RELATÓRIO PARCIAL DO PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA:

O Teorema de Riez e Aplicações

Bolsista

HENRIQUE SENHORINI KATRIP

Orientadora:

ANA PAULA PERON

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Número do Processo FAPESP: 2018/06102-3
Período de vigência do projeto: 01/06/2018 a 30/05/2019
Período coberto pelo Relatório Científico: 01/11/2018 a 30/05/2019

Índice

Resumo do Projeto

A proposta do projeto é estudar primeiramente alguns conceitos básicos de Análise Funcional, tais como espaços métricos, seqüências de Cauchy, espaços normados, espaços de Banach, operadores e funcionais lineares. Todos os conceitos e pré-requisitos necessários serão estudados com todos os detalhes. Para concluir essa primeira etapa, será abordado o Teorema de Riesz, o qual fornece uma representação para funcionais lineares em espaços de Hilbert. Com este teorema de representação em mãos, finalmente serão introduzidos os operadores adjuntos e auto-adjuntos em espaços de Hilbert. Destacamos que operadores adjuntos em determinados espaços de Hilbert, são importantes objetos de pesquisa. Por exemplo, em [3, 5] considera-se operadores integrais auto-adjuntos que são gerados por núcleos positivos definidos em certos espaços, com o objetivo de estudar o decaimentos dos autovalores de tais operadores.

Em seguida serão introduzidos conceitos da Teoria de Aproximação: uma linha de pesquisa de grande importância e na qual é possível encontrar diversas aplicações. Neste ponto, será estudado o Teorema de Existência da melhor aproximação em espaços normados (e de Hilbert) bem como condições para a unicidade. Polinômios de Chebyshev também serão estudados: será feita uma breve apresentação de algumas de suas propriedades.

Resumo das Etapas Descritas no Relatório Parcial

As etapas descritas no relatório parcial referem-se ao estudo sobre os seguintes assuntos:
- Espaços Métricos: conjuntos abertos, fechados, densos; espaços separáveis; convergência e sequências de Cauchy: definições, exemplos e teoremas;
- Espaços Normados: definição e exemplos. Espaços de Banach: definição e exemplos;
- Alguns resultados sobre espaços vetoriais e sobre séries foram estudados para complementar a base necessária para os estudos de alguns tópicos acima.

Desta maneira foi cumprido o estudo dos seguintes itens propostos no projeto:

1. Espaços métricos

   Conjuntos abertos, fechados, vizinhança

   Convergência, seqüência de Cauchy

2. Espaços normados. Espaços de Banach

Resumo do Relatório

No segundo semestre do projeto foi desenvolvida em estudos individuais, e durante os seminários, a teoria envolvida nos seguintes itens propostos no projeto:

1. Espaços normados. Espaços de Banach

   Propriedades de espaços normados

   Espaços normados de dimensão finita e subespaços

   Operadores lineares contínuos e limitados

   Funcionais Lineares

   Espaços normados de operadores. Espaço dual

2. Espaço de Hilbert

   Representação de funcionais em espaços de Hilbert

   Operadores Adjunto e Auto-Adjuntos

3. Teoria da Aproximação

   Aproximação em Espaços Normados e Unicidade

   Polinômios de Chebyshev

Descrição e avaliação do apoio institucional

Pudemos contar com a infraestrutura do departamento de Matemática no ICMC, tanto para apoio administrativo, quanto para os recursos computacionais, além de uma excelente biblioteca.

Reserva Técnica

Informamos que os recursos da reserva técnica não foram utilizados.

Realizações no período

Neste período foram apresentados seminários para a supervisora e foi feito estudo individual sobre os seguintes assuntos:
- Espaços Normados: propriedades de espaços normados, espaços e subespaços de dimensões finitas, compacidade, operadores e funcionais lineares, operadores lineares contínuos e limitados, operadores e funcionais lineares em espaços de dimensões finitas, espaço de operadores lineares.
- Espaços de Hilbert: espaços com produto interno e espaços de Hilbert: definições, exemplos e propriedades. Teorema de Riez: representação de funcioniais lineares em espaços de Hilbert. Operadores Adjunto de Hilbert e Auto-adjunto: definição, existência e propriedades.
- Teoria da Aproximação: melhor aproximação em espaços normados: definição, existência e exemplos. Polinômios de Chebyshev: definição, propriedades e uma aplicação.

A principal referência utilizada foi [Kr89].

A seguir descrevemos sucintamente alguns dos tópicos vistos.

1.1 Espaços Normados

1.1.1 Propriedades, espaços de dimensão finita, compacidade

Dando continuidade ao projeto, foi estudado algumas propriedades de espaços normados e de Banach. Dentre elas destacamos:
- um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se e somente se Y é fechado em X,
- **(completude)** todo subespaço Y de dimensão finita de um espaço normado X é completo,
- **(fecho)** todo subespaço Y de dimensão finita de um espaço normado X é fechado em X.

