Prova 3 - SMA5717 Análise Funcional - 30/11/2012

1. **O completamento de um espaço com produto interno.** Seja E um espaço com produto interno sobre o corpo $\mathbb{K}$. Denote por $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ seu produto interno. Assuma (a) e (b) abaixo. **Prove (c) e (d).**

   (a) Seja $R_E : E \to E^*$ a aplicação de Riesz, $\langle R_E y, x\rangle = (x,y)$ para $x, y \in E$. Sabemos que R_E é uma isometria linear conjugada. Mostre que
   $$((R_E x, R_E y)) = (y, x)$$
   faz de $R_E(E)$ um espaço com produto interno. Estenda este produto interno para $\overline{R_E(E)}$. Mostre que sobre $\overline{R_E(E)}$ a norma induzida por tal produto interno coincide com norma induzida de E^*.

   (b) Prove que $\overline{R_E(E)} = E^*$ e conclua que E^* é um espaço de Hilbert com a norma $\|\cdot\|_{E^*}$. Denote por $(\cdot,\cdot)_{E^*} : E^* \times E^* \to \mathbb{K}$ o produto interno de E^*.

   (c) Use os dois itens anteriores e o Teorema de Representação de Riesz para mostrar que E^{**} é um espaço de Hilbert e seu produto interno $(\cdot,\cdot)_{E^{**}} : E^{**} \times E^{**} \to \mathbb{K}$ é dado por
   $$(\Phi, \Psi)_{E^{**}} = (R_{E^*}^{-1}\Psi, R_{E^*}^{-1}\Phi)_{E^*}, \quad \forall\, \Phi, \Psi \in E^{**}.$$

   (d) Seja $J_E : E \to E^{**}$ o mergulho canônico. Mostre que $J_E = R_{E^*} \circ R_E$. Conclua que E^{**} é o completamento de E.

2. Sejam H um espaço de Hilbert e $R : H \to H^*$ a isometria linear conjugada SOBREJETIVA dada pelo Teorema de Representação de Riesz, $\langle Ry, x\rangle = (x,y)$ para quaisquer $x, y \in H$. Seja $T \in \mathcal{L}(H,H)$ e considere os operadores $T^* : H^* \to H^*$ e $\overset{*}{T} := R^{-1} \circ T^* \circ R : H \to H$. Mostre que
   $$\sigma(T^*) = \sigma(\overset{*}{T}) \qquad \text{e} \qquad \sigma_p(T^*) = \sigma_p(\overset{*}{T}).$$

3. Sejam H um espaço de Hilbert, E um espaço de Banach, $M \subset H$ um subespaço e $S \in \mathcal{L}(M,E)$. Mostre que existe $T \in \mathcal{L}(H,E)$ que estende S e tal que $\|T\|_{\mathcal{L}(H,E)} = \|S\|_{\mathcal{L}(M,E)}$.

4. Seja $E = \ell_p(\mathbb{K})$ com $1 \le p \le \infty$. Seja λ_n uma sequência limitada em $\mathbb{K}$ e considere o operador $T \in \mathcal{L}(E,E)$ definido por
   $$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$
   Prove que $T \in \mathcal{K}(E,E)$ se, e somente se, $\lambda_n \to 0$.

5. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Considere as seguintes propriedades:

   (P) Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência. Se $u_n \rightharpoonup u$, então $Tu_n \to Tu$.

   (Q) $T : (E, \sigma(E,E^*)) \to (F, \|\cdot\|)$ é contínuo.

   (a) Prove que (Q) é satisfeita se, e somente se, T tem posto finito.

   (b) Prove que se $T \in \mathcal{K}(E,F)$, então (P) é satisfeita.

   (c) Suponha $E = \ell_1$ ou $F = \ell_1$. Prove que todo operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ satisfaz (P).

Para os itens a seguir neste exercício, suponha E reflexivo.

(d) Prove que $T \in \mathcal{K}(E, F)$ se, e somente se, (P) é satisfeita,

(e) Deduza então que todo operador $T \in \mathcal{L}(E, \ell^1)$ é compacto.

(f) Prove que todo operador $T \in \mathcal{L}(c_0, E)$ é compacto.

6. Neste exercício $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ denota um elemento de $\ell_2(\mathbb{K})$. Considere os operadores $S_r, S_l : \ell_2(\mathbb{K}) \to \ell_2(\mathbb{K})$ definidos por

$$S_r x = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$
$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots).$$

(a) Determine $\|S_r\|$ e $\|S_l\|$. S_r e S_l são operadores compactos?

(b) Prove que $\sigma_p(S_r) = \emptyset$.

(c) Prove que $\sigma(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq 1\}$.

(d) Prove que $\sigma_p(S_l) = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| < 1$. Determine os auto-espaços correspondentes.

(e) Prove que $\sigma(S_l) = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq 1\}$.

(f) Determine $\overset{*}{S_r}$ e $\overset{*}{S_l}$. (**Dica: veja no quadro.**)

7. Seja E um espaço reflexivo e $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Prove que $\sigma(T) = \sigma(T^*)$. Mostre que não existem relações de inclusões gerais para $\sigma_p(T)$ e $\sigma_p(T^*)$ **(Dica: considere S_r e S_l)**.

8. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$.

(a) Seja $T \in \mathcal{L}(H, H)$ é um operador auto-adjunto. Mostre que

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tu, u\rangle|; u \in H \text{ e } \|u\| = 1\}.$$

(b) Se $T \in \mathcal{K}(H, H)$ é auto-adjunto então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é um autovalor de T.