Notas de aula

Cálculo 2, ICMC-USP, 2021

Ana Paula Peron e Farid Tari

SMA 354 Cálculo II - 2o. semestre 2021

Conteúdo das aulas

Capítulo 1: Integração

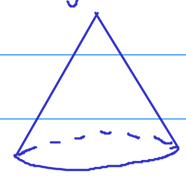
Capítulo 2: Funções de várias variáveis

Aula 1

Integral definida

Conteúdo da aula:
- Introdução
- Soma de Riemann
- Integral de Riemann
- Integrabilidade de funções contínuas
- Propriedades de integrais definidas

Exemplo 1
Uma empresa construiu uma catedral com a forma de um cone (Rio de Janeiro, Maringa).
Cobra por m^2 de área de construição
Qual é o valor total da obra?



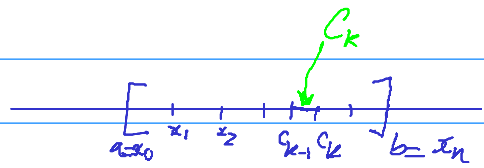
Exemplo 2 Há um vazamento de combustível em um petroleiro avariado ao mar. O vazamento depende do tempo.
Qual é o valor médio do vazamento?

Os engenheiros encontram problemas reais que, aparentemente, são distintos. Os matemáticos procuram teorias para explicar as leis comuns atrás dos problemas.

Conteúdo da disciplina
§1: Integração de funções de uma variável
§2: Funções de várias variáveis

Integral definida

Partição de um intervalo



Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo

Escolhamos $(n+1)$ pontos x_k em $[a,b]$ tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ é chamado uma **partição** de $[a,b]$.

Denotamos por Δx_k a largura do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

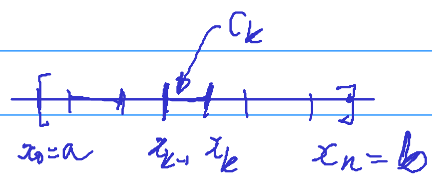
A norma da partição P, denotada por $\|P\|$, é o maior de todas as larguras Δx_k, $k = 1, \dots, n$.

Ou seja

$$\|P\| = \max\{\Delta x_k, \ 1 \le k \le n\}$$

$$= \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$

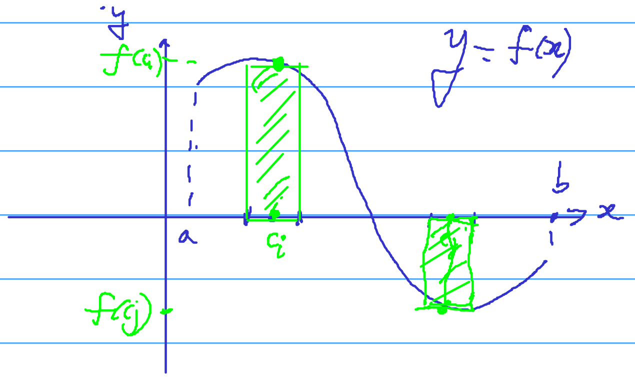
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Em cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ escolhamos um número c_k.



O somatório $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = f(c_1)(x_1-a)+f(c_2)(x_2-x_1)+ \cdots + f(c_n)(b-x_{n-1})$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

é chamado Soma de Riemann.



Definição (Integral definida)

Seja f uma função definida em um intervalo $[a,b]$.

Dizemos que um número J é a integral definida de f em $[a,b]$ e que J é o limite das somas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ se a seguinte condição for satisfeita:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição P de $[a,b]$ com $\|P\| < \delta$ e qualquer escolha de c_k em $[x_{k-1}, x_k]$, temos

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J \right| < \varepsilon$$

ou seja $\quad \lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = J$

<u>Notação</u> $\quad J = \int_a^b f(x)\,dx$

Dizemos que f é (Riemann) integrável se o limite J existe

Se J não existir (ou depende da escolha de P ou dos c_k's) dizemos que f não é (Riemann) integrável em $[a,b]$.

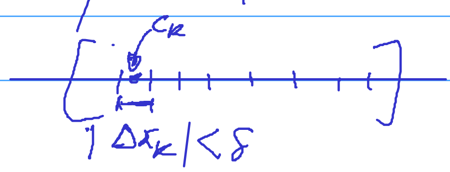
Condição necessária de integrabilidade

<u>Proposição</u> Toda função integrável $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada.

(Lembrando: f é limitada em $[a,b]$ se $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$)

<u>Demonstração</u>

Como f é integrável, para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que se $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|P\| < \delta$



e $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, então

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - J \right| < 1 = \varepsilon$$

Ou seja

$$|f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(b - x_{n-1}) - J| < 1.$$

Usando o fato $|A+B| \leq |A| + |B|$

$$|A| - |B| \leq |A+B|$$

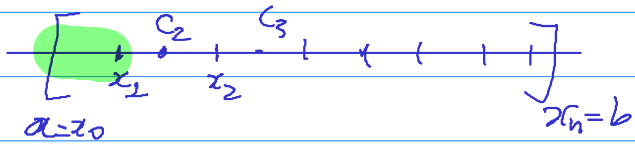
Obtemos

$$|f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(b - x_{n-1})| < 1 + J$$

$$|f(c_1)(x_1 - a)| - |\underbrace{f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(b - x_{n-1})}_{K}| < 1 + J$$

Portanto

$$|f(c_1)(x_1 - a)| < 1 + J + K.$$



Fixamos os $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $2 \leq k \leq n$

obtemos $$|f(c_1)| < \frac{1 + J + K}{|(x_1 - a)|}$$

para todo $c_1 \in [a, x_1]$.

Portanto f é limitada no intervalo $[a, x_1]$

Analogamente, f é limitada em $[x_{k-1}, x_k]$ para todo $2 \leq k \leq n$.

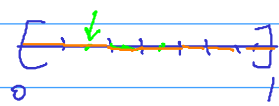
Logo f é limitada em $[a,b]$. ☒

<u>Observação</u> f limitada não implica f integrável como mostra o seguinte exemplo:

Seja $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se não} \end{cases}, \quad x \in [0,1]$

Escolhando c_k racional em (x_{k-1}, x_k) para $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1$$



Escolhando c_k irracional para $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

Portanto $\lim_{P} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \Delta x_k$ depende dos c_k

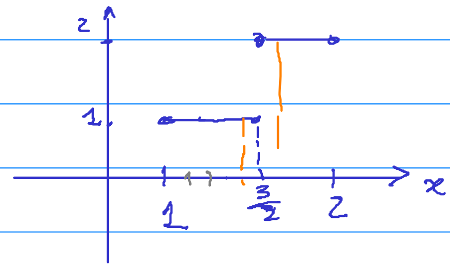
Logo f não é integrável.

Condições suficientes de integrabilidade

Teorema (de integrabilidade de funções contínuas)

Se uma função f é contínua no intervalo $[a,b]$, ou se é limitada e tem no intervalo um número finito de descontinuidades, então a integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ existe e } f \text{ é integrável em } [a,b]$$



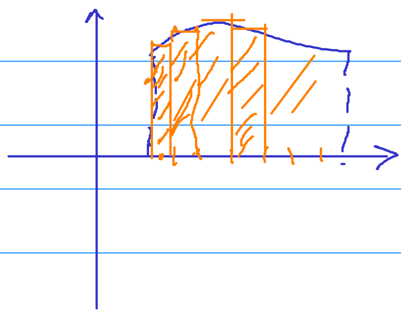
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$$

f é integrável

Observações

1. Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva e integrável em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$



= área da região do plano limitada pelo gráfico de f e pelas retas $x=a$, $x=b$, $y=0$

2. A letra que indica a variável na $\int_a^b f(x)dx$ não tem importância:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du \quad \text{etc}$$

O que importa são f e $[a,b]$

Propriedades das integrais definidas

Sejam f e g duas funções integráveis em $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$. Então

1. $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

2. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. $$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

4. $$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

5. Se $a \leq c \leq b$ $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

6. $$\Big(\min_{[a,b]}(f)\Big) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a,b]}(f) \cdot (b-a)$$

$$\min_{[a,b]}(f) \cdot (b-a) = \int_a^b \min(f)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \max(f)\,dx = \max(f)(b-a)$$

7. Se $g(x) \leq f(x)$ em $[a,b]$

Então $\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$

Então se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

$\sum g(c_k)\cdot\Delta x_k \leq \sum f(c_k)\Delta x_k$

$\Rightarrow \lim(\ ) \leq \lim(\ )$

As propriedades seguem das propriedades das somas de Riemann que são preservadas na passagem aos limites.

Observação $\int_a^b k\,dx = k\cdot(b-a)$

Exemplo Suponha que f é integrável e que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4 \quad \text{e} \quad \int_1^5 f(t)\,dt = 6$$

Calcule $\int_2^5 f(u)\,du$

Solução: Usar a propriedade (5)

$$\underbrace{\int_1^5 f(t)\,dt}_{6} = \underbrace{\int_1^2 f(t)\,dt}_{-4} + \int_2^5 f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_2^5 f(t)\,dt = 6-(-4) = 10. \quad \boxtimes$$

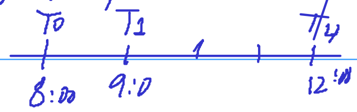
Aula 2

Teorema do valor médio e Teorema Fundamental do Cálculo

Conteúdo da aula:
- Valor médio de uma função contínua
- Teorema do valor médio para integrais definidas
- Teorema fundamental do cálculo

Valor médio de uma função contínua

Suponha que temos os valores $T_0, \dots, T_4$ da temperatura às 8:00, 9:00, 10:00, 11:00, 12:00.

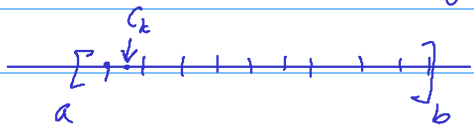


O valor médio da temperatura é

$$\text{Média} = \frac{T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{5}$$

(Temos valores discretos da temperatura)

Suponha que temos uma função contínua em $[a,b]$.



Dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de larguras iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Calculamos o valor de f em $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

A média dos n valores de f é

$$\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$

Temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a},$$

Logo
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x.$$

Ao aumentar o tamanho da amostra $(n \to \infty)$ obtemos a média se aproximando de
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definição

Se f é integrável em $[a,b]$, então seu valor médio em $[a,b]$ é chamado de média e é dado por
$$\text{Média}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

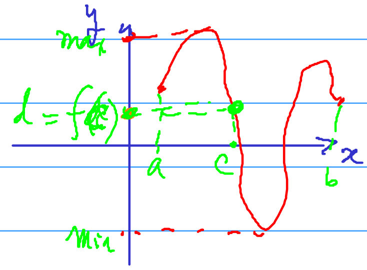
Teorema (do valor médio para integrais definidas, TVM)

Se f é contínua em $[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que
$$\boxed{\text{Média}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).}$$

Demonstração

Pela propriedade 6 da integral definida
$$\min_{[a,b]}(f)\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a,b]}(f)\cdot(b-a)$$
$$\Leftrightarrow \quad \min_{[a,b]}(f) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \max_{[a,b]}(f)$$

Como f é contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário, que para todo valor de $[\min(f), \max(f)]$, existe $c \in [a,b]$ tal que $d = f(c)$.



Portanto para $d = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ existe $c \in [a,b]$ tq $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. ∎

Seja f uma função contínua em um intervalo I. Fixamos $a \in I$.

Para todo $x \in I$, podemos calcular $\int_a^x f(t)\,dt$.

O valor da integral depend de x, então obtemos uma função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Vamos verificar se F é derivável em I.

Para isso precisamos calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Temos

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right)$$

$$\overset{\text{(exercício)}}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \underset{[x,x+h] \text{ ou } [x+h,x]}{\text{Média}(f)}$$

Pelo Teorema do valor médio,

existe $c_h \in [x, x+h]$ ou $[x+h, x]$ tal que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h).$$

Como f é contínua e $c_h \to x$ quando $h \to 0$

temos $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

logo F é derivável e $F'(x) = f(x)$.

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1)

Se f é contínua em intervalo I e $a \in I$,

então $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é derivável

e a sua derivada é

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Definição Uma função F é primitiva de f em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Suponha que F e G são duas primitivas de f.

Então $G'(x) = F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow \quad G'(x) - F'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad G(x) = F(x) + C, \qquad C = \text{Constante}$$

Temos para $a, b \in I$, e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + C)$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \cancel{\int_a^a f(t)\,dt}^{\,0} = \int_a^b f(t)\,dt$$

Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 2)

Seja f uma função contínua em intervalo I e $a, b \in I$. Se F é uma primitiva de f em I então

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Escrevemos $\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b$.

Aula 1 de Consolidação

Questão 1: Prove, usando as somas de Riemann, que $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$**. (Consequentemente,** $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$**.)**

Solução: A função $f(x) = x$ é contínua no intervalo $[a, b]$, portanto é integrável em $[a, b]$. Por definição, isto significa que

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

existe e é único, para qualquer partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ e para qualquer $c = (c_1, \ldots, c_n)$, uma lista de n números escolhidos de modo que $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$. Escrevemos

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

A integral é o limite de um somatório!

Como $f(x) = x$ é integrável em $[a, b]$, o limite do somatório não depende da partição pontilhada $P^* = (P, c)$: escolhamos P obtida subdividindo o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos de largura constante $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, ou seja,

$$P = \{a = x_0 < a + \frac{b-a}{n} < a + \frac{2(b-a)}{n} < \ldots < a + \frac{n(b-a)}{n} = b\}$$

e escolhamos

$$c = (a + \frac{(b-a)}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{n(b-a)}{n}).$$

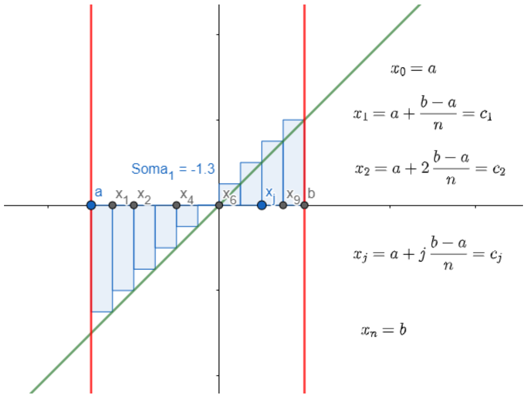


Figura 1: Feita no Geogebra

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})(\frac{b-a}{n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a+\frac{k(b-a)}{n})(\frac{b-a}{n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a(\frac{b-a}{n}) + \sum_{k=1}^{n} (\frac{k(b-a)}{n})(\frac{b-a}{n}) \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}(1+\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \\
&= (b-a)(a+\frac{(b-a)}{2}) \\
&= \frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{1}{2}(b^2-a^2).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

Questão 2: Encontre o domínio das funções:
(a) $g(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\cos^2(t-1)}{\sqrt{t^2+1}}dt$, **(b)** $g(x) = \displaystyle\int_5^x \frac{1}{t}dt$.