Lembramos que um espaço métrico X é dito ser *compacto* se toda sequencia em X tem uma subsequencia convergente em X. Uma propriedade geral de conjuntos compactos é:

Lema 1. *Um subconjunto M compacto de um espaço métrico é fechado e limitado.*

A recíproca do lema acima em geral é falsa: basta considerar no espaço ℓ^2 a sequencia $e_n := (\delta_{nj})$, cujo n-ésimo termo é 1 e os demais são 0. Esta sequencia é **limitada** pois $||e_n|| = 1$. Seus termos formam um conjunto que é **fechado** pois ele não possui pontos de acumulação. E pelo mesmo motivo esse conjunto também **não é compacto**.

Entretanto para espaços normados o teorema abaixo fornece uma condição para que a recíproca seja verdadeira.

Em sua demostração será usado um resultado técnico que diz que no caso de independência linear de vetores, não é possível encontrar uma combinação linear que envolva escalares “grandes"representando um “vetor pequeno":

Lema 2. *Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores em um espaço normado X (de dimensão qualquer). Então, existe um número $c > 0$ tal que para qualquer escolha de escalares $a_1, \ldots, a_n$ temos*

$$||a_1x_1 + \ldots + a_nx_n|| \geq c(|a_1| + \ldots + |a_n|).$$

Teorema 3. (Compacidade) *Sejam X um espaço normado de dimensão finita e $M \subset X$. Então M é compacto se e somente se M é fechado e limitado.*

Demonstração. Pelo Lema 1, a compacidade implica que o conjunto é fechado e limitado. Suponhamos então que M seja fechado e limitado e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de X onde $n = \dim X$. Considere (x_m) uma sequencia em M. Então, cada x_m tem uma representação na forma

$$x_m = \xi_1^m e_1 + \ldots + \xi_n^m e_n.$$

Como M é limitado, segue que a sequencia (x_m) também é limitada. Assim, existe $k > 0$ tal que $||x_m|| \leq k$ para todo m. Pelo Lema 2, obtemos

$$k \geq ||x_m|| = ||\sum_{j=1}^{n} \xi_j^m e_j|| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^m|,$$

para alguma constante $c > 0$. Portanto, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixado, a sequencia dos números (ξ_j^m) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela tem um ponto de acumulação ξ_j. Isto nos permite concluir que a sequencia (x_m) possui uma subsequencia (z_m) a qual converge para $z = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Como M é fechado, segue que $z \in M$. Isto mostra que toda sequencia em M possui uma subsequencia convergente em M. Portanto M é compacto. ■

Vale destacar outra propriedade bastante interessante: em um espaço normado de dimensão finita a bola unitária fechada é um conjunto compacto. O lema a seguir nos permite concluir a notável recíproca.

Lema 4. (Riesz-Fischer) *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado de dimensão qualquer. Se Y é fechado e é um subconjunto próprio de Z, então para todo $\theta \in (0,1)$, existe $z \in Z$ tal que*

$$||z|| = 1, \quad ||z-y|| \geq \theta, \forall y \in Y.$$

Teorema 5. *Se um espaço normado X tem a propriedade de que a bola unitária fechada é compacta, então X tem dimensão finita.*

1.1.2 Operadores e funcionais lineares e espaço dual algébrico

Um *operador linear* é uma função T tal que

- o domínio D_T de T é um espaço vetorial e a imagem R_T está em um espaço vetorial sobre o mesmo corpo,
- para todo $x, y \in D_T$ e escalar a, valem

$$T(x+y) = T(x) + t(y), \qquad T(ax) = aT(x).$$

Algumas vezes, por simplicidade, usaremos a notação Tx em vez de $T(x)$.

O *espaço nulo* de T é o conjunto $N(T)$ de todos $x \in D_T$ tal que $Tx = 0$.

Exemplo 6. *São operadores lineares:*

1. *(Diferenciação) Sejam X o espaço de todos os polinômios definidos em $[0,1]$ e $T : X \to X$ dado por $Tx(t) = x'(t)$.*
2. *$T : C([a,b]) \to C([a,b])$ dado por $Tx(t) = tx(t)$.*

Uma propriedade básica sobre operador linear diz que: se T é um operador linear então a imagem e o espaço nulo são espaços vetoriais.

A seguir consideramos X e Y espaços normados e $T : D_T \subset X \to Y$ um operador linear.

