Prova 1 - SMA5717 Análise Funcional - 05/10/2012

1. Seja E um espaço de Banach com $\dim E = \infty$. Use o Lema de Baire para mostrar que qualquer base de Hamel de E é não-enumerável. Dê um exemplo de um e.v.n. F com $\dim F = \infty$ e com Base de Hamel enumerável.

2. Sejam E, F e.v.n. e $T \in L(E,F)$ tal que "$x_n \to 0 \implies (Tx_n)$ limitada". Mostre que $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

3. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Provar a equivalência dos três teoremas básicos da análise funcional enunciados a seguir:

   (a) **Teorema da aplicação inversa:** Se T é uma bijeção contínua, então T^{-1} é contínua.

   (b) **Teorema da aplicação aberta:** Se T é contínua e sobrejetiva, então T é uma aplicação aberta.

   (c) **Teorema do gráfico fechado:** Se o gráfico de T é fechado, então T é contínua.

   Dicas:

   (i) Considere o diagrama abaixo: $N(T)$ representa o núcleo de T

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \downarrow & \nearrow & \\ E/N(T) & & \end{array}$$

   (ii) A aplicação $S : G(T) \to E$, $(v, Tv) \mapsto v$, é uma bijeção; $G(T)$ é o gráfico de T.

4. Seja E um espaço de Banach e seja $K \subset E$ um subconjunto compacto na topologia forte. Seja (x_n) uma sequência em K tal que $x_n \rightharpoonup x$. Mostre que $x_n \to x$.

   Dica: argumente por contradição

5. Seja E um espaço reflexivo e $K \subset E$. Mostre que K é fracamente compacto se, e somente se K é limitado e fracamente fechado.

6. Seja E um espaço reflexivo e $\varphi \in E^*$. Mostre que existe $x \in S_E$ tal que $\varphi(x) = \|\varphi\|$.

7. Utilizando o item anterior mostre que $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ não é reflexivo. Para isso considere $\varphi : C([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(f) = -\int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt.$$

8. Seja K um espaço métrico compacto que não é reduzido a um número finito de pontos. Mostre que $C(K)$ munido da norma usual não é reflexivo.

   Dica: argumente por contradição. Você precisará do

   Lemma de Urysohn: Sejam X um espaço topológico normal; A e B subconjuntos fechados de X com $A \cap B = \emptyset$. Então existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ e $f(y) = 1$ para todo $y \in B$.

9. Seja E um e.v.n. de dimensão infinita satisfazendo uma das seguintes condições:

(a) E^* é separável; (b) E é reflexivo.

Prove que existe uma sequência $(x_n) \subset E$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightharpoonup 0$.

10. Mostre que se E é reflexivo, então E é Banach.

11. Seja E um espaço de Banach. Mostre que

$$E \quad \text{é reflexivo} \Leftrightarrow E^* \quad \text{é reflexivo.} \qquad (\textbf{Dica} : \textbf{Hahn} - \textbf{Banach})$$

12. Mostre que se E^* é separável, então E é separável. Mostre (apresente um exemplo) que a recíproca, em geral, não é verdade.

13. Seja $1 \leq p < \infty$, então o dual de ℓ_p é isometricamente isomorfo a $\ell_{p'}$ onde $1 < p' \leq \infty$ é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mostre que $S : \ell_{p'} \to (\ell_p)^*$ é um isomorfismo isométrico, onde

$$\langle S(y), x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_n) \in \ell_p, \quad y = (y_n) \in \ell_{p'}.$$

14. Prove que não pode existir isomorfismo isométrico entre ℓ_1 e $(\ell_\infty)^*$.

15. Mostre que existe um funcional não-nulo $\varphi \in (\ell_\infty)^*$ tal que $\varphi(e_n) = 0$ para todo $n \geq 1$. Aqui $e_n = (\delta_{i\,n})_{i \in \mathbb{N}}$. **(Dica: Hahn-Banach)**

16. Seja $1 \leq p < \infty$. Mostre que se $\varphi \in (\ell_p)^*$ é t.q. $\varphi(e_n) = 0$ para todo $n \geq 1$, então $\varphi \equiv 0$.

17. Preencha a seguinte tabela com S (para sim) e N (para não).

	Banach	Separável	Reflexivo	Unif. Convexo
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$	S	S	S	N
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$	S	S	S	N
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$	S	S	S	S
$(c_{00}, \|\cdot\|_1)$	N	S	N	N
$(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$	N	S	N	N
$(c_{00}, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$	N	S	N	S
$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$	S	S	N	N
$(c, \|\cdot\|_\infty)$	S	S	N	N
ℓ_1	S	S	N	N
ℓ_∞	S	N	N	N
ℓ_p, $1 < p < \infty$	S	S	S	S
$(C([0,1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$	N	S	N	S
$(C(K, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)^\dagger$	S	S	N	N

Dica: Se $1 \leq p < \infty$, então a aderência de c_{00} em $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é ℓ_p. A aderência de c_{00} em $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é c_0.

† Aqui K é um espaço métrico compacto que não é reduzido a um número finito de pontos. Lembrar do seguinte resultado mais geral: Seja $\mathcal{K}$ um espaço topológico compacto de Hausdorff. Então $(C(\mathcal{K}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ é separável se, e somente se, $\mathcal{K}$ é metrizável.