Quarta lista de exercícios da disciplina

SMA0353- Cálculo I

1 Exercícios da seção 3.4

Exercício 19: Encontre a derivada da função $y = (2x-5)^4(8x^2-5)^{-3}$.

Exercício 25: Encontre a derivada da função $F(z) = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$.

Exercício 37: Encontre a derivada da função $y = \operatorname{cotg}^2(\operatorname{sen}(\theta))$.

Exercício 39: Encontre a derivada da função $f(t) = \operatorname{tg}(e^t) + e^{\operatorname{tg}(t)}$.

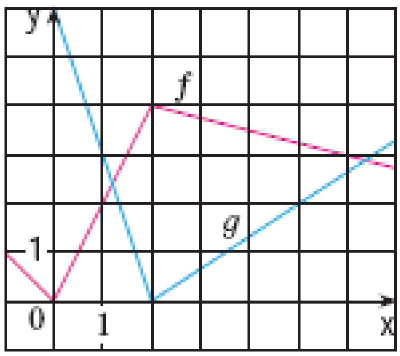
Exercício 63: É dada uma tabela de valores para $f,\ g,\ f'$ e g'.

x	f(x)	g(x)	f'(x)	g'(x)
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.

(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

Exercício 65: Se f e g forem as funções cujos gráficos estão mostrados, seja $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.



(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$

2 Exercícios da seção 3.5

Exercício 3: Considere a equação $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$.

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

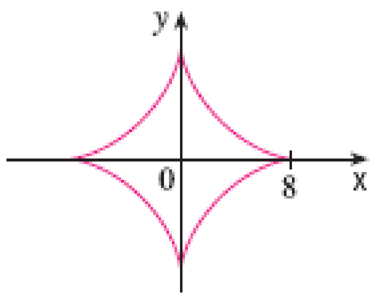
(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes, substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

Exercício 10: Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implicitamente $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$.

Exercício 13: Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implicitamente $4\cos(x)\operatorname{sen}(y) = 1$.

Exercício 24: Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar $\dfrac{dx}{dy}$, onde $y\sec(x) = x\operatorname{tg}(y)$.

Exercício 28: Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (astroide) no ponto $(-3\sqrt{3}, 1)$.



Exercício 45: Encontre a derivada da função $y = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{x})$. Simplifique se for possível.

Exercício 50: Encontre a derivada da função $y = \operatorname{tg}^{-1}(x - \sqrt{1+x^2})$. Simplifique se for possível.

Exercício 59: Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de interseção. Mostre que as curvas $x^2+y^2 = r^2$ e $ax+by = 0$ são ortogonais. Esboce ambas as curvas no mesmo sistema de coordenadas.

Exercício 63: A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

Exercício 67: (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

desde que o denominador não seja 0.

(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \dfrac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

3 Exercícios da seção 3.6

Exercício 3: Derive a função $f(x) = \text{sen}(\ln(x))$.

Exercício 4: Derive a função $f(x) = \ln(\text{sen}^2(x))$.

Exercício 17: Derive a função $y = \ln(|2 - x - 5x^2|)$.

Exercício 25: Encontre y' e y'', onde $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Exercício 26: Encontre y' e y'', onde $y = \ln(\sec(x) + \text{tg}(x))$.

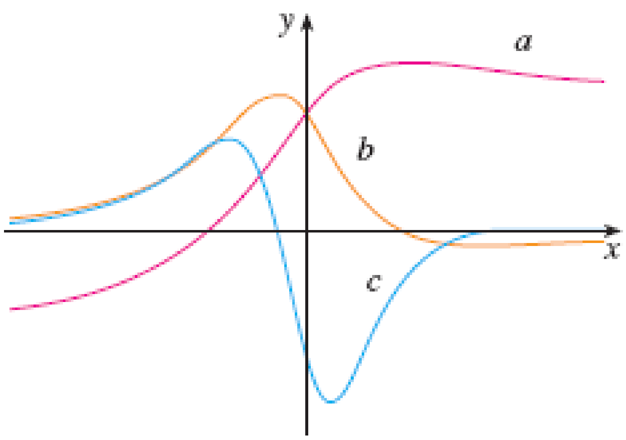
Exercício 34: Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \ln(x^3 - 7)$ no ponto $(2, 0)$.

Exercício 41: Use a derivação logarítmica para achar a derivada da função $y = x^x$.

Exercício 52: Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln(x))$.

4 Exercícios da seção 3.7 (da 5ª edição)

Exercício 1: A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique sua escolha.