Dizemos que T é *limitado* quando existe $c > 0$ tal que

$$||Tx|| \leq c||x||, \quad \text{para todo } x \in D_T.$$

Uma questão natural é: qual é o menor c possível tal que a desigualdade acima vale? Não é difícil ver que a resposta desta questão é o supremo dos números $||Tx||/||x||$ tais que $x \in D_T$ e $x \neq 0$. Tal número é definido como a norma de T:

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}.$$

De fato, a função acima define uma norma e uma maneira equivalente de calculá-la é:

$$||T|| = \sup_{||x||=1} ||Tx||.$$

O operador linear diferenciação definido no Exemplo 6 não é limitado. Entretanto, para espaços de dimensão finita temos:

Teorema 7. *Se X é um espaço vetorial de dimensão finita, então todo operador linear em X é limitado.*

Demonstração. Sejam $n = \dim X$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de X, T um operador linear em X e $x = \sum \xi_j e_j$. Como T é linear

$$|||Tx|| = || \sum \xi_j T e_j|| \leq \sum |\xi_j| \, ||Te_j|| \leq \max_k ||Te_k|| \sum |\xi_j|.$$

Pelo Lema 2, existe $c > 0$ tal que

$$|||Tx|| \leq \max_k ||Te_k|| \frac{1}{c} || \sum \xi_j e_j|| = \left(\max_k ||Te_k|| \frac{1}{c} \right) ||x||.$$

Como $\gamma := \frac{1}{c} \max_k ||Te_k||$ é uma constante positiva, segue que T é limitado. ■

Um *funcional linear* é um operador linear com domínio em um espaço vetorial X e imagem no corpo escalar de X, ou seja, $f : D_f \subset X \to \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se X é real ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se X é complexo.

Define-se funcional linear limitado e norma do funcional linear de maneira análoga aos operadores lineares.

Para um funcional linear f com **domínio em um espaço normado** vale: f é contínuo se e somente se f é limitado.

Um conjunto de grande importância é o conjunto de todos os funcionais lineares definidos em um espaço vetorial X denotado por X^* e chamado de *dual algébrico* de X.

Se $n = \dim X$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de X, então para todo funcional linear $f \in X^*$ e todo $x = \sum \xi_j e_j \in X$ temos

$$f(x) = \sum \xi_j f(e_j) = \sum \xi_j a_j, \quad a_j = f(e_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Assim, f é unicamente determinado pelos valores a_j nos n vetores da base de X. Reciprocamente, n escalares $a_1, \dots, a_n$ determinam um funcional linear em X pela equação acima. Em particular, se consideramos os escalares:

$$\begin{array}{c} 1, 0, \ldots, 0 \\ 0, 1, \ldots, 0 \\ \ldots \\ 0, 0, \ldots, 1 \end{array}$$

então temos n funcionais lineares definidos por

$$f_k(e_j) = \delta_{jk}. \tag{1}$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. O conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é chamado base dual da base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ para X e é justificado pelo resultado:

Teorema 8. *Seja X um espaço vetorial n-dimensional e $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para X. Então, $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ definido por* (1) *é uma base para o dual algébrico X^* de X e*

$$\dim X = \dim X^*.$$

1.1.3 Espaços Normados de operadores e espaço dual

Dados dois espaços normados X e Y, consideremos o conjunto $B(X, Y)$ de todos os operadores lineares limitados de X em Y.

Tal conjunto é um espaço vetorial normado com norma definida por

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Tx||.$$

Além disso, se Y é um espaço de Banach, então $B(X, Y)$ é de Banach. Esta propriedade implica em um resultado importante sobre os espaços duais definidos a seguir.

O conjunto de todos funcionais lineares limitados em um espaço normado X constitui um espaço normado com norma dada por

$$||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |f(x)|$$

o qual é chamado de *espaço dual* X' de X.

Como $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é um espaço completo, obtemos

Teorema 9. (Espaço Dual) *O espaço dual X' de um espaço normado é um espço de Banach (independente se X é ou não).*

1.2 Espaços de Hilbert

Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$), com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$, completo (ou seja, de Banach) com a norma induzida pelo produto interno:

$$|| \cdot || = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}.$$

Em um espaço de Hilbert vale a Lei do Paralelogramo:

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2), \quad \forall u, v \in H. \tag{2}$$

Exemplo 10. *São espaços de Hilbert:*

(a) $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}^n$ *com o produto interno dado por* $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.

(b) ℓ^2 *com o produto interno dado por* $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$.

(c) $C([a,b])$ *com o produto interno dado por* $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Observação 11. *Destacamos que a Lei do Paralelogramo caracteriza as normas que são derivadas de produtos internos. De fato, se* H *é um espaço de Banach cuja norma* $|\cdot|$ *satisfaz* (2)*, então* H *é um espaço de Hilbert com produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *tal que* $\langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2} = |\cdot|$.

