1. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[3] Lima, E. L., *Curso de análise*, vol 2. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[4] Lima, E. L., *Espaços métricos*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

Avaliação da orientadora sobre o desempenho da acadêmica

A acadêmica teve um bom desempenho durante o tempo em que o projeto foi desenvolvido, apresentando evolução em seus seminários e questionamentos matemáticos. A acadêmica apresentou trabalho oral na 5ª Jornada de Iniciação Científica realizada pelo Departamento de Matemática desta Universidade, e também no XIII Encontro Anual de Iniciação Científica realizado na Universidade Estadual de Londrina.

Profª Drª Ana Paula Peron

Avaliação da orientadora sobre o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica.

O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC é uma grande oportunidade para os acadêmicos desenvolverem projetos junto aos professores de seu departamento possibilitando, assim, um primeiro contato com a forma em que se desenvolve pesquisa em sua futura área de atuação. Ressaltamos que este projeto foi desenvolvido uma parte com a acadêmica sem bolsa, sendo contemplada posteriormente, e que o auxílio financeiro foi de fundamental importância para o melhor desenvolvimento do projeto.

Prof^a Dr^a Ana Paula Peron

Avaliação da acadêmica sobre o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica.

O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) no qual participei, é um excelente trabalho desenvolvido por alunos de graduação e professores qualificados. O PIBIC nos oferece a oportunidade de ampliar nossos conhecimentos.
Desenvolvemos um trabalho sobre Representação de Funcionais Lineares em Espaços de Hilbert. Este trabalho foi apresentado na V Jornada de Iniciação Científica do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringã e XIII Encontro Anual de Iniciação Científica (EAIC) realizado na Universidade Estadual de Londrina.

Adriana Stieder Phillipsen