Dica: use o seguinte resultado.

Teorema 0.1 *1. Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

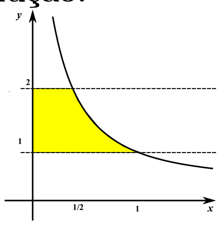
2. Toda função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com um número finito de descontinuidades em $[a,b]$ é integrável.

Solução: (a) A função $(\cos^2(t-1))/\sqrt{t^2+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$, portanto é integrável em qualquer intervalo finito. Então o domínio de g é $\mathbb{R}$.

(b) A função $1/t$ não é definida em $t=0$ e não é limitada em $\mathbb{R}$, mas é continua em qualquer intervalo $[5,x]$ para $x \geq 5$, ou $[x,5]$ para $0 < x \leq 5$. Ela não é limitada em qualquer intervalo $[x,5]$ que contem 0. Logo o domínio de g é $(0,+\infty)$.

Questão 3: Calcule a área da região limitada pelas curvas: $y = 1/x$; $x = 0$; $y = 1$; $y = 2$.

Solução:



Temos:

$$A(R) = \int_1^2 \frac{1}{y}dy = \ln(y)\Big|_1^2 = \ln(2).$$

Questão 4: Calcule a integral $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$.

Solução: Observe que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx &= \int_0^1 x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big)'dx\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx &= \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

Questão 5: Determine o valor médio da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ em $[-2, 2]$.

Solução: Observe que $y = \sqrt{4 - x^2} \implies y^2 = 4 - x^2 \implies x^2 + y^2 = 4$. Portanto, o gráfico de f é o semi-circulo de centro $O = (0, 0)$ e raio 2, com $y \geq 0$. Segue que

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &= \tfrac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx \\ &= \tfrac{1}{4}\tfrac{\pi(2)^2}{2} \\ &= \tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aula 3

Integrais indefinidas e regra da substituição

Conteúdo da aula
- Área entre curvas
- integração em relação a y
- integral indefinida
- regra da substituição

"Entrada"

1. Calcule $\int_a^b g'(t)\,dt$.

2. Encontre uma primitiva de $f(x) = x^a$.

Solução

1. $\boxed{\int_a^b g'(t)\,dt \overset{TFC}{=} g(b) - g(a)}$

TFC $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

onde F é uma primitiva de f: $F'(t) = f(t)$

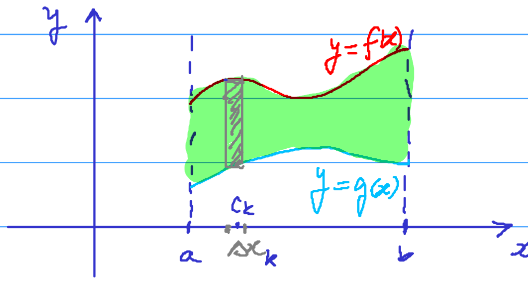
$f(t) = g'(t)$

$F' = f = g' \Rightarrow F = g + c$

2. $F(x) = \frac{1}{a+1} x^{a+1}, \quad a \neq -1$

$a = -1 \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = \ln(x)$

Área entre curvas



Partição P de [a,b]

área dos retangulos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(f(c_k) - g(c_k)\right) \Delta x_k = \text{área da região}$$

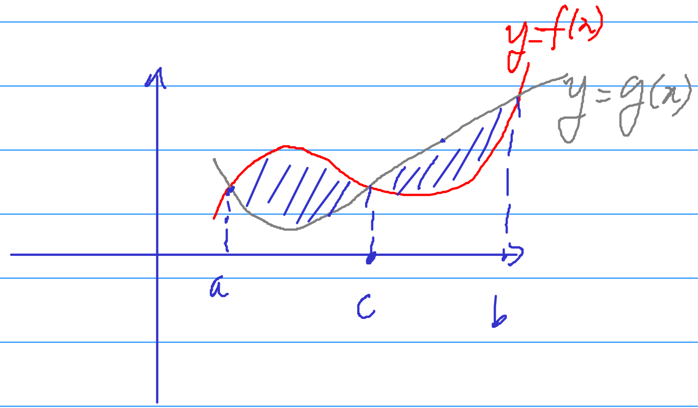
Definição ① Se f e g são contínuas em $[a,b]$ com $f(x) \geq g(x)$ então a área A da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a até b é a integral

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx.$$

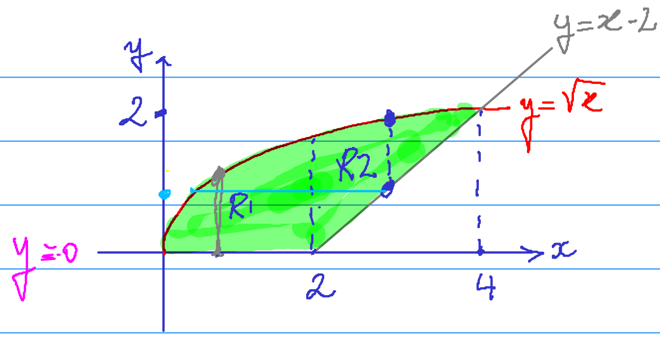
② Se $g(x) \geq f(x)$: $A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx.$

③ Se $f - g$ muda de sinal em $[a,b]$, então

$$A = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx.$$



Exemplo



Determine a área da região indicada na figura.

Solução: Dividimos a região em duas regiões:

R1: $0 \leq x \leq 2$

R2: $2 \leq x \leq 4$

Área da região R1 $= \int_0^2 (\sqrt{x} - 0)\, dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$

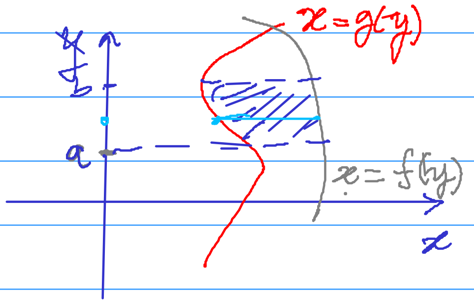
Área da região R2 $= \int_2^4 \left(\sqrt{x} - (x-2)\right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_2^4$

$= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

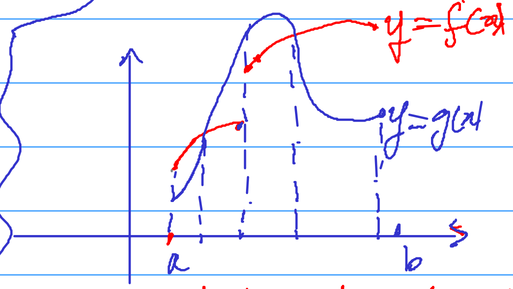
Área da região $(R1 \cup R2) = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{10}{3}$.

Integração em relação a y

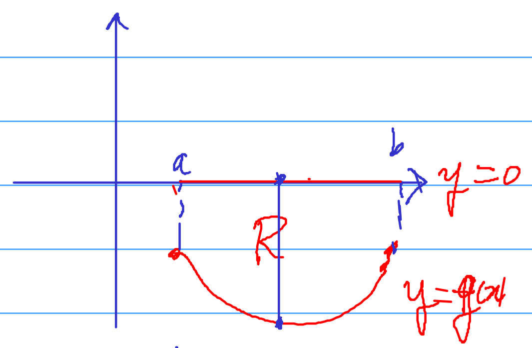
Podemos ter curvas da forma
$x = f(y)$



$$A = \int_a^b \left(f(y) - g(y)\right) dy$$



Quando tem descontinuidade

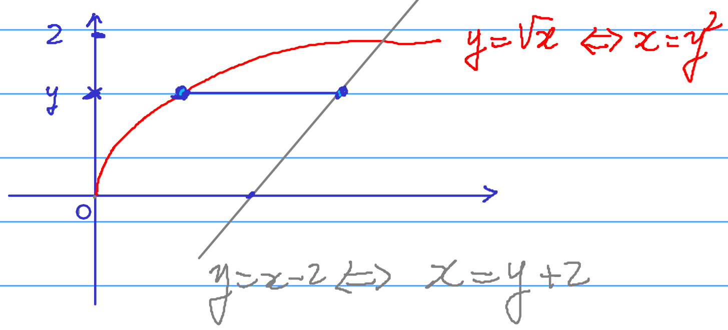


$$A = \int_a^b (0 - g(x))\, dx = -\int_a^b g(x)\, dx$$

Quando $g \leq 0$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior



$$A = \int_0^2 \left[(y+2) - (y^2)\right] dy = \int_0^2 (y+2-y^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^2 = \frac{10}{3}$$

Integrais indefinidas

Se f é uma função contínua em $[a,b]$, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{T.F.C}{=} F(b) - F(a)$$

onde F é uma primitiva qualquer de f, ie,

$$F'(x) = f(x).$$

Definimos a integral indefinida $\int f(x)\,dx$ como o conjunto de todas as primitivas de f.

Se F é uma delas, então

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \text{ constante qualquer.}$$

Observação

A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um escalar

A integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma função mais uma constante arbitrária

Exemplo

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c, \qquad a \neq -1.$$

Regra da substituição

Exemplo

$$\int \underbrace{(x^3+x)}_{u}{}^5 \underbrace{(3x^2+1)\,dx}_{du}$$

Observe que se fizemos $u = x^3+x$, então

$$\frac{du}{dx} = 3x^2+1 \Rightarrow du = (3x^2+1)\,dx$$

logo

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\,dx = \int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{6}(x^3+x)^6 + c$$

<u>Teorema</u> Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I, então

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du .$$

<u>Demonstração</u>

Seja F uma primitiva de f. Pela regra da cadeia

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x))\, g'(x)$$
$$= f(g(x))\, g'(x)$$

Fazendo a substituição $u = g(x)$, temos

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int \left(F(g(x))\right)' dx$$
$$\overset{T.F.C}{=} F(g(x)) + c$$
$$= F(u) + c$$
$$\overset{T.F.C}{=} \int F'(u)\, du$$
$$= \int f(u)\, du \qquad \blacksquare$$

Exemplo $\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^{x^3} x^2 dx$

Fazendo $u = x^3$, temos $du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$

logo $\int e^{x^3} x^2 dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int e^u du$

$$= \frac{1}{3} e^u + C$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Como calcular integral definida usando a substituição?

Exemplo $\int_2^3 x^2 e^{x^3} dx$

Método 1 Fazendo $u = x^3$ quando $x = 2$, $u = 8$
$x = 3$, $u = 27$

Temos $\int_2^3 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_8^{27} e^u du = \frac{1}{3}(e^{27} - e^8).$

Substituindo e trocando os limites da integração.

Método 2 $\int_2^3 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} \Big|_2^3 = \frac{1}{3}(e^{27} - e^8).$

Calcular a integral indefinida, expressar o resultado em função da variável inicial e calcular a integral definida com os mesmos limites.

<u>Teorema</u> (Substituição em integrais definidas)

Se g' é contínua no intervalo $[a,b]$ e f é contínua na imagem de $g(x)=u$, então

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

<u>Dem</u> Seja F uma primitiva de f. Temos

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad \square$$

Aula 4

Regra de Leibniz e integração por partes

Aula de hoje:
- Regra de Leibniz
- Integração por partes
- Integração de funções racionais por frações parciais

Regra de Leibniz

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e $u(x), v(x)$ deriváveis em $[a,b]$.

Seja F uma primitiva de f. Pelo T.F.C

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

Portanto

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right) = \big(F(v(x))\big)' - \big(F(u(x))\big)'$$

$$= F'(v(x))\cdot v'(x) - F'(u(x))\cdot u'(x)$$

$$= f(v(x))\, v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x)$$

obtemos a regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\,v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x)$$

Exemplo

Seja $g(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}\, dt$. Vamos usar a regra de Leibniz para calcular $g'(x)$.

Em nosso caso $f(t) = \frac{1}{1-t^2}$.

Logo

$$g'(x) = f(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)' - f(\cos(x))(\cos x)'$$

$$= \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x} \cos x - \frac{1}{1-\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Integração por partes

Se f e g são deriváveis, então pela regra do produto

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Portanto

$$\int (f(x)\, g(x))'\, dx = \int f'(x) g(x)\, dx + \int f(x) g'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int f(x)\, g'(x)\, dx = \int (f(x)\, g(x))'\, dx - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Se escrevemos $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então

$$du = f'(x)\,dx \quad e \quad dv = g'(x)\,dx$$

obtemos

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Fórmula de integração por partes

Integração de funções racionais por frações parciais

Uma função racional é o quociente de polinômios

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad f, g \text{ são polinômios}$$

exemplo $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^5 - 4x + 2}$

Para integrar estas funções, vamos escrevê-las como soma de funções mais simples chamada frações parciais.