Exemplo 12. *São espaços de Banach e* **não** *são espaços de Hilbert (pois a norma não provém de um produto interno, ou ainda, a norma não satisfaz* (2)*):*

(a) $C([a,b])$ *com a norma* $||f|| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

(b) ℓ^p, $p \neq 2$, *com a norma* $||x|| = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2\right)^{1/p}$

Destacamos que em espaços com produto interno várias propriedades são válidas:
- o produto interno é uma função contínua;
- valem as desigualdades triangular:

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

e de Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y||;$$

- um subespaço Y de um espaço de Hilbert H é completo se e somente se Y é fechado. Ainda, se Y tem dimensão finita, então Y é completo.

Uma importante propriedade que será usada na prova do Teorema de Riesz é:

Teorema 13. *Se Y é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, então*

$$H = Y \oplus Y^{\perp}.$$

A seguir enunciamos e provamos o principal resultado deste seção.

Teorema 14. (Teorema de Riez) *Todo funcional linear f limitado em um espaço de Hilbert ($f \in H^*$) pode ser representado em termo do produto interno, a saber, existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad x \in H, \tag{3}$$

e

$$||z|| = ||f||. \tag{4}$$

Demonstração. Note que se $f = 0$, então (3) e (4) valem tomando $z = 0$.
Consideremos então $f : H \to \mathbb{R}$ um funcional linear e limitado tal que $f \neq 0$. Provaremos em três passos:

Passo 1. f tem a representação (3).
Consideremos o espaço nulo $N := N(f) = \{x \in H; f(x) = 0\}$. Temos que N é fechado e como $f \neq 0$, $N \neq H$, de modo que, pelo Teorema 13, o complemento ortogonal $N^{\perp} \neq \{0\}$. Assim, $N^{\perp}$ contém um elemento não nulo z_0. Defina

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x,$$

onde $x \in H$ é um elemento arbitrário. Aplicando f, obtemos

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0.$$

Logo, $v \in N$. Como $z_0 \in N^{\perp}$, temos

$$0 = \langle v, z_0 \rangle = \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle = f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle.$$

Como $\langle z_0, z_0 \rangle = ||z_0||^2 \neq 0$, obtemos

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle}\langle x, z_0 \rangle = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} z_0 \right\rangle = \langle x, z \rangle, \quad x \in H$$

onde $z := \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} z_0 \in H$. Portanto, (3) está satisfeita.

Passo 2. z é único.

Suponha, que para todo $x \in H$

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle.$$

Então, $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ para todo $x \in H$. Assim, escolhendo $x = z_1 - z_2$, obtemos

$$\langle x, z_1 - z_2 \rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = ||z_1 - z_2||^2 = 0.$$

Portanto $z_1 = z_2$.

Passo 3. Vale (4)**:** $||z|| = ||f||$**.**
Como $f \neq 0$, então $z \neq 0$. Considerando $x = z$ em (3), obtemos

$$||z||^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq ||f|| \, ||z||,$$

o que implica $||z|| \leq ||f||$. Agora, novamente de (3), e pela desigualdade de Schwarz, temos que

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq ||x|| \, ||z||,$$

o que implica

$$||f|| = \sup_{||x||=1} |\langle x, z \rangle| \leq ||z||.$$

Isto conclui a prova do teorema. ■

Devido a simplicidade da representação de Riesz, os funcionais lineares limitados em espaços de Hilbert tornan-se bastante úteis. Além disso, a representação em (3) é bastante importante na teoria dos operadores nos espaços de Hilbert. Em particular, quando consideramos o operador T^* adjunto de Hilbert de um operador linear limitado T. Para introduzirmos e provarmos a existência de tal operador, precisamos do conceito de forma sesquilinear que pode ser definida em um contexto mais geral.

Dados X e Y espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), uma *forma (ou funcional) sesquilinear* h em $X \times Y$ é uma função $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ que é linear na primeira variável e linear-conjugada na segunda, ou seja, para todos $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ e escalares $a, b \in \mathbb{K}$, valem:

1. $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$
2. $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$
3. $h(ax, y) = ah(x, y)$
4. $h(x, by) = \bar{b}h(x, y)$.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que h é bilinear. A *norma* de h é dada por

$$||h|| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{|h(x,y)|}{||x||\,||y||} = \sup_{||x||,||y||=1} |h(x,y)|,$$

e h é *limitada* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|h(x,y)| \leq c||x||\,||y||, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Usando o Teorema de Riesz obtém-se:

Teorema 15. (Representação de Riesz) *Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert e $h : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ um funcional sesquilinear. Então, existe um único operador linear limitado $S : H_1 \to H_2$ tal que*

$$h(x,y) = \langle Sx, y\rangle, \quad \forall x \in H_1, y \in H_2,$$

e

$$||S|| = ||h||.$$

Um último resultado que será necessário é o lema a seguir que diz respeito ao operador nulo.