Exercício 13: Encontre as derivadas primeira e segunda da função $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Exercício 17: Encontre as derivadas primeira e segunda da função $H(t) = \text{tg}(3t)$.

Exercício 31: Encontre y'' derivando implicitamente $x^3 + y^3 = 1$.

Exercício 39: Encontre $D^{103}(\cos(2x))$ encontrando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

Observação para o exercício 39: Se $y = f(x)$, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = D^n(f(x)).$$

Exercício 45: A equação do movimento de uma determinada partícula é dada por $s = \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, $0 \leq t \leq 2$, onde s está em metros e t, em segundos. Encontre

(a) a velocidade e a aceleração da partícula como funções de t,

(b) a aceleração depois de 1 segundo, e

(c) a aceleração no instante em que a velocidade é 0.

Exercício 51: Uma massa atada a uma mola vertical tem função posição dada por $y(t) = A\,\text{sen}(\omega t)$, onde A é a amplitude de sua oscilação e ω é uma constante.

(a) Encontre a velocidade e a aceleração como função do tempo.

(b) Mostre que a aceleração é proporcional ao deslocamento de y.

(c) Mostre que a velocidade é maxima quando a aceleração é 0.

Exercício 53: Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

Exercício 57: Para quê valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação

$$y'' + 5y' - 6y = 0?$$

5 Exercícios da seção 3.9

Exercício 1: Se V for o volume de um cubo com aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre $\frac{dV}{dt}$ em termos de $\frac{dx}{dt}$.

Exercício 14: Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h, e o navio B está navegando para o norte a 25 km/h. Quão rápido varia a distância entre os navios às 4 horas da tarde?

Dicas para o exercício 14: (a) Quais são as quantidades dadas no problema?

(b) Qual é a incógnita?

(c) Faça um desenho da situação para qualquer instante t.

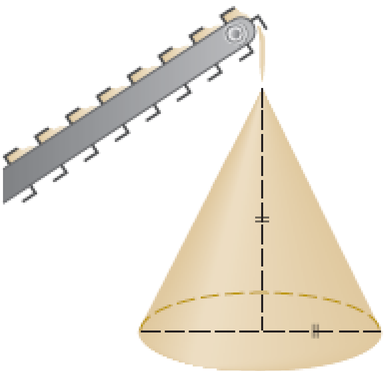
(d) Escreva uma equação que relacione as quantidades.

(e) Termine a resolução do problema.

Exercício 16: Um holofote sobre o chão ilumina uma parede 12 m distante dele. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido decresce o comprimento de sua sombra sobre a parede quando ele está a 4 m dela?

Exercício 24: Um cocho tem 6 m de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 1 m de base e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 1,2 m^3/min, quão rápido estará se elevando o nível da água quando ela tiver 30 cm de profundidade?

Exercício 27: Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de 3 m^3/min, constituindo uma pilha na forma de um cone com o diâmetro da base e altura sempre iguais. Quão rápido cresce a altura da pilha quando está a 3 m de altura?

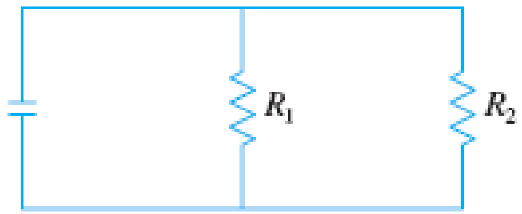


Exercício 31: A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás está sendo comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é de 600 cm^3, a pressão é 150 kPa e a pressão cresce a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

Exercício 33: Se dois resistores com resistência R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na figura, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Se R_1 e R_2 estão crescendo a taxas de 0,3 Ω/s e 0,2 Ω/s, respectivamente, quão rápido estará variando R quando $R_1 = 80\ \Omega$ e $R_2 = 100\ \Omega$?



6 Exercícios da seção 3.11

Exercício 7: Demonstre a identidade $\text{senh}(-x) = -\text{senh}(x)$. Isso mostra que senh é uma função ímpar.

Exercício 8: Demonstre a identidade $\cosh(-x) = \cosh(x)$. Isso mostra que cosh é uma função par.

Exercício 23: (c) Use a definição da função hiperbólica senh para achar o limite $\lim_{x\to\infty} \text{senh}(x)$.

Exercício 38: Encontre a derivada da função $y = \text{senh}(\cosh(x))$. Simplifique se for possível.

Exercício 51: Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados 14 m na forma da catenária $y = 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right) - 15$, em que x e y são medidas em metros.

(a) Encontre a inclinação dessa curva onde ela encontra o poste à direita.

(b) Encontre o ângulo θ entre a reta tangente e o poste.