Vamos supor que $\text{grau}(g(x)) > \text{grau}(f(x))$

Caso contrário podemos dividir f por g e trabalhar com o termo restante:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{g(x)}, \quad \text{grau}(g) > \text{grau}(R)$$

$$\boxed{f(x) = P(x)\cdot g(x) + R(x)}$$

30

Podemos escrever $g(x)$ como produto de fatores reais lineares e fatores reais quadráticos irredutíveis

Caso 1

$$g(x) = (a_1x+b_1)\cdot\cdots(a_nx+b_n) \quad \text{(n-termos lineares)}$$

Existem constantes $A_1, \ldots, A_n$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

logo

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{A_i}{a_ix+b_i}\,dx$$

Exemplo

$$\int \frac{x-6}{x^3-2x^2-3x}\,dx$$

Fazendo $f(x) = x-6$, $g(x) = x^3-2x^2-3x$

temos uma função racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ com

$\text{grau}(g) = 3 > \text{grau}(f) = 1$

Observe que $g(x) = x(x^2-2x-3) = x(x+1)(x-3)$

ou seja g é produto de fatores lineares.

logo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-6}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Vamos achar os valores de A_1, A_2, A_3

Temos

$$\frac{x-6}{x^3-2x^2-3x} = \frac{A_1(x+1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x+1)}{x(x+1)(x-3)}$$

logo

$$\boxed{x-6 = A_1(x+1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x+1)} \quad (*)$$

$$0.x^2+1.x+(-6) = x^2(A_1+A_2+A_3)+x(-2A_1-3A_2+A_3)-3A_1$$

Equalando os coeficientes obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=0 \\ -2A_1-3A_2+A_3=1 \\ -3A_1 = -6 \end{cases}$$

Mas podemos também proceguir como seguinte para achar os valores de A_1, A_2, A_3. Fazendo em $(*)$

$$x=0 \Rightarrow -6=-3A_1 \Rightarrow A_1=2.$$

$$x=-1 \Rightarrow -7=4A_2 \Rightarrow A_2=-\frac{7}{4}.$$

$$x=3 \Rightarrow -3=12A_3 \Rightarrow A_3=-\frac{1}{4}.$$

logo

$$\int \frac{x-6}{x^3-2x^2-3x}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int -\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx + \int -\frac{1}{4}\frac{dx}{x-3}$$

$$= 2\ln|x| - \frac{7}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-3| + c.$$

Aula 2 de Consolidação

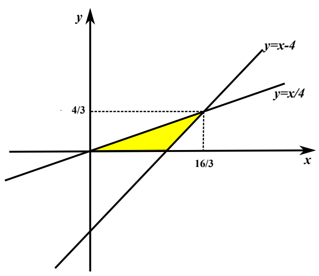
Questão 1: Escreva a área da região limitada pelas funções ($y = f(x)$ ou $x = g(y)$) dadas abaixo de duas formas diferentes: usando integração em x e integração em y.

(a) $y = x - 4;\quad y = \dfrac{x}{4};\quad y = 0$

(b) $y = x + 5;\quad y = 2;\quad y = -1;\quad x = y^2$

(c) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ **;** $y = 0$

Solução (a)



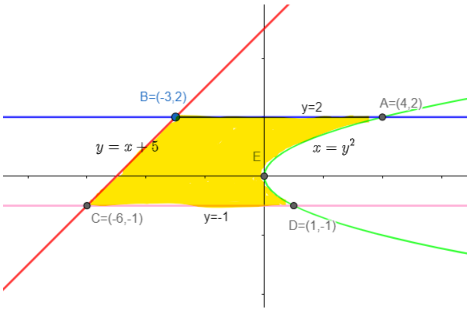
Integrando em relação a x:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^4 \frac{1}{4}x dx + \\ &\quad \int_4^{\frac{16}{3}} (\frac{1}{4}x - x + 4)dx \\ &= \frac{1}{8}x^2\Big|_0^4 + (-\tfrac{3}{8}x^2 + 4x)\Big|_4^{\frac{16}{3}} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Integrando em relação a y:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\frac{4}{3}} (y + 4 - 4y)dy. \\ &= (-\tfrac{3}{2}y^2 + 4y)\Big|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(b)



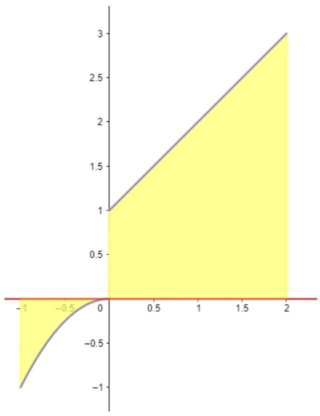
Integrando em relação a x:

$$A(R) = \int_{-6}^{-3}(x+6)dx + \int_{-3}^{0}(3)dx + \int_{0}^{4}(2-\sqrt{x})dx + \int_{0}^{1}(-\sqrt{x}+1)dx$$

Integrando em relação a y:

$$A(R) = \int_{-1}^{2}(y^2 - y + 5)dy$$
$$= \frac{33}{2}.$$

(c)



Integrando em relação a x:

$$A(R) = \int_{-1}^{0}(0-(-x^2)dx + \int_{0}^{2}(x+1)dx$$

Integrando em relação a y:

$$A(R) = \int_{-1}^{0}(-\sqrt{-y}-(-1))dy + \int_{0}^{1}(2-0)dy + \int_{1}^{3}(2-(y-1))dy = \frac{13}{3}$$

(Note que f é Riemann integrável em $[-1,2]$)

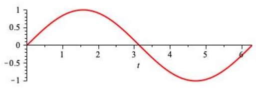
Questão 2: Seja $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, 2\pi]$.

(a) Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

(b) Calcule a área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo-x para $x \in [0, 2\pi]$.

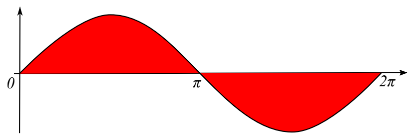
Solução: (a) Seja $F(x) = -cos(x)$. Como $F'(x) = \sin(x) = f(x)$, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$. Portanto

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^{2\pi} \sin(x)dx &= (-cos(x))\big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$



(b) O eixo-x é o gráfico da função $g(x) = 0$. Então, a área entre os gráficos de f e g em $[0, 2\pi]$ é dada por

$$A(R) = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|dx.$$



Segue que,

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\pi} (\sin(x) - 0)dx + \int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin(x))dx \\ &= (-cos(x))\big|_0^{\pi} + (cos(x))\big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -(1 - (-1)) + (1 - (-1)) = 4. \end{aligned}$$

Questão 3: Qual é a diferença entre integral definida, integral indefinida e função integral?

Solução

A integral definida é um escalar (um número).

A uma integral indefinida é uma família de funções.

A função integral é uma função.

Por exemplo, para $n \neq -1$, temos a integral definida

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

e a integral indefinida

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

A função integral é dada por

$$f(t) = \int_0^t x^n dx = \frac{1}{n+1} t^{n+1}.$$

Questão 4: Verdadeiro ou Falso?

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2x\cos(x^2)dx = \int_{-1}^{1} \cos(u)du = \sin(1) - \sin(-1) = 2\sin(1)$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2x\cos(x^2)dx = \int_{1}^{1} \cos(u)du = 0$

Solução: (a) Falso: pois fazendo $u = x^2$ (e portanto $du = 2xdx$), quando $x = -1$ ou $x = 1$ temos $u = 1$.

(b) Verdadeiro: a primeira igualdade está justificada no item anterior e a segunda igualdade é valida por definição.

Questão 5: Calcule as seguintes integrais usando integração por partes:

(a) $\displaystyle\int x\cos(x)dx$

(b) $\displaystyle\int \ln(t)dt$

(c) $\displaystyle\int e^x\cos(x)dx$

Solução: A fórmula da integração é a seguinte

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(a) Fazendo

$$\begin{array}{rcl} u & = & x \\ dv & = & \cos(x)dx \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} du & = & dx \\ v & = & \sin(x) \end{array}$$

Obtemos

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

(b) Fazendo

$$\begin{array}{rcl} u & = & \ln(t) \\ dv & = & dt \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} du & = & \frac{1}{t}dt \\ v & = & t \end{array}$$

Obtemos

$$\int \ln(t)dt = t\ln(t) - \int \frac{1}{t}tdt = t\ln(t) - t + C.$$

(c) Fazendo $u = e^x, dv = \cos(x)dx$, temos $du = e^x dx, v = \sin(x)$

Portanto

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)dx$$

Aplicamos de novo a formula da integral por partes para calcular $\int e^x \sin(x)dx$ fazendo $u = e^x, dv = \sin(x)dx$. Obtemos $du = e^x dx, v = -cos(x)$.

Logo

$$\int e^x \sin(x)dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)dx$$

Daí $\int e^x \cos(x)dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)dx$

Portanto

$$\int e^x \cos(x)dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

Aula 5

Integração de funções racionais por frações parciais

Conteúdo da aula

- Caso 1: $g(x)$ é um produto de fatores lineares distintos [ver Aula 4]
- Caso 2: $g(x)$ é um produto de fatores lineares e alguns se repetem.
- Caso 3: $g(x)$ contem fatores quadráticos irredutíveis distintos
- Caso 4: $g(x)$ contem fatores quadráticos irredutíveis e alguns se repetem.
- Integrais trigonométricas.

Entrada 1. O que é uma função racional?

2. Simplifique $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}$

$$\begin{array}{l|l} f(x) = 2x^3 - 4x^2 - x - 3 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline -2x\,g(x) = -(2x^3 - 4x^2 - 6x) & 2x \\ \hline \qquad\qquad 5x - 3 & \end{array}$$

$\dfrac{2x^3}{x^2} = 2x$

Obtemos que $f(x) = 2x\,g(x) + 5x - 3$

Logo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3}.$$

Função racional $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Vamos supor $\text{grau}(g) > \text{grau}(f)$

Caso 1 $g(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_n)$ $r_i \neq r_j$, $i \neq j$

Caso 2: $g(x)$ é um produto de fatores lineares e alguns se repetem.

Seja $(x-r)^m$ a maior potência de $x-r$ que divide $g(x)$. Atribuímos a esse fator a soma de m frações parciais

$$\frac{B_1}{x-r} + \frac{B_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x-r)^m}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$

Existem escalares A_1, B_1, B_2 tq

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{A_1(x-2)^2 + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

Igualando os numeradores, obtemos

$$A_1(x-2)^2 + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1) = 1$$

$$x^2(A_1+B_1) + x(-4A_1 - 3B_1 + B_2) + 4A_1 + 2B_1 - B_2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x^2 \\ x \\ 1 \end{array} \begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ -4A_1 - 3B_1 + B_2 = 0 \\ 4A_1 + 2B_1 - B_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ B_1 = -1 \\ B_2 = 1 \end{cases}$$

Logo $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} \right) dx$

$$= \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C \quad \boxtimes$$

Caso 3 $g(x)$ contem fatores quadráticos irredutíveis distintos.
Atribuimos ao fator ax^2+bx+c a fração parcial

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Exemplo

Calcule $$\int \frac{2x^2-5x-3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

Existem escalares A_1, A_2, A_3 tq

$$\frac{2x^2-5x-3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}$$

$$= \frac{A_1(x^2+1)+(A_2x+A_3)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Igualando numeradores

$$A_1(x^2+1)+(A_2x+A_3)(x+1) = 2x^2-5x-3$$
$$x^2(A_1+A_2)+x(A_2+A_3)+A_1+A_3 = 2x^2-5x-3$$

Logo
$$\begin{cases} A_1+A_2 = 2 \\ A_2+A_3 = -5 \\ A_1+A_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = -5 \end{cases}$$

Portanto $$\int \frac{2x^2-5x-3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int\left(\frac{2}{x+1} - \frac{5}{x^2+1}\right)dx$$

$$= 2\ln|x+1| - 5\,\mathrm{arctg}(x) + c.$$

Lembrando
$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)$$

Caso 4: $g(x)$ contem fatores quadráticos irredutíveis que se repetem
Atribuímos ao fator $(ax^2+bx+c)^m$, com ax^2+bx+c irredutível, a soma de m frações parciais

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{(B_1x+C_1)}{(x^2+1)}\cdot\frac{x(x^2+1)}{x(x^2+1)}$$

Temos

Pode dar valores a x!

$$A_1(x^2+1)^2+(B_1x+C_1)\,x\,(x^2+1)+(B_2x+C_2)x=1$$

$$\Leftrightarrow\quad x^4(A_1+B_1)+C_1x^3+x^2(2A_1+B_1+B_2)+x(C_1+C_2)+A_1=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_1+B_1=0\\ C_1=0\\ 2A_1+B_1+B_2=0\\ C_1+C_2=0\\ A_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=1\\ B_1=-1\\ C_1=0\\ B_2=-1\\ C_2=0\end{cases}$$

Portanto

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{-x}{x^2+1}dx+\int\frac{-x}{(x^2+1)^2}dx$$

Fazendo $u=x^2+1$, $du=2x\,dx$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C.$$

Integrais trigonométricas

são integrais que envolvem combinações algébricas de funções trigonométricas básicas.

Lembrando

$$(tg x)' = \left(\frac{sen x}{cos x}\right)' = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

$$(sec x)' = \left(\frac{1}{cos x}\right)' = \frac{sen x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos x} \cdot \frac{sen x}{cos x} = sec x \, tg x$$

Temos

- $$\int sen x \, dx = -cos x + c$$

- $$\int cos x \, dx = sen x + c$$

- $$\int tg x \, dx \underset{\substack{u = cos x \\ du = -sen x dx}}{=} \int \frac{sen x}{cos x} dx = \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|cos x| + c = \ln\left|\frac{1}{cos x}\right| + c$$

$$\int tg x \, dx = \ln|sec x| + c.$$

- $$\int sec x \, dx = \int sec x \cdot \frac{sec x + tg x}{sec x + tg x} dx = \int \frac{sec x \, tg x + sec^2 x}{sec x + tg x} dx$$

Fazendo $u = sec x + tg x$

$du = (sec x \, tg x + sec^2 x) dx$

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

- $$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$$

- $$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$ pois $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ $= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

- $$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$ ☒

Aula 6

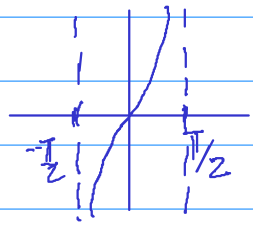
Substituições trigonométricas

Conteúdo da aula:

- Integrais que envolvem $\sqrt{a^2+x^2}$
- Integrais que envolvem $\sqrt{a^2-x^2}$
- Integrais que envolvem $\sqrt{x^2-a^2}$

Substituições trigonométricas ocorrem quando trocamos a variável de integração por uma função trigonométrica. São eficazes para calcular integrais que envolvem $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$

• Integrais que envolvem $\sqrt{a^2+x^2}$



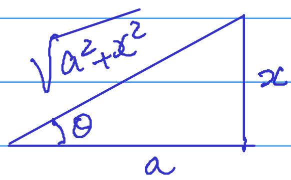
Fazemos $x = a\,tg\,\theta$. Como isso temos

$$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$a^2+x^2 = a^2 + a^2 tg^2\theta = a^2 + a^2\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a^2}{\cos^2\theta}$$

Precisamos que a substituição seja reversível (para poder voltar a variável inicial), ou seja $tg\,\theta$ tem que ter uma inversa. Por isso tomamos $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Consideramos o seguinte triângulo (chamado de triângulo de referência)



$$tg\,\theta = \frac{x}{a}$$

Exemplo Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Temos $a=2$.