Lema 16. *Sejam X e Y espaços com produto interno e $Q : X \to Y$ um operador linear limitado. Então*

(a) $Q = 0$ se e somente se $\langle Qx, y\rangle = 0$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

(b) Se $Q : X \to X$, X é complexo e $\langle Qx, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, então $Q = 0$.

Finalmente podemos definir os operadores adjuntos de Hilbert.

Definição 17. (Operador adjunto de Hilbert T^*) *Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert e $T : H_1 \to H_2$ um operador linear limitado. O operador adjunto de Hilbert é o operador $T^* : H_2 \to H_1$ tal que*

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1, \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

A seguir, não escreveremos os subíndices nos produtos internos ficando subentendido que de fato estão sendo considerados os produtos internos respectivos dos espaços.

A pergunta natural é: dado um operador linear T, existe tal operador T^* ? O próximo resultado mostra que sim.

Teorema 18. (Existência) *O operador T^* definido acima existe, é único e é um operador linear limitado com norma*

$$||T^*|| = ||T||.$$

Demonstração. Temos que

$$h(x,y) = \langle y, Tx\rangle \tag{5}$$

é um funcional sesquilinear pois claramente o produto interno é linear na primeira entrada e linear-conjugado na segunda e T é linear. Além disso, h é limitado, pois pela desigualdade de Schwarz,

$$|h(x,y)| = |\langle y, Tx\rangle| \leq ||y||\,||Tx|| \leq ||T||\,||x||\,||y||,$$

donde $||h|| \leq ||T||$. Além disso,

$$||h|| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{|\langle y, Tx\rangle|}{||x||\,||y||} \geq \sup_{x,Tx\neq 0} \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{||x||\,||Tx||} = \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = ||T||.$$

Logo, $||h|| = ||T||$.
Agora, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único operador linear limitado $T^* : H_2 \to H_1$ tal que

$$h(x,y) = \langle T^* y, x\rangle \quad \text{e} \quad ||T^*|| = ||h|| = ||T||. \tag{6}$$

Comparando (5) e (6), obtemos também $\langle y, Tx\rangle = \langle T^* y, x\rangle$. Tomando o conjugado, finalmente concluímos $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ ■

Definição 19. *Um operador linear limitado $T : H \to H$ em um espaço de Hilbert é dito ser:*

- *auto-adjunto (ou Hermitiano) quando $T^* = T$;*
- *unitário quando T é injetor e $T^* = T^{-1}$;*
- *normal quando $T^*T = TT^*$.*

Claro que se T é auto-adjunto, então T é normal e também vale

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Se T é unitário, então T é também normal. Porém se T é normal não necessariamente é unitário ou auto-adjunto, por exemplo, $T = 2iI$, onde I é o operador identidade, é um operador normal pois $T^* = -2iI$ e portanto $T^*T = TT^* = 4I$, mas $T^* \neq T$ e $T^* \neq T^{-1} = -iI/2$.

Um critério simples e bastante importante para um operador ser auto-adjunto é o que segue.

Teorema 20. *Seja $T : H \to H$ um operador linear limitado em um espaço de Hilbert. Então,*

(a) Se T é auto-adjunto, então $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in H$.

(b) Se H é complexo e $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in H$, então T é auto-adjunto.

Demonstração. **(a)** Se T é auto-adjunto, então

$$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle, \quad \forall x \in H.$$

Portanto $\langle Tx, x\rangle$ é real.
(b) Se $\langle Tx, x\rangle$ é real para todo $x \in H$, então pela definição de T^*,

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle.$$

Assim,

$$0 = \langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle = \langle (T - T^*)x, x\rangle.$$

Pelo Lema 16-(b), $T - T^* = 0$. ■

1.3 Teoria da Aproximação

Sejam $X = (X, ||\cdot||)$ um espaço normado, Y um subespaço de X e $x \in X$. A distância de x a Y é dada por

$$\delta := \delta(x, Y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||.$$

Se existe $y_0 \in Y$ tal que

$$||x - y_0|| = \delta,$$

dizemos que y_0 é a *melhor aproximação* para x de Y.
Tal y_0 pode ou não existir e então tem-se o *problema de existência.* Também o *problema de unicidade* é de interesse, pois dados x e Y podem existir mais de uma melhor aproximação.

A seguir apresentamos condições para a existência.

