Prova 2 - SMA5717 Análise Funcional - 09/11/2012

1. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $(x_n) \subset X$, $x_0 \in X$ tais que cada subsequência de (x_n) possui uma subsequência que converge para x_0. Prove que $x_n \to x_0$.

2. Assuma $0 < \mu(\Omega) < \infty$.

   (a) Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Mostre que $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com inclusão contínua. Mais precisamente mostre que
   $$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall\, u \in L^q(\Omega).$$

   (b) Se $u \in L^\infty(\Omega)$, mostre que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

   (c) Se $u \in L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, +\infty)$, e existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C$, para todo $p \in [1, +\infty)$, mostre que $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

3. Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Dê um exemplo de um espaço de medida (Ω, σ, μ) com $\mu(\Omega) = \infty$ e tal que $L^q(\Omega) \not\subset L^p(\Omega)$.

4. Seja $1 < p < \infty$. Prove que existe $C > 0$ (que depende somente de p) tal que
   $$||a+b|^p - |a|^p - |b|^p| \leq C(|a|^{p-1}|b| + |a||b|^{p-1}), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω. Mostre que $u \in L^p(\Omega)$ e que $u_n \rightharpoonup u$ em $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$.

   (b) Seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ como no item (a). Prove que
   $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (|u_n|^p - |u_n - u|^p)\, d\mu = \int_\Omega |u|^p d\mu.$$

   (c) Use o item (b) para mostrar que se $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ é tal que:
   $$u_n \to u \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)},$$
   então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$.

   (d) Suponha que $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ é tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$ e $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Mostre que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$.

5. **(O inverso do Teo. Conv. Dom. de Lebesgue)** Seja $1 \leq p \leq \infty$, $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Mostre que existe uma subsequência (f_{n_k}) e $g \in L^p(\Omega)$ tal que

   (a) $f_{n_k} \to f$ q.t.p. em Ω;

   (b) $|f_{n_k}| \leq g$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. Ω.

6. Preencha a seguinte tabela com S (para sim) e N (para não) e também escreva o espaço dual. Nesta tabela $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto Lebesgue mensurável com medida positiva.

	Banach	Separável	Reflexivo	Unif. Convexo	Espaço dual
$L^1(\Omega)$					
$L^p(\Omega), \quad 1 < p < \infty$					
$L^\infty(\Omega)$					XXXX

7. Dê um exemplo (e justifique) de um espaço de medida (Ω, σ, μ) tal que para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ é NÃO SEPARÁVEL.

8. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$. Para cada $r > 0$ defina

$$f_r(x) = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) d\mu, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

   (a) Prove que $f_r \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ and que $f_r(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$ (para r fixado).

   (b) Prove que $f_r \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ quando $r \to 0$.

   Dica: escreva $f_r = \varphi_r * f$ com uma φ_r apropriada.