Fazendo $x = 2\,tg\theta$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

obtemos $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ e

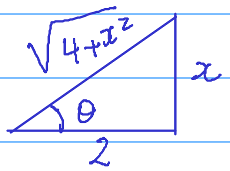
$$4+x^2 = 4\sec^2\theta.$$

Logo $$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{2|\sec\theta|} = \int \frac{\cancel{2}\sec^{\cancel{2}}\theta\,d\theta}{\cancel{2}\cancel{\sec}\theta}$$

pois $\sec\theta > 0$

$$= \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln|\sec\theta + tg\theta| + C$$



usando o triângulo de referência

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C. \quad \square$$

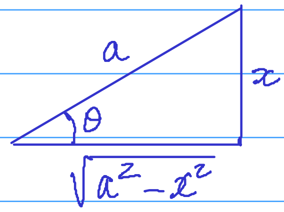
- Integrais que envolvem $\sqrt{a^2-x^2}$

Fazemos $x = a\,sen\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Temos $dx = a\cos\theta\,d\theta$ e

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 sen^2\theta = a^2(1-sen^2\theta) = a^2\cos^2\theta$$

Triângulo de referência



$x = a \operatorname{sen}\theta$

Exemplo Calcule $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Temos $a=1$.

Fazendo $x = \operatorname{sen}\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos

$$dx = \cos\theta\, d\theta$$
$$1-x^2 = \cos^2\theta$$

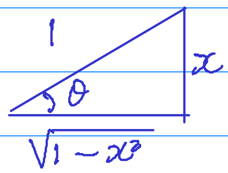
Portanto

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{\cos^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta = \int |\cos\theta| \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \cos^2\theta\, d\theta$$

Pois $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $\cos\theta > 0$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta + c$$



$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

- Integrais que envolvem $\sqrt{x^2 - a^2}$

Fazemos $x = a \sec\theta$, Então $dx = a \sec\theta \, tg\theta \, d\theta$,

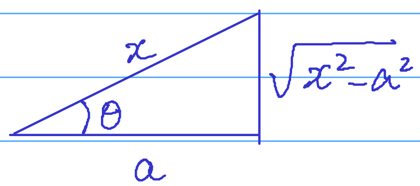
$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2\theta - a^2 = a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = a^2\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = a^2 \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= a^2 tg^2\theta$$

Queremos que a substituição seja reversível

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{2} & \text{se } \frac{x}{a} > 1 \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi & \text{se } \frac{x}{a} < -1 \end{cases}$$



$x = a \sec\theta$

Exemplo Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}$, $x > \frac{2}{5}$

Temos $\sqrt{25x^2 - 4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2 - \frac{4}{25}}$

Fazendo $x = \frac{2}{5}\sec\theta$ $\left(a = \frac{2}{5}\right)$, temos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
pois $x > \frac{2}{5}$

$$dx = \frac{2}{5}\sec\theta \, tg\theta \, d\theta$$

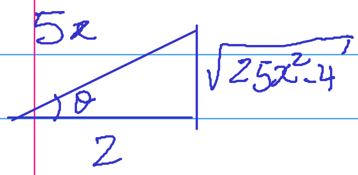
$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} tg\theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{\cancel{\frac{2}{5}}\sec\theta\,\cancel{tg\theta}}{\cancel{\frac{2}{5}}\,\cancel{tg\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\ d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| + C$$



$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5}{2}x + \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C \qquad \blacksquare$$

Aula 3 de Consolidação

Questão 1(a). *O que é uma função racional?*
Solução: É um função da forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinômios em $x \in \mathbb{R}$.

Vamos supor que $grau(P) = n$ e $grau(Q) = m$.

Questão 1(b). *Qual é o domínio da função racional f?*
Solução: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$,

Questão 1(c). *Quantas raízes Q pode ter?*
Solução: no máximo m reais.

Questão 1(d). *Fatore os seguintes polinômios:*

(i) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ R: $Q(x) = x(x+1)(x-3)$

(ii) $Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + 1$ R: $Q(x) = (3x+1)(x-1)^2$

(iii) $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ R: $Q(x) = (x+1)(x^2+1)$

(iv) $Q(x) = x^4 + 1$ R: $Q(x) = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$

Teorema 0.1 *Todo polinômio real pode ser escrito da forma*

$$P(x) = a(x-\alpha_1)^{p_1} \dots (x-\alpha_s)^{p_s}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1} \dots (x^2+\beta_r x+\gamma_r)^{q_r}$$

onde $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ são irredutíveis, ou seja $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Método de Frações Parciais: integrar funções racionais

- **Passo 1 (a)** Se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ com $grau(P) < grau(Q)$, vá para Passo 2.
  (b) Se $grau(P) \geq grau(Q)$, então:
  - dividir P por Q: $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$, grau$(R) <$ grau(Q).
  - reescrever f na forma:
  $$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad (grau(R) < grau(Q)).$$
  Vá para Passo 2.
- **Passo 2** Fatore o denominador $Q(x)$ como produto de fatores lineares e fatores quadráticos irredutíveis.
- **Passo 3** Expresse a função $\frac{P(x)}{Q(x)}$ do Passo 1(a) ou $\frac{R(x)}{Q(x)}$ do Passo 1(b) como uma soma de frações parciais da forma $\frac{A}{(\alpha x+\beta)^p}$ ou $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^q}$, conforme cada caso descrito em aula, e integre.

Questão 2. *Calcule* $\int \frac{x^3+1}{x-1}dx$.

Solução: Temos grau $(P(x) = x^3+1) >$ grau$(Q(x) = x-1)$ (**Passo 1(b)**).
Dividindo P por Q, obtemos (**Passo 1(b)**)

$$P(x) = (x^2+x+1)(x-1)+2.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{x-1}dx &= \int (x^2+x+1)dx + \int \frac{2}{x-1}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln|x-1| + c.\end{aligned}$$

Questão 3. *Calcule* $\int \frac{x-6}{x^3-2x^2-3x}dx$.

Solução: Ver as notas da Aula 4 (caso 1). (Aqui temos grau(P) <grau(Q) (**Passo 1(a)**).)

Questão 4. *Calcule* $\int \frac{2x+1}{3x^3-5x^2+x+1}dx$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{3x^3-5x^2+x+1} &= \frac{2x+1}{(3x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3}{16(3x+1)} - \frac{1}{16(x-1)} + \frac{3}{4(x-1)^2}\end{aligned}$$

(Seguindo as contas usuais obtemos $A = \frac{3}{16}, B = -\frac{1}{16}, C = \frac{3}{4}$.) Portanto,

$$\int \frac{2x+1}{3x^3-5x^2+x+1}dx = \frac{1}{16}\ln|3x+1| - \frac{1}{16}\ln|x-1| - \frac{3}{4(x-1)} + C.$$

Questão 5. *Calcule* $\int \frac{5x-1}{x^3+x^2+x+1}dx$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned}\frac{5x-1}{x^3+x^2+x+1} &= \frac{5x-1}{(x+1)(x^2+1)}\\ &= \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\\ &= -\frac{3}{x+1}+\frac{3x+2}{x^2+1}\\ &= -\frac{3}{x+1}+\frac{3x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}.\end{aligned}$$

(Obtemos $A=-3, B=3, C=2$.) Logo,

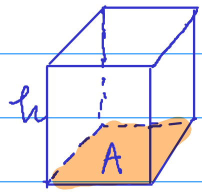
$$\int \frac{5x-1}{x^3+x^2+x+1}dx = -3\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + 2\arctan(x) + C.$$

Aula 7

Volumes por seções transversais

Conteúdo da aula
- Método do fatiamento por planos paralelos
- sólidos de revolução: método do disco

Cubo



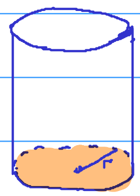
V = volume

A = área da base

h = altura

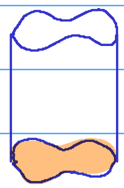
$V = A \times h$

Cilindro circular



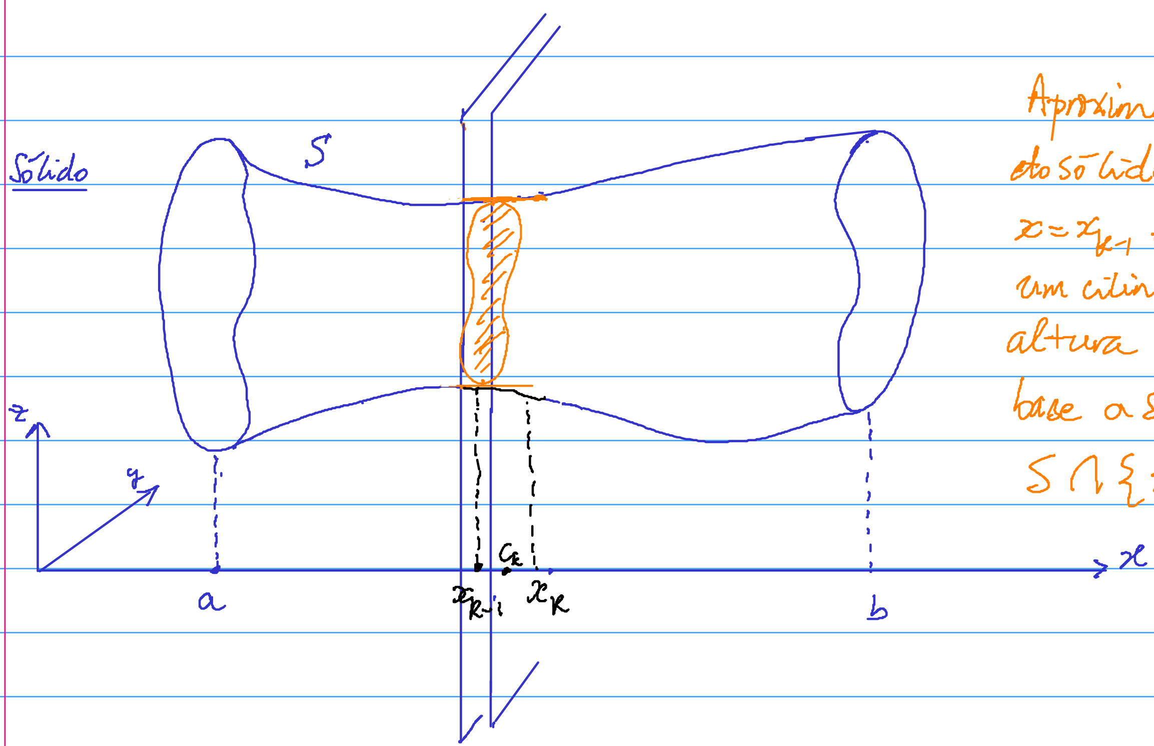
$V = A \times h = \pi r^2 h$

Cilindro



$V = A \times h$

Sólido



Aproximamos o pedaço do sólido entre os plano $x = x_{k-1}$ e $x = x_k$ por um cilindro de altura Δx_k e base a seção transversal $S \cap \{x = c_k\}$

Método do fatiamento por planos paralelos

Cortamos o sólido por planos paralelos (por exemplo, planos x = constante, i.e. planos ortogonais ao eixo x).

Escolhamos uma partição $P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ do intervalo $[a,b]$ do eixo x com larguras $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$.
Podemos aproximar o volume do sólido por

$$V \simeq \sum_{k=1}^{n} A(c_k) \cdot \Delta x_k$$

onde $A(c_k)$ é a área da seção transversal de S pelo plano $x = c_k$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

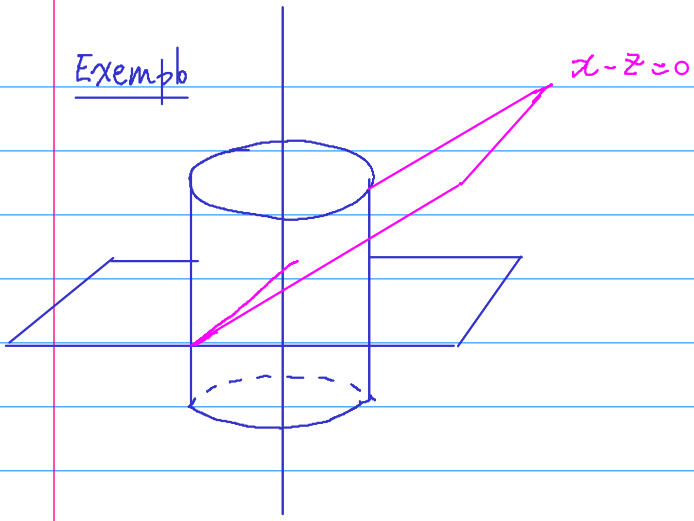
Quando $\|P\| \to 0$ teremos $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(c_k) \Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$.

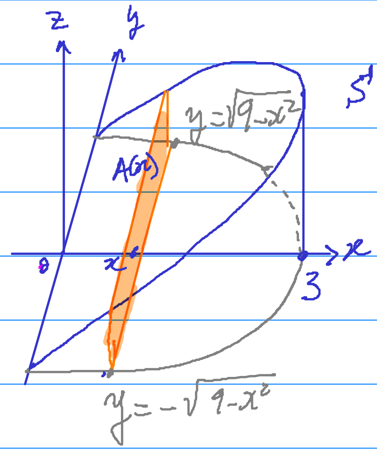
Definição

O volume de um sólido de área de seção transversal integrável $A(x)$ de $x = a$ até $x = b$ é a integral

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Exemplo





Uma cunha curva foi obtida por meio do corte de um cilindro circular de raio 3 por dois planos: um deles é perpendicular ao eixo do cilindro e o outro faz um ângulo de 45° com o primeiro no centro do cilindro. Vamos calcular o volume da cunha.