Teorema 21. (Existência) *Se Y é um subespaço de dimensão finita de um espaço normado $X = (X, ||\cdot||)$, então para cada $x \in X$ existe uma melhor aproximação para x e Y.*

Demonstração. Seja $x \in X$ dado e considere a bola fechada $B = \{y \in Y; ||y|| \leq 2||x||\}$. Como $0 \in B$, temos

$$\delta(x, B) = \inf_{y \in B} ||x - y|| \leq ||x - 0|| = ||x||.$$

Agora, se $y \notin B$, então $||y|| > 2||x||$ e

$$||x-y|| \geq ||y|| - ||x|| > 2||x|| - ||x|| = ||x|| \geq \delta(x,B).$$

Isto mostra que $\delta(x,B) = \delta(x,Y)$ e, pela desigualdade estrita acima, este valor não pode ser assumido por um $y \in Y \setminus B$. Assim, se uma melhor aproximação para x existe, ela deve estar em B. Como B é fechado e limitado e Y tem dimensão finita, segue que B é compacto. Sendo a norma uma função contínua definida num conjunto compacto, ela assume os valores máximos e mínimos. Em particular, existe $y_0 \in B$ tal que $||x-y||$ assume um mínimo em $y = y_0$. Pela definição, y_0 é uma melhor aproximação para x de Y. ■

Exemplo 22. *Considere Y o espaço de todos polinômios de grau no máximo n (incluindo o polinômio nulo). Dada uma função contínua $f \in C([a,b])$, existe um polinômio p_n de grau no máximo n tal que para qualquer $g \in Y$ temos*

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - p_n(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

A aproximação no espaço $C([a,b])$ é chamada aproximação uniforme.

Observação 23. *A hipótese de dimensão finita é essencial: considere Y o subespaço de $C([0,1/2])$ de todos os polinômios de todos graus. Então $\dim Y = \infty$. Considerando a função contínua $f(t) = 1/(1-t)$ em $[0,1/2]$ temos $\delta(x,Y) = 0$, pois para qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que*

$$|f(t) - (1 + t + \ldots + t^n)| < \varepsilon, \quad n > N.$$

Além disso, como f não é um polinômio, vemos que não pode existir $y_0 \in Y$ tal que $||f - y_0|| = 0$.

Para o problema de unicidade os seguinte conceitos são necessários:
Um subconjunto M de um espaço vetorial X é dito ser *convexo* se $y, z \in M$ implica

$$W = \{v = a + (1-a)z; 0 \leq a \leq 1\} \subset M.$$

Em espaço normado $X = (X, ||\cdot||)$ o conjunto M de melhores aproximações para um dado ponto x de um subespaço Y de X é convexo. Consequentemente, se existem várias aproximações para x de Y, então cada uma delas está em Y e tem distância δ de x. Logo, Y e a bola fechada $B = \{v : ||v-x|| \leq \delta\}$ têm um segmento W em comum. E portanto, W está na esfera $S(x,\delta)$ de centro x e raio δ pois $||w-x|| = \delta$, $w \in W$. Ainda mais, para cada $w \in W$ existe um único $v = (w-x)/\delta$ que tem norma 1. Isto significa que para cada melhor aproximação $w \in W$ existe um único correspondente $v \in S(0,1)$.

Portanto vemos que para obter unicidade de melhores aproximações devemos excluir normas que permitam que a esfera contenha segmentos de retas, o que motiva a seguinte definição.

Um espaço normado $X = (X, ||\cdot||)$ é *estritamente convexo* quando a norma é tal que para todo $x, y \in X$ de norma 1, $x \neq y$ tem-se $||x + y|| < 2$.

Teorema 24. (Unicidade) *Em um espaço normado estritamente convexo X existe no máximo uma melhor aproximação para um $x \in X$ de um dado subespaço Y.*

Exemplo 25. *Todo espaço de Hilbert H é estritamente convexo. De fato, sejam $x, y \in h$, de norma 1, $x \neq y$. Então $||x - y|| = a > 0$, e pela Lei do Paralelogramo (2),*

$$||x + y||^2 = 2(||x||^2 + ||y|||^2) - ||x - y||^2 = 4 - a^2 < 4.$$

Exemplo 26. *O espaço $C([a, b])$* **não é** *estritamente convexo. De fato, sejam $f(t) = 1$ e $g(t) = (t - a)/(b - a)$, $t \in [a, b]$ Então, $f, g \in C([a, b])$, $f \neq g$, $||f|| = ||g|| = 1$ e*

$$||f + g|| = \max_{t\in[a,b]} \left|1 + \frac{t - a}{b - a}\right| = 2.$$

Portanto, em aproximações uniformes condição adicional é necessária para garantir a unicidade.

O restante desta seção é dedicada ao estudo da aproximação uniforme.

Um subespaço Y de X de dimensão finita n satisfaz a *condição de Haar* se toda função $g \in Y$, $g \neq 0$, tem no máximo $n - 1$ zeros em $[a, b]$.