Escolhamos um bom sistema de coordenadas.
Seja $A(x)$ a área da secção transversal perpendicular ao eixo x.

O bordo da base é a semi-circunferência $x^2+y^2=9$, $x\geq 0$
A largura da secção transversal é $2\sqrt{9-x^2}$
A equação do segundo plano é $x-z=0$. Portanto a altura da seção transversal é igual a x.
Logo $A(x)=2x\sqrt{9-x^2}$ e

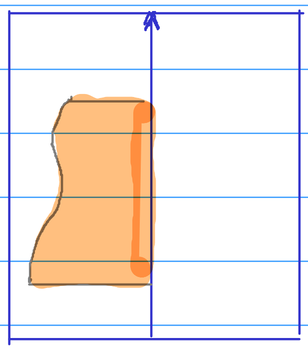
$$V=\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

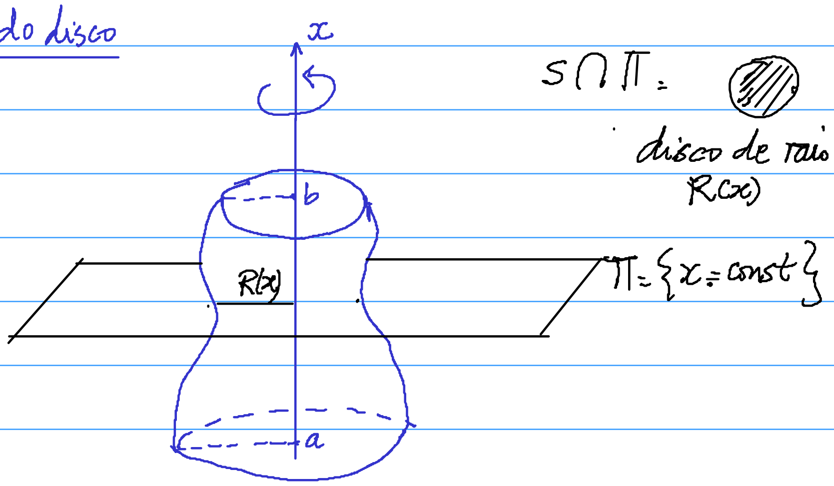
Fazendo $u=9-x^2$, $du=-2x\,dx$,

$$\int 2x\sqrt{9-x^2}\,dx=\int -\sqrt{u}\,du=-\frac{2}{3}u^{3/2}+c$$

Portanto $V=-\frac{2}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=18.$ ☒

Sólido de revolução: o método do disco





Giramos uma região plana em torno de um eixo do plano. O sólido resultante chama-se sólido de revolução.

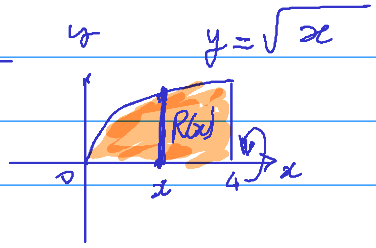
A seção transversal por um plano ortogonal ao eixo (que assumimos ser o eixo-x) é um disco de raio $R(x)$. Portanto

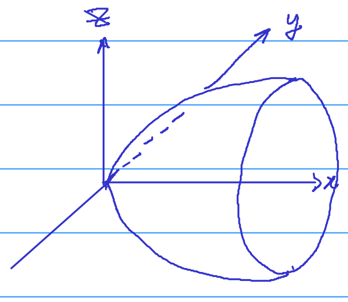
$$A(x) = \pi (R(x))^2$$

Então volume do sólido pelos discos de rotação em torno do eixo-x é dado por

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^2 \, dx .$$

Exemplo





Calcule o volume do sólido obtido com a rotação da região na figura em torno do eixo-x.

O volume do sólido pelo disco de rotação é:

$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi .$$

Aula 4 de Consolidação

Questão 1. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$

Solução: Observe que

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \qquad\qquad (\text{Fazendo } u = x^2+2x-3) \\ &= \frac{1}{2}\ln(|x^2+2x-3|)+C.\end{aligned}$$

Ou pode-se resolver usando o método de frações parciais: exercício!

Questão 2. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx$

Solução: Se trata da integral de uma função racional com $P(x) = x-3$ e $Q(x) = x^2+2x+4$. Temos $grau(P) < grau(Q)$. Para Q, $\Delta = 4-4.4 < 0$, portanto Q é irredutível. Completando quadrados, $Q(x) = (x+1)^2+3$.

Fazendo $u = x+1$, ou seja $x = u-1$, temos $dx = du$, e

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx &= \int \frac{x-3}{(x+1)^2+3}dx = \int \frac{u-4}{u^2+3}du \\ &= \int \frac{u}{u^2+3}du - \int \frac{4}{u^2+3}du\end{aligned}$$

Para a primeira parcela, $(u = x+1)$

$$\begin{aligned}\int \frac{u}{u^2+3}du &= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+3}du = \frac{1}{2}\ln(u^2+3)+C_1 \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+C_1.\end{aligned}$$

Para a segunda parcela,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2+3}du &= \int \frac{1}{3\left(\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}du = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}}{v^2+1}dv \,(\text{Fazendo } v = \frac{u}{\sqrt{3}}) \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan(v)+C_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C_2.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int \frac{x-3}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Questão 3: *Calcule* $\int \tan^3(x)\sec^4(x)dx$.

Solução:

Lembrando: $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, $\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, $\tan'(x) = \sec^2(x)$, $\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$.

Fazendo $u = \tan(x)$ temos $du = \sec^2(x)dx$ e

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)\sec^4(x)dx &= \int \tan^3(x)\sec^2(x)\sec^2(x)dx \\
&= \int \tan^3(x)(1+\tan^2(x))\sec^2(x)dx \\
&= \int u^3(1+u^2)du \\
&= \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{6}u^6 + C \\
&= \tfrac{1}{4}\tan^4(x) + \tfrac{1}{6}\tan^6(x) + C.
\end{aligned}$$

Questão 4. *Calcule* $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Solução: Fazendo $x = \tan(\theta)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, temos $dx = \sec^2(\theta)d\theta$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}}\sec^2(\theta)d\theta \\
&= \int \frac{\tan(\theta)\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)}d\theta \\
&= \int \tan(\theta)\sec(\theta)d\theta = \sec(\theta) + C \\
&= \sqrt{1+\tan^2(\theta)} + C \\
&= \sqrt{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

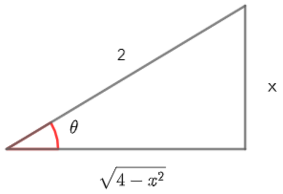
Questão 5. *Calcule* $\mathcal{I} = \int \dfrac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx$.

Solução: Fazendo $x = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$, $\theta \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$, temos $dx = 2\cos(\theta)d\theta$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\theta)\sqrt{4-4\,\mathrm{sen}^2(\theta)}} 2\cos(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{sen}(\theta)}{1-\cos^2(\theta)}d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du \\
&= -\tfrac{1}{4}(-\ln|1-u| + \ln|1+u|) + C \\
&= -\tfrac{1}{4}(-\ln|1-\cos(\theta)| + \ln|1+\cos(\theta)|) + C,
\end{aligned}
$$

onde $u = \cos(\theta)$ e $du = -\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta$. Usando o triângulo de referência



$$
\begin{aligned}
&x = 2\mathrm{sen}(\theta) \Rightarrow \mathrm{sen}(\theta) = \tfrac{x}{2} \\
&\cos(\theta) = \tfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx \\
&= -\tfrac{1}{4}(-\ln|1-\sqrt{4-x^2}/2| + \ln|1+\sqrt{4-x^2}/2|) + C \\
&= -\tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}}\right| + C.
\end{aligned}
$$

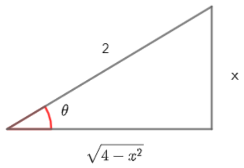
Outra maneira de resolver:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}du \,(\text{Fazendo } u = \frac{x}{2}) \\
&= -\frac{1}{4}sech^{-1}(u) + C \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right) + C \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + C
\end{aligned}
$$

Compare as duas respostas! (tente usar o Integral Calculator)

Observe que:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{4}(-\ln|1-\cos(\theta)|+\ln|1+\cos(\theta)|) &= -\tfrac{1}{4}\ln\frac{|1+\cos(\theta)|}{|1-\cos(\theta)|}\\
&= -\tfrac{1}{4}\ln\frac{(1+\cos(\theta))^2}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\\
&= -\tfrac{1}{2}\ln\frac{|1+\cos(\theta)|}{|\operatorname{sen}(\theta)|}\\
&= -\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right|
\end{aligned}$$



$$\operatorname{sen}\theta=\tfrac{x}{2};\quad \cos\theta=\tfrac{\sqrt{4-x^2}}{2};$$

$$\tfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}=\tfrac{2}{x};\ \tfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\tfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$-\tfrac{1}{4}(-\ln|1-\cos(\theta)|+\ln|1+\cos(\theta)|)=-\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|.$$

Alguma diferença fundamental? Para quais valores de x valem as primitivas encontradas?

Usando função trigonométrica:

$$\int\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C,$$

para $x\in(-2,0)\cup(0,2)$.

Usando função hiperbólica:

$$\int\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)+C,$$

para $x\in(0,2)$.

Vale a pena usar a função hiperbólica?

Mas note: se $x\in(-2,0)$, então $u=-x\in(0,2)$ e portanto

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx &= \int\frac{1}{-x\sqrt{4-x^2}}(-1)dx\\
&= \int\frac{1}{u\sqrt{4-u^2}}du\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{u}+\frac{\sqrt{4-u^2}}{u}\right)+C\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{-x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{-x}\right)+C
\end{aligned}$$

Portanto, também usando a função hiperbólica podemos concluir

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + C,$$

para $x \in (-2,0) \cup (0,2)$.

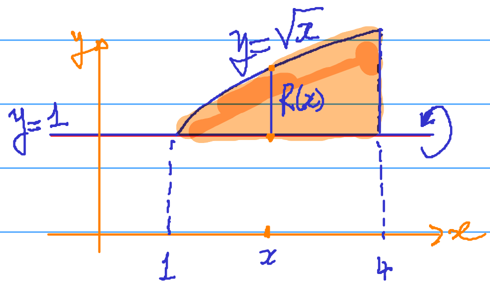
Aula 8

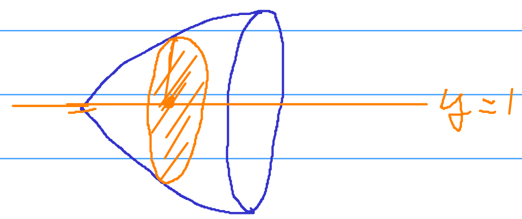
Volume, integrais impróprias

Conteúdo da aula

- Volume de um sólido de revolução pelo método do anel
- Volumes por cascas cilíndricas
- Integrais impróprias

"Entrada" Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região na figura em torno da reta $y=1$.





Sólido de revolução

A seção transversal (por um plano ortogonal ao eixo $y=1$) é um disco de raio $R(x) = \sqrt{x} - 1$.

Logo o volume do sólido

$$V = \int_1^4 \pi (R(x))^2 \, dx = \int_1^4 \pi (\sqrt{x} - 1)^2 \, dx$$

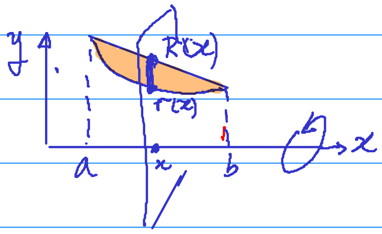
$$= \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) \, dx$$

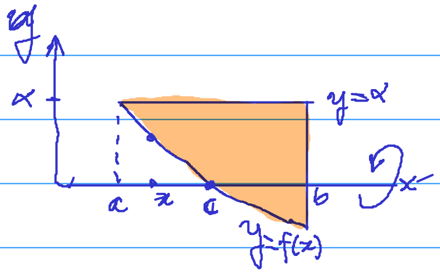
$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

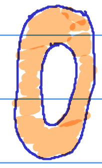
$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \right) \Big|_1^4$$

$$= \frac{7\pi}{6} \quad \boxtimes$$

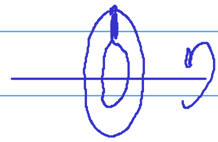
Volume de um sólido de revolução pelo método do anel







Seção transversal



Se a região que giramos para gerar o sólido não atingir ou atravessar o eixo de revolução, o sólido terá um buraco no meio.
As seções transversais por planos paralelos e ortogonais ao eixo de rotação são anéis e não discos.

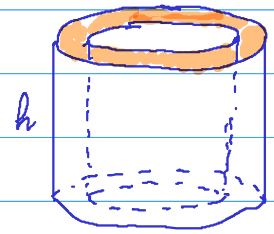
Seja $R(x)$ o raio externo do anel e $r(x)$ o raio interno
Então a área do anel é

$$A(x) = \pi(R(x))^2 - \pi(r(x))^2$$

e o volume do sólido é

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi\left(R^2(x) - r^2(x)\right)dx}$$

Volumes por cascas cilíndricas



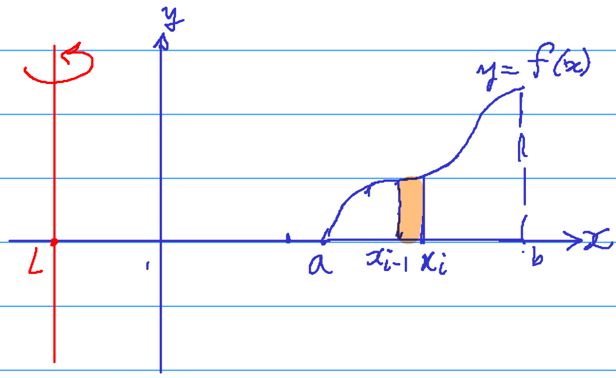
Sejam r_1 o raio do cilindro interno e r_2 o raio do cilindro externo (os dois com altura h).

Denotamos $\bar{r} = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ (raio médio)

e V volume da casca cilíndrica.

Temos
$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$
$$= \pi (r_2^2 - r_1^2) h = \pi (r_1 + r_2)(r_2 - r_1) h$$
$$= 2\pi \bar{r} h \Delta r$$
onde $\Delta r = r_2 - r_2$

$$\boxed{V = 2\pi \bar{r} h \Delta r}$$



Suponha que temos uma região do plano (como indicada na figura) girada em torno da reta $x = L$.
Queremos calcular o volume do sólido gerado.

Escolhamos uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ do intervalo.

Denotamos por $\bar{x}_i$ o pt médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ $\left(\bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ e $h = f(\bar{x}_i)$ a altura da casca cilíndrica de raio interno $x_{i-1} - L$ e raio externo $x_i - L$.

O volume da casca cilíndrica i:

$$V_i = 2\pi \bar{r}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i \qquad \bar{r}_i = \bar{x}_i - L$$

Logo o volume V do sólido

$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$

$n \to \infty$ $x_{i-1} \to x$

$x_i \to x$

$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{r}_i f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Mandando $\|P\| \to 0$ obtemos uma fórmula do volume

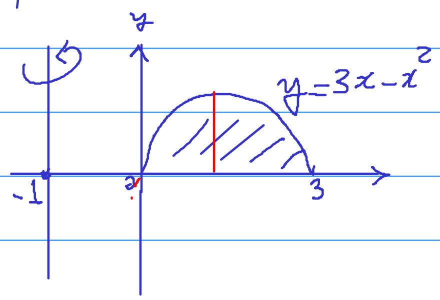
Definição

O volume do sólido obtido com a rotação da região entre o eixo-x e o gráfico de uma função contínua $y = f(x) \geq 0$, $L \leq a \leq x \leq b$ em torno da reta vertical $x = L$ é

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b (\text{raio da casca}) \times (\text{altura da casca})\, dx}$$

$$= 2\pi \int_a^b (x - L) f(x)\, dx$$

Exemplo



A região limitada pela curva $y = 3x - x^2$ e pelo eixo-x é girada em torno da reta $x = -1$. Determine o volume do sólido gerado.

Temos $L = -1$, $[a,b] = [0,3]$, $f(x) = 3x - x^2$. Usando o método da casca cilíndrica obtemos:

$$V = 2\pi \int_0^3 (x - L) \cdot f(x)\, dx = 2\pi \int_0^3 (x+1)(3x - x^2)\, dx = \frac{45}{2}\pi.$$

Integrais impróprias

Estudamos integrais definidas $\int_a^b f(x)\,dx$

onde f é integrável (contínua ou limitada com um número finito de descontinuidades) em um intervalo limitado $[a,b]$

Podemos ter casos onde o intervalo da integração não é limitado ou f não é limitada.

Definição

Integrais com limites infinitos de integração são chamadas integrais impróprias do tipo 1.

1. Se f é contínua em $[a,+\infty)$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Se f é contínua em $(-\infty,b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

3. Se f é contínua em $(-\infty,+\infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Se o limite em 1-3 for finito, dizemos que a integral imprópria converge e o limite é o valor da integral imprópria. Caso contrário, dizemos que a integral diverge.

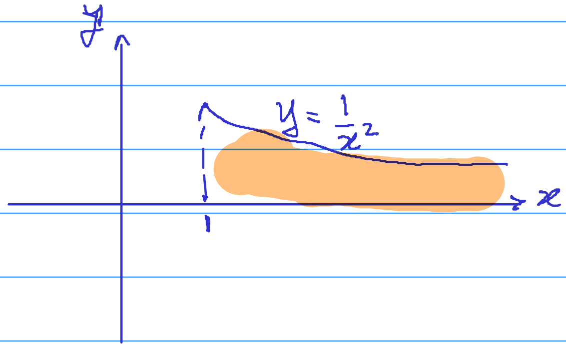
Exemplos

1. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$$

Portanto a integral imprópria converge.

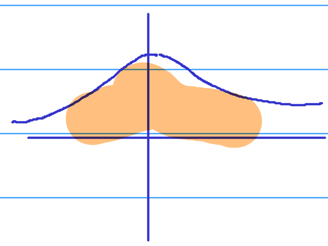
Observação



O valor $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é o limite da área sobre a curva $y = \frac{1}{x^2}$ em $[a,b]$ quando $b \to +\infty$.

Dizemos que a integral imprópria é a área sobre a curva no intervalo $[1,+\infty)$.

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$



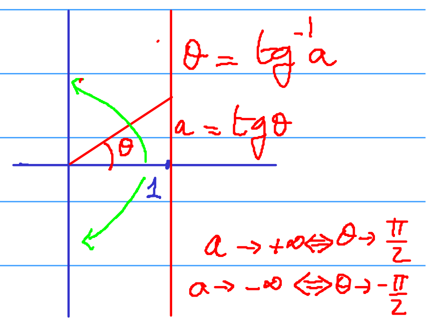
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(tg^{-1}x \Big|_a^0 \right) + \lim_{b\to 0} \left(tg^{-1}x \Big|_0^b \right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(tg^{-1}0 - tg^{-1}a \right) + \lim_{b\to+\infty} \left(tg^{-1}b - tg^{-1}0 \right)$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$



$$= \pi.$$

logo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ Converge e

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi}$$

Aula 9

Integrais impróprias

Conteúdo da aula

- Integrais impróprias do tipo 2
- Teste da comparação
- Teste da comparação no limite

Exemplo 3 (Integrais impróprias do tipo 1)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad , \quad p \in \mathbb{R}$$

Se $p = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_1^b = +\infty$$

Se $p \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^b \right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{se } p>1 \\ +\infty & \text{se } p<1 \end{cases}$$

Conclusão

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{array}{ll} \text{converge} & \text{se } p>1 \\ \text{diverge} & \text{se } p\leq 1 \end{array}}$$

Observação:

O mesmo resultado vale para $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ para $a>0$.

Definição Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto do intervalo de integração são integrais impróprias do tipo 2

1. Se f é contínua em $(a,b]$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$

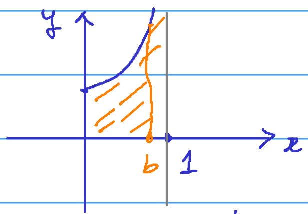
2. Se f é contínua em $[a,b)$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$

3. Se f é contínua em $[a,c)\cup(c,b]$ então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$



$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é contínua em $[0,1)$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\substack{b\to 1\\ b<1}} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\substack{b\to 1\\ b<1}} \left(-\ln|1-x|\Big|_0^b\right) = \lim_{\substack{b\to 1\\ b>0}} -\ln(1-b) = +\infty. \text{ Diverge}$$

2. $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx$, $p\in\mathbb{R}$, $b>0$

Se $p=1$ $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \ln x\Big|_a^b = \lim_{a\to 0^+} (\ln b - \ln a) = +\infty$; diverge.

Se $p\neq 1$ $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p}\,x^{-p+1}\Big|_a^b\right) = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}\right)\right)$

Logo

$$\boxed{\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{array}{l}\text{converge se } p<1\\ \text{diverge se } p\geq 1\end{array}}$$

Teste da comparação (Teorema do confronto para integrais impróprias)

Sejam f e g funções contínuas com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.

(a) Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.

(b) Se $\int_a^{+\infty} g(x)$ diverge, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

(c) Para h contínua, se $\int_a^{+\infty} |h(x)|\,dx$ converge então

$\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$ converge (a recíproca não vale!)

Ideia da demonstração do item (a)

(a) $$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)\,dx \leq \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$$

A função $G(b) = \int_a^b g(x)\,dx$ é positiva, crescente e limitada. Portanto $\lim_{b \to} G(b)$ existe. ☒

Exemplos

1. $$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

$g(x) \leq f(x)$ contínuas e positivas

Temos $x^2 \geq x \geq 1 \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$

$$\Rightarrow \int_1^b e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^b e^{-x}\,dx$$

Como $$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_1^b \right)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(e^{-1} - e^{-b} \right) = e^{-1} < \infty$$

Como $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge, pelo Teorema do confronto para integrais impróprias, a integral imprópria $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge também.

(Não podemos calcular diretamente esta integral!)

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ Usando o método de integral por partes e fazendo $u = \frac{1}{x}$, $dv = \operatorname{sen} x$, temos $du = -\frac{1}{x^2}$, $v = -\cos x$ obtemos

$$\int_1^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx$$

Observe que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Big|_1 = \lim_{b\to+\infty}\left(\cos 1 - \frac{\cos b}{b}\right) = \cos 1 < \infty.$

Temos $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$. Como $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge (pois $p=2>1$)

segue, pelo Teorema do confronto que $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ converge, e pelo mesmo Teorema, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ Converge.

Portanto,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}dx \text{ converge.}$$

3. Prove que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|dx$ diverge.

(A recíproca do Teorema do Confronto Parte (c) não vale.)

Teorema (Teste da comparação no limite)

Se f e g são positivas e contínuas em $[a, +\infty)$ e se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad , \quad 0 < L < +\infty$$

então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são ambas convergentes ou divergentes.

Exemplo

Sejam $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geq 1$.

As funções f e g são positivas e contínuas.

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$$

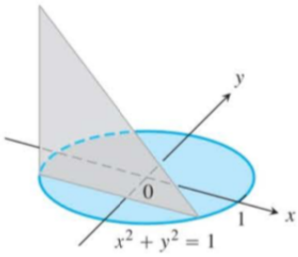
Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge $(p=2)$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge também.

Observe que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ (exercício!).

O Teorema da comparação não nos permite concluir sobre a convergencia/divergencia das integrais impróprias e não sobre seus valores (quando convergiram).

Aula 5 de Consolidação. As questões e as figuras desta aula são do livro de G. B. Thomas, Cálculo 1, 12^a edição.

Questão 1: *A base de um sólido é o disco* $x^2+y^2 \leq 1$*. As seções transversais por planos perpendiculares ao eixo* y *entre* $y=-1$ *e* $y=1$ *são triângulos retângulos isósceles com um cateto no disco. Calcule o volume do sólido.*



Solução: Temos, pelo método das seções transversais,

$$V = \int_a^b A(y)dy$$

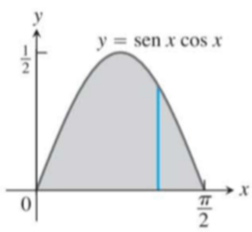
onde $A(y)$ é a área da seção transversal, e $[a,b]$ é o intervalo da variação de y. Temos

$$A(y) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2})\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-y^2}\right)^2 = 2(1-y^2)$$

e $[a,b] = [-1,1]$. Portanto,

$$V = \int_{-1}^{1} 2(1-y^2)dy = 2(y - \frac{1}{3}y^3)\big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

Questão 2. *Calcule o volume do sólido obtido com a rotação da região sombreada em torno do eixo* x*.*

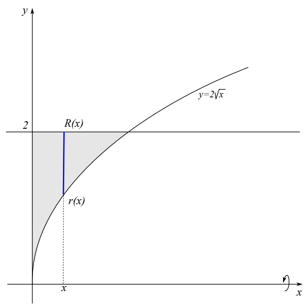


Solução: A seção transversal é um disco de raio $r(x) = \sin(x)\cos(x)$, com $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Então,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi r^2(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(\sin(x)\cos(x))^2 dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(4x)}{2}dx \\
&= \frac{\pi}{4}(\frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{16}.
\end{aligned}$$

Questão 3. *(Método do anel) Determine o volume do sólido obtido com a rotação em torno do eixo-x da região limitada pelas curvas: $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$.*

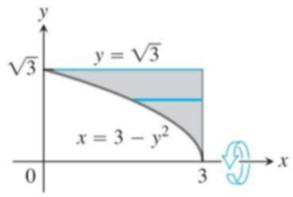
Solução:



A seção transversal é um anel com raio menor $r(x) = 2\sqrt{x}$, e raio maior $R(x) = 2$, e $x \in [0, 1]$. Então,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(R^2(x) - r^2(x))dx \\
&= \pi\int_0^1 (4-4x)dx \\
&= \pi(4x - 2x^2)\Big|_0^1 \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Questão 4. *Use o método da casca cilíndrica para determinar o volume do sólido obtido com a rotação da região sombreada em torno do eixo x.*



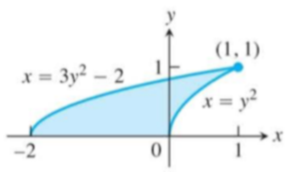
Solução: Fórmula do volume pelo método da casca cilíndrica:

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{raio da} \\ \text{casca} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{altura} \\ \text{da casca} \end{pmatrix} dy$$

Temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (y)(3-(3-y^2))dy \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y^3 dy \\ &= 2\pi (\tfrac{y^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \tfrac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

Questão 5. *A região sombreada é girada em torno do eixo x para gerar um sólido. Qual método (do disco, do anel, da casca) você usaria para determinar o volume do sólido? Quantas integrais seriam necessárias em cada caso. Explique.*



Solução: Método do disco e anel: 2 integrais:

$$V = \int_{-2}^{0} \pi \left(\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right)^2 dx + \int_0^1 \pi \left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right)^2 - (\sqrt{x})^2\right) dx$$

Método da casca: 1 integral:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (y)(y^2-(3y^2-2))dy \\ &= 2\pi \textstyle\int_0^1 (y)(2-2y^2)dy = 2\pi(y^2 - \frac{1}{2}y^4)\Big|_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

Capítulo 2 : Funções de várias variáveis

Aula 10 Métrica e topologia no espaço $\mathbb{R}^n$
curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^n$

Conteúdo da aula
- O $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^n$
- Produto escalar
- Métrica e topologia em $\mathbb{R}^n$
- Curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^n$