Exemplo 27. *O subespaço n-dimensional de todos os polinômios de grau no máximo $n - 1$ junto com o polinômio nulo satisfaz a condição de Haar.*

Teorema 28. (Teorema da Unicidade de Haar, Melhor Aproximação) *Seja Y um subespaço de dimensão finita do espaço das funções contínuas a valores reais $C([a, b])$. Então a melhor aproximação de Y é única para cada $f \in C([a, b])$ se e somente se Y satisfaz a condição de Haar.*

Notamos que o subespaço $(n + 1)$-dimensional Y_n de todos os polinômios de grau no máximo n junto com o polinômio nulo ainda satisfaz a condição de Haar, o que implica:

Teorema 29. *A melhor aproximação para uma função $f \in C([a, b])$ de Y_n é única.*

Os resultados anteriores são dedicados aos aspectos teóricos da aproximação uniforme. Um problema prático é a determinação das melhores aproximações em termos de fórmulas explícitas que possam ser usadas para cálculos e outros fins. Isso não é fácil, em geral soluções explícitas são conhecidas para relativamente poucas funções $f \in C([a, b])$. Neste contexto, uma ferramenta útil é a que segue.

Dados $f \in C([a,b])$, Y um subespaço de $C([a,b])$ e $g \in Y$, dizemos que o conjunto de pontos $t_0, \ldots, t_k \in [a,b]$, onde $t_0 < \ldots < t_k$ é um *conjunto alternado* se $f(t_j) - g(t_j)$ tem alternadamente os valores $||f-g||$ e $-||f-g||$ em consecutivos pontos t_j.

O lema a seguir fornece uma técnica para encontrar a melhor aproximação uniforme.

Lema 30. *Let Y um subespaço $C([a,b])$ de dimensão finita n satisfazendo a condição de Haar. Dada $f \in C([a,b])$, seja $g \in Y$ tal que para $f-g$ existe um conjunto alternado de $n+1$ pontos. Então, g é a melhor aproximação uniforme para f de Y.*

Um problema prático importante (e aplicação do lema anterior) é a aproximação para função $f \in C([-1,1])$ dada por

$$f_n(t) = t^n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ fixado})$$

de $Y = [\{g_0, \ldots, g_{n-1}\}]$ (o conjunto gerado por $\{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$), onde

$$g_j(t) = t^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ou seja, queremos aproximar f_n por um polinômio de grau no máximo $n-1$:

$$g(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Note que $h_n := f_n - g$ é um polinômio de grau n com coeficiente líder $a_n = 1$.

Pelo Lema 30 basta encontrarmos $g \in Y$ tal que $f_n - g$ tenha um conjunto alternado de $n+1$ pontos.

Agora, se consideramos

$$t = \cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

então obviamente $t \in [-1,1]$ e em $[0,\pi]$ as funções definidas por $\cos n\theta$ têm $n+1$ pontos extremos, sendo os valores extremos ± 1 em ordem alternada. Devido ao Lema 30 podemos esperar que tais funções ajudarão a encontrar a aproximação procurada desde que consigamos escrever $\cos n\theta$ como uma função polinomial em $t = \cos\theta$. De fato, é possível provar por indução que existe uma representação na forma

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{j=0}^{n-1} b_{nj}\cos^j\theta, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

onde b_{nj} são constantes reais.

O problema colocado acima está quase resolvido, e para darmos a solução, vamos introduzir as notações e terminologias usuais: as funções definidas por

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1,1], \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{8}$$

são chamadas de polinômios de Chebyshev de primeiro tipo de ordem n.

Assim, temos que

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) = t^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_{nj} t^j. \tag{9}$$

Finalmente, note que a função g definida por

$$g(t) := f_n(t) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) \tag{10}$$

é tal que:

1. $g \in Y$, por (9);
2. $f_n - g = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n(t)$ tem um conjunto alternado de $n+1$ pontos (a saber, os pontos extremos de $\cos n\theta$) cujos valores de $f_n - g$ nestes pontos (a saber, os valores extremos) alternam entre os valores $\pm 1/2^{n-1} = \pm||T_n/2^{n-1}|| = \pm||f_n - g||$.

Portanto, pelo Lema 30, a função g definida em (10) é a melhor aproximação uniforme para $f_n(t) = t^n$ de Y.

Observação 31. *O problema de aproximação estudado acima pode ser formulado também da seguinte maneira: encontrar um polinômio g sobre o intervalo $[-1,1]$, dentre todos os polinômios de grau n com coeficiente líder 1, que tenha o menor desvio máximo de 0 (ou seja, o menor valor máximo absoluto). Dessa forma, a solução do problema de aproximação segue de um conhecido resultado ([Sz39]) sobre os polinômios de Chebyshev, o qual expressa a famosa propriedade de mínimo desses polinômios, dado no teorema a seguir.*

Teorema 32. *O polinômio de grau n definido por*

$$\tilde{T}(t) := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t), \quad t \in [-1,1], \quad (n \geq 1)$$

tem o menor desvio máximo de 0 no intervalo $[-1,1]$ dentre todos os polinômios reais considerados em $[-1,1]$ que tem grau n e coeficiente líder 1. O valor máximo absoluto de $\tilde{T}$ é

$$\frac{1}{2^{n-1}}$$

e $|\tilde{T}(t)|$ *atinge esse máximo exatamente* $n+1$ *vezes em*

$$t = \cos\frac{k\pi}{n} \quad \textit{para } 0 \leq k \leq n.$$

Algumas outras propriedades que os polinômios de Chebyshev satisfazem e que podem ser verificadas facilmente são:

1. $|T_n(t)| \leq 1, \quad t \in [-1,1]$.

2. $T_n(-t) = (-1)^n T_n(t)$, $t \in [-1,1]$, isto é, T_n é uma função par se n é uma função ímpar se n é impar.

3. Os polinômios de Chebyshev satisfazem a relação de recorrência:

$$T_{n+1}(t) = 2xT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad t \in [-1,1].$$

Consequentemente podemos encontrar as expressões explícitas para os primeiros polinômios facilmente:

$$\begin{array}{lll} T_0(t) = 1 & T_1(t) = t & T_2(t) = 2t^2 - 1 \\ T_3(t) = 4t^3 - 3t & T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1 & T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t. \end{array}$$

As Figuras 1 e 2 ilustram os gráficos dos primeiros polinômios de Chebyshev T_n e de $\tilde{T}_n$.

Para finalizar, destacamos que os polinômios de Chebyshev definidos e estudados aqui podem ser encontrados em diversas aplicações: eles aparecem na teoria da aproximação porque suas raízes, também chamadas de nós de Chebyshev, são usadas como os nós em interpolação polinomial. No estudo de equações diferenciais eles aparecem como as soluções das equações (casos especiais da equação diferencial de Sturm–Liouville)

$$\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Também estão relacionados com a representação de funções definidas positivas em $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| = 1\}$ ([Sc42]). Certamente alguns desses tópicos podem ser objetos de estudo para projetos futuros.

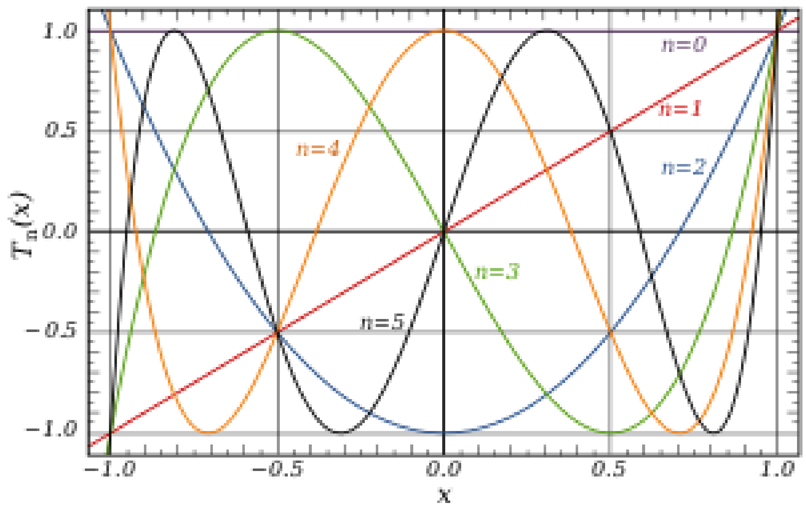

Figura 1: Polinômios de Chebyshev T_n de ordem n=0,1,2,3,4,5.

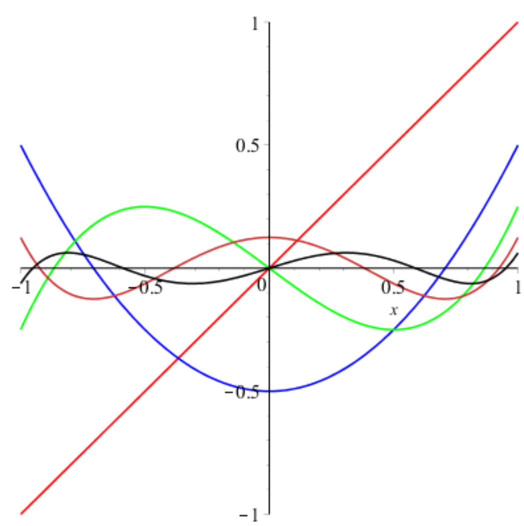

Figura 2: Polinômios de Chebyshev $\tilde{T}_n$ de ordem n=1,2,3,4,5 (com coeficiente líder 1).

Referências Bibliográficas

[Kr89] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[Sc42] Schoenberg, I. J. *Positive definite functions on spheres*. Duke Math. J. 9, (1942). 96–108.

[Sz39] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23. American Mathematical Society, New York, 1939.