O espaço $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{-vezes}}$, $n\geq 1$

$= \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i=1\dots n\}.$

Operações adição e multiplicação por um escalar

Definimos a operação adição "+" em $\mathbb{R}^n$ como seguinte:

para $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\underline{x}+\underline{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

A operação "+" satisfaz as seguintes propriedades:
Para todo $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ em $\mathbb{R}^n$

A1: $(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z} = \underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})$ (associativa)

A2: $\underline{x}+\underline{y} = \underline{y}+\underline{x}$ (comutativa)

A3: $\underline{x}+\underline{0} = \underline{x}$, onde $\underline{0}=(0,0,\dots,0)$ (Elemento neutro)

A4: existe um vetor $-\underline{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ tal que $\underline{x}+(-\underline{x}) = \underline{0}$ (Elemento oposto)

Dizemos que $(\mathbb{R}^n,+)$ é um grupo comutativo

Definimos a operação multiplicação por um escalar "$\cdot$" como seguinte:

$$\alpha \cdot \underline{x} = \alpha \underline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

A operação "$\cdot$" satisfaz as seguintes propriedades: para todo $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

M1: $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y}$ (distributiva)
M2: $(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{x}$ (distributiva)
M3: $1\underline{x} = \underline{x}$ (elemento neutro)
M4: $\alpha(\beta \underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x}$ (associativa)

Assim o espaço $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ se torna um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Produto escalar

O produto escalar é a operação em $\mathbb{R}^n$ (denotada por "$\cdot$" ou "$\langle , \rangle$") que associa a dois vetores $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ o escalar

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

O produto escalar tem as seguintes propriedas: para todo $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ (simétrico)
- $\left.\begin{array}{l} \langle \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}, \underline{z} \rangle = \alpha \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \beta \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle \\ \langle \underline{x}, \alpha\underline{y} + \beta\underline{z} \rangle = \alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \beta \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle \end{array}\right\}$ (bi-linear)
- $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ (positivo)
- $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$ (definido)

Definimos a norma de $\underline{x}$ como $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$

Métrica e topologia em $\mathbb{R}^n$

Vamos considerar $\mathbb{R}^n$ com um conjunto de pontos.
Definimos a distância $d(\underline{x}, \underline{y})$ entre dois pontos $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ como $\|\underline{x} - \underline{y}\|$:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Definição Sejam $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

A bola aberta de centro $\underline{x}_0$ e raio r é o conjunto

$$B(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{x}_0) < r\}$$

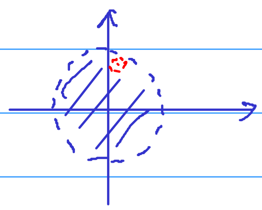
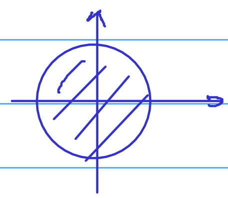
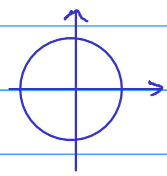
A bola fechada de centro $\underline{x}_0$ e raio r é o conjunto

$$\overline{B(\underline{x}_0, r)} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{x}_0) \leq r\}$$

A esfera de centro $\underline{x}_0$ e raio r é o conjunto

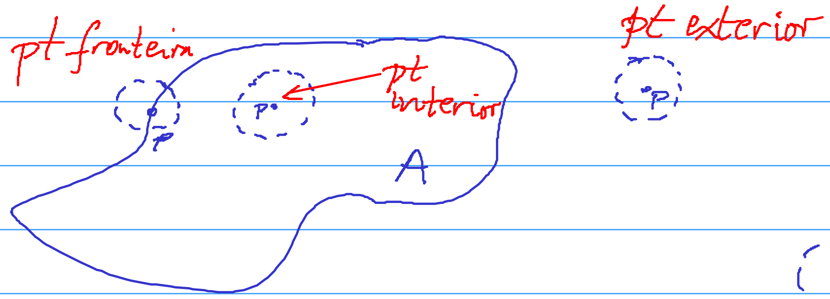
$$S(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{x}_0) = r\}$$

Para $n = 2$

$B(\underline{0}, 1)$  $\overline{B(\underline{0}, 1)}$  $S(\underline{0}, 1)$ 

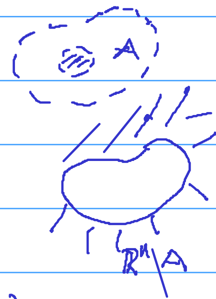
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (um subconjunto de $\mathbb{R}^n$), e $p \in \mathbb{R}^n$

- O ponto p é dito ponto interior de A se $\exists \delta > 0$ tal que $B(p,\delta) \subseteq A$
- p é dito ponto exterior de A se $\exists \delta > 0$ tal que $B(p,\delta) \cap A = \emptyset$
- p é dito ponto fronteira se $\forall \delta > 0$, $\exists q_{r_1} \in B(p,r) \setminus A$ e $\exists q_{r_2} \in B(p,r) \cap A$



Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito

- aberto se todo ponto de A é ponto interior.
- fechado se seu complementar é aberto
- limitado se $\exists M > 0$ tq $A \subseteq B(\underline{0}, M)$



Uma vizinhança de $p \in \mathbb{R}^n$ é um aberto que contem p.

Curvas parametrizadas em $\mathbb{R}^n$

Definição

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$.

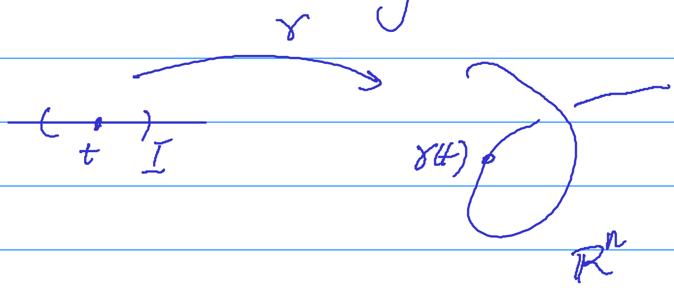
Um curva em $\mathbb{R}^n$ é uma função (a valor vetorial, em $\mathbb{R}^n$)

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \text{ com}$$

$x_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$ funções a valor em $\mathbb{R}$.

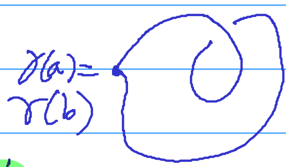
O traço da curva é a imagem de γ.



Dizemos que γ é contínua (resp. diferenciável) se as funções $x_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ são contínuas (resp. diferenciáveis)

Dizemos que γ é fechada se $I = [a,b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$

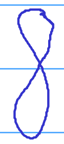
A curva γ é simples se é injetora



γ fechada

Se γ é diferenciável, o vetor tangente a curva no ponto $\gamma(t)$ é o vetor

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$$



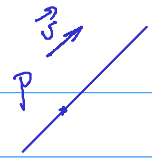
fechada
não simples

A curva γ é regular se $\gamma'(t) \neq \underline{0}$ para todo $t \in I$

Um ponto t_0 onde $\gamma'(t_0) = \underline{0}$ é chamado ponto singular.

Uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ $(n=2)$ é chamada curva plana. Para $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, a relação entre $x = x(t)$, $y = y(t)$ é chamada equação da curva.

Exemplos



1. Retas

Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\underline{0}\}$, com $p = (p_1, \dots, p_n)$
$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$

Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = p + t\vec{v} = (p_1 + tv_1, \dots, p_n + tv_n)$

O traço de γ é a reta por p e paralela a $\vec{v}$.

A curva γ é uma curva diferenciável (as funções x_i são lineares em t)

Temos $\gamma'(t) = \vec{v} \neq \underline{0}$, portanto γ é regular.

2. Circunferência $(n = 2)$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

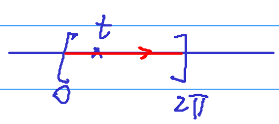
γ é diferenciável.

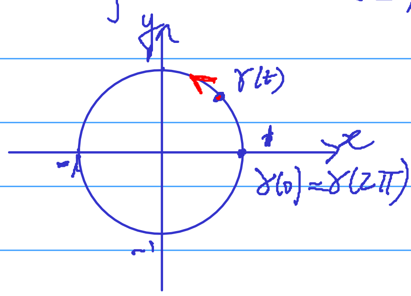
Temos $\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, $\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

portanto, $\gamma'(t) \neq \underline{0} \ \forall t$, i.e., γ é regular.

Para $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, temos $x^2 + y^2 = 1$ que é uma equação da curva γ.

O traço de γ é a circunferência $S(\underline{0}, 1)$





A seta indica o sentido do movimento

3. A cúspide $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $\gamma(t) = (t^2, t^3)$.

A curva γ é diferenciável? Sim, pois $x = x(t) = t^2$ e $y = y(t) = t^3$ são diferenciáveis.

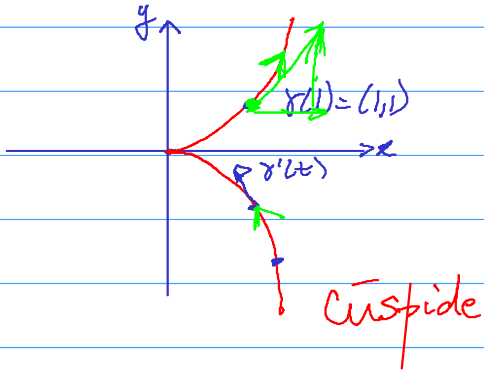
Equação da curva
$x = t^2$, $y = t^3 \Rightarrow x^3 = y^2$
$x^3 - y^2 = 0$

Temos $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$.

A curva γ é regular? Não, pois $\gamma'(0) = (0,0)$; γ tem singularidade no ponto $t = 0$.

$\gamma'(-1) = (-2, 3)$

$\gamma'(1) = (2, 3)$

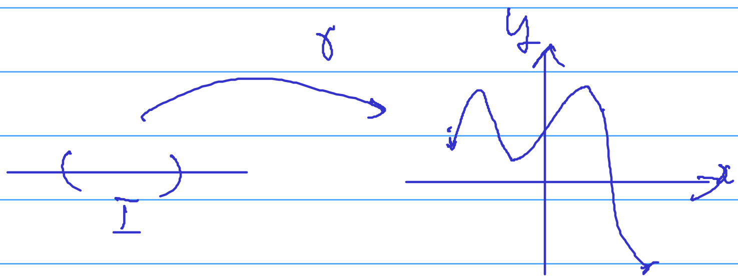


t	$-\infty$	0	$+\infty$
$x(t)$	$+$	0	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$		$+\infty$

4. Gráfico de uma função $f: I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$

O gráfico de f é uma curva plana parametrizada por $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, com

$$\gamma(t) = (t, f(t)); \quad x(t) = t \text{ e } y(t) = f(t).$$



5. $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2-1, t^3-t)$

A curva γ é diferenciável pois as funções $x(t) = t^2-1$ e $y(t) = t^3-t$ são diferenciáveis.

Temos $\gamma'(t) = (2t, 3t^2-1)$, e $\gamma'(t) = (0,0) \Leftrightarrow 2t=0$ e $3t^2-1=0$ que não é possível. Logo $\gamma'(t) \neq (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Segue que γ é uma curva regular.

A curva γ é simples?

Sejam $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ com $t_1 \neq t_2$ e $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

Então
$$\begin{cases} t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1 & (1) \\ t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2 & (2) \end{cases}$$

A equação (2) é equivalente a

$$t_1(t_1^2-1) = t_2(t_2^2-1) \overset{\text{usando (1)}}{\Leftrightarrow} t_1(t_1^2-1) = t_2(t_1^2-1)$$
$$\Leftrightarrow (t_1^2-1)(t_1-t_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow t_1^2 - 1 = 0 \quad \text{pois } t_1 \neq t_2$$
$$\Leftrightarrow t_1 = \pm 1$$

Portanto $t_1 = 1$ e $t_2 = -1$ (ou $t_1 = -1$ e $t_2 = +1$)

Temos $\gamma(-1) = \gamma(1) = (0,0)$ e

$$\gamma'(-1) = (-2, 2)$$
$$\gamma'(1) = (2, 2)$$

ou seja o traço de γ passa duas vezes pela origem com vetores tangentes distintos.

Para fazer o esboço do traço da curva γ, analizamos o comportamento das funções coordenadas de $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com

$$x(t) = t^2 - 1$$
$$y(t) = t^3 - 1$$

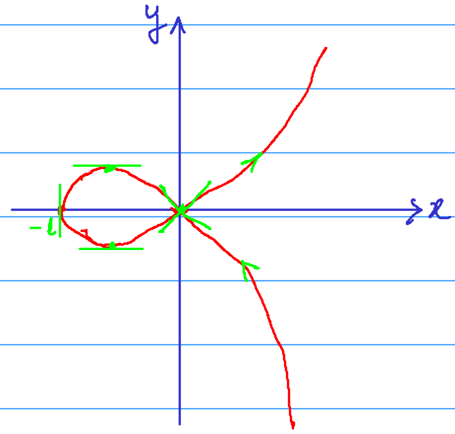
Temos $x(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$,
ou seja γ intersecta o eixo-y no ponto $\gamma(-1) = \gamma(1) = (0,0)$

Temos também $x'(t) = 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$
Portanto, o vetor tangente é vertical (paralelo ao eixo-y) no ponto $\gamma(0) = (-1, 0)$.
A função $x(t)$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e é crescente em $(0, +\infty)$.

Agora para função $y(t) = t^3 - t$, temos
$y(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \pm 1$. Logo o traço de γ intersecta o eixo-x nos pontos $\gamma(0) = (-1, 0)$ (onde a tangente é vertical) e no ponto $\gamma(-1) = \gamma(1) = (0,0)$.

Derivando, $y'(t) = 3t^2 - 1$, e $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Nestes pontos o vetor tangente da curva é horizontal (i.e., paralelo ao eixo-x).
A função $y(t)$ é crescente em $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ e é decrescente no intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Podemos fazer o esboço da curva juntando as informaçoes acima.



Observe que $\gamma\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ e
$\gamma\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

Aula 11

Funções de várias variáveis

Conteúdo da aula
- Definição de uma função de várias variáveis
- Gráfico de uma função de várias variáveis

"Entrada": Encontre uma parametrização da reta tangente a curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, no ponto $t_0 = 1$.

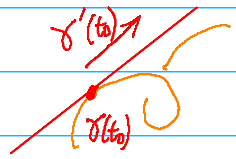
A reta tangente a curva γ no ponto $\gamma(t_0)$ é a reta que passa pelo ponto $\gamma(t_0)$ e que é paralela ao vetor $\gamma'(t_0)$.

Seja $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização desta reta.

Então

$$r(t) = \gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0)$$
$$= (1,1,1) + t\,(1,2,3)$$
$$= (1+t,\ 1+2t,\ 1+3t)$$

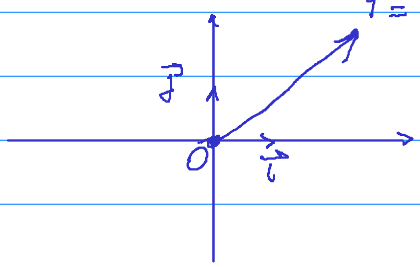
$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$



Funções de duas variáveis

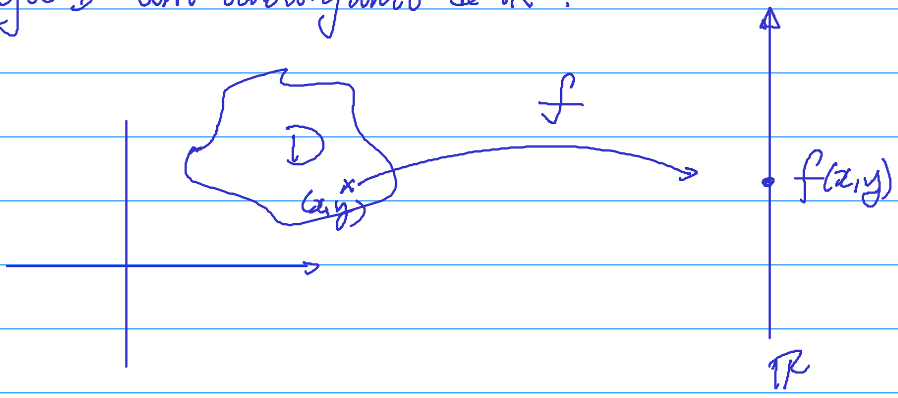
Indificamos o plano com $\mathbb{R}^2$: escolhamos um sistema (cartesiano) de coordenadas

$P = (a,b) \iff \vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j}$



$P = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.



Uma função f de duas variáveis é uma lei/regra que associa a cada par $(x,y) \in D$ um único número real $f(x,y)$.

Notações:
$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$$

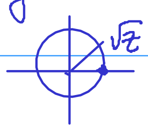
x, y : variáveis independentes
z : variável dependente
D : domínio de f $= Dom(f)$
$Im(f) = \{f(x,y) : (x,y) \in D\} \subset \mathbb{R}$ é a imagem de f.

Exemplos

1. $f(x,y) = c$, c constante (função constante)
$Dom(f) = \mathbb{R}^2$
$Im(f) = \{c\}$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2$
$Dom(f) = \mathbb{R}^2$
$Im(f) = [0, +\infty)$: temos $f(x,y) \geq 0$
Seja $z \geq 0$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $f(x,y) = z$, por exemplo $(x,y) = (\sqrt{z}, 0)$

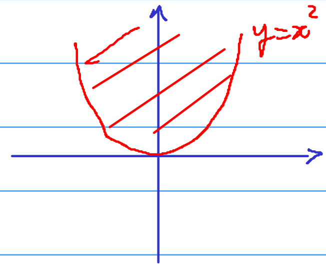
$x^2 + y^2 = z$



3. $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y):\ y - x^2 \geq 0\}$

$\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$



Funções de várias variáveis n, $n \geq 3$ (n = número de variáveis)

Uma função pode depender de mais de 2 variáveis quando $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$

Exemplo $f(x,y,z) = \sqrt{1 - (x^2+y^2+z^2)}$

$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 - (x^2+y^2+z^2) \geq 0\}$

$1 - (x^2+y^2+z^2) \geq 0 \iff \underline{x^2+y^2+z^2} \leq 1$

Então $\mathrm{Dom}(f) = B(\underline{0}, 1)$ que é a bola fechada de centro $\underline{0} = (0,0,0)$ e raio 1.

$\mathrm{Im}(f) = [0,1]$ (exercício)

Gráfico de uma função

(A). Funções de duas variáveis

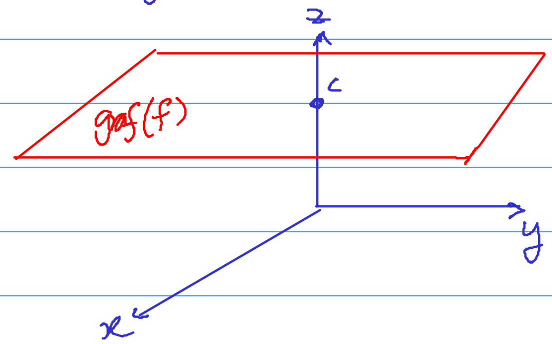
O gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ é o conjunto

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

Exemplo

1. $f(x,y)=c$, $c=\text{const}$

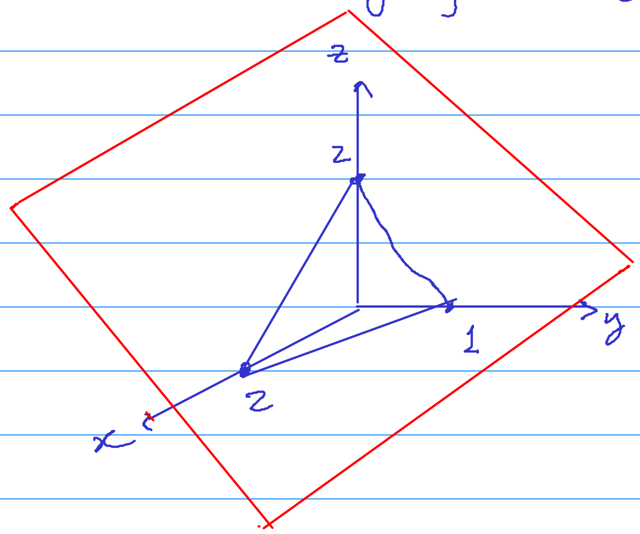
$\text{graf}(f)=\{(x,y,c),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$



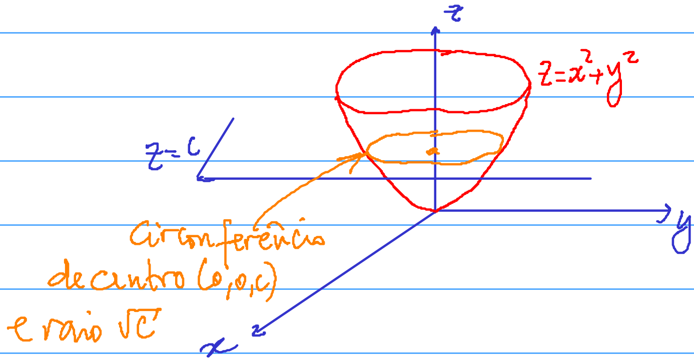
2. $f(x,y)=2-x-2y$ $\quad\quad \text{Dom}(f)=\mathbb{R}^2$

$z=2-x-2y \Leftrightarrow x+2y+z-2=0$

Então o gráfico de f é um plano



3. $f(x,y)=x^2+y^2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$



$z=x^2+y^2$

parabolóide elíptico

$\text{graf}(f)=\{(x,y,z):\ z=f(x,y)\}$

$=\{(x,y,x^2+y^2),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

Para $n \geq 3$ e $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, o gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$graf(f) = \left\{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_n) \in D \text{ e} \\ x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\}$$

Aula 6 de Consolidação

Questão 1. *Defina o que é uma integral imprópria.*

Solução: Uma integral imprópria de uma função f é uma integral

1. em intervalos não limitados e f limitada.

   Exemplos: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$, ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

2. em intervalos limitados onde f não é definida em todos os pontos do intervalo e não é limitada. Exemplo: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$.

3. uma combinação de 1 e 2. Exemplo: $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

Questão 2. (a) *A integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}\,dx$ *converge ou diverge?*

Solução: Temos $0 \leq \operatorname{sen}^2(x) \leq 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ e $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Portanto, $0 \leq \displaystyle\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(\forall x \geq 1)$. Como $\displaystyle\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}$ e $\displaystyle\frac{1}{x^2}$ são contínuas em $[1, +\infty)$ e a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge $(p = 2 > 1)$, segue, pelo teste de comparação, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}\,dx$ converge.

Questão 2: (b) *A integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)+2}{\sqrt{x}}\,dx$ *converge ou diverge?*

Solução: Temos $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, portanto $1 \leq \operatorname{sen}(x) + 2 \leq 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Daí $0 < \displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)+2}{\sqrt{x}}$ para todo $x > 0$ $(\forall x \geq 1)$. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ diverge $(p = \frac{1}{2} < 1)$, segue, pelo teste de comparação, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)+2}{\sqrt{x}}dx$ diverge.

Questão 2: (c) *A integral* $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$ *converge ou diverge?*

Solução: Fazendo a mudança de variável $x = -u$, temos

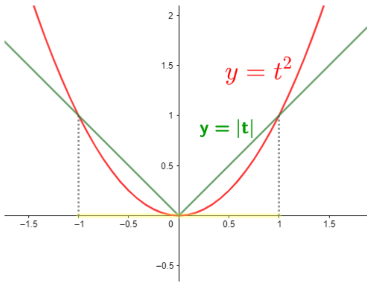
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-1}{(-u)^{\frac{2}{3}}} du = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}} du.$$

A última integral converge pois $p = \frac{2}{3} < 1$, portanto $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$ converge.

Questão 3. *A integral* $\int_{1}^{+\infty} \left| \frac{sen(x)}{x} \right| dx$ *converge ou diverge?*

Solução: Na Aula 9 (pagina 71) provamos, usando o Teste da Comparação, que $\int_{1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ converge. Podemos usar este resultado para concluir que a integral dada converge? Não.

Temos que $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, $|\text{sen}(x)| \geq \text{sen}^2(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (Ver a gráfico a direita que ilustra o fato que a $|t| \geq t^2$ para $-1 \leq t \leq 1$. A afirmação segue pondo $t = \text{sen}(x)$.)



Como $|x| = x$ para todo $x \geq 0$, segue que

$$\left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| \geq \frac{\text{sen}^2(x)}{x}, \qquad \forall x \geq 1.$$

Se $\int_{1}^{+\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{x} dx$ divergir, então podemos concluir pelo Teste da Comparação que $\int_{1}^{+\infty} \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| dx$ diverge.

Para analizar $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{x} dx$, seja $b > 1$. Fazendo

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{x} & \Longrightarrow \quad du = -\dfrac{1}{x^2} dx \\ dv = \text{sen}^2(x) dx & \Longrightarrow \quad v = \int \text{sen}^2(x) dx \quad \Longrightarrow v = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\text{sen}(2x)}{4} \end{cases}$$

temos, integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\int_1^b \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}\,dx &= \left[\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}\right)\right]\Big|_1^b - \int_1^b -\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}\right)dx \\
&= \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4x}\right)\right]\Big|_1^b + \int_1^b \left(\frac{1}{2x}-\frac{\operatorname{sen}2x}{4x^2}\right)dx \\
&= \left[-\frac{\operatorname{sen}2b}{4b}+\frac{\operatorname{sen}2}{4}\right] + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int_1^b \frac{\operatorname{sen}2x}{x^2}dx.
\end{aligned}$$

Agora temos que analisar 3 limites:

$Ia = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\operatorname{sen}2b}{4b}+\frac{\operatorname{sen}2}{4}\right] = \frac{\operatorname{sen}2}{4}$, pois $\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4b} = 0$ e $|\operatorname{sen}2b| \leq 1$. Portando, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\lim_{b\to+\infty} -\frac{\operatorname{sen}2b}{4b} = 0$.

$Ib = \int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}2x}{x^2}\,dx$ é convergente. De fato, $0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen}2x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, $\forall x \geq 1$, e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente. Pelo Teste da Comparação, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}2x}{x^2}\right|\,dx$ converge também, e pelo mesmo teste, $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}2x}{x^2}\,dx$ converge.

$Ic = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ é divergente (p=1).

Logo,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx = Ia + \frac{1}{2}Ib - \frac{1}{4}Ic$$

é divergente.

Portanto, pelo Teste da Comparação, podemos concluir que a integral dada $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right|\,dx$ é divergente.

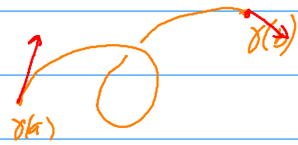
Aula 12 — Curvas de nível, limites e continuidade

Conteúdo da aula
- Curvas de nível
- Superfícies de nível
- Limites

"Entrada" Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva no espaço $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
O que significa para γ ser diferenciável em $t=a$ e $t=b$?

γ fechada significa $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(a) γ não é fechada ($\gamma(a) \neq \gamma(b)$)



γ é diferenciável no pt $t=a$ se

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h} \text{ existe (denotado por } \gamma'(a))$$

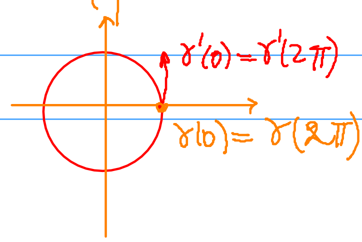
γ é diferenciável no pt $t=b$ se

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\gamma(b+h)-\gamma(b)}{h} \quad (\text{denotado por } \gamma'(b))$$

(b) γ é fechada ($\gamma(a) = \gamma(b)$)

γ é diferenciável em a e b se é diferenciável em a e em b e $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.

Exemplo $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. A curva γ é fechada.
γ é diferenciável em $a=0$ e $b=2\pi$ (pois cos e sen são diferenciáveis em $\mathbb{R}$) e $\gamma'(0) = (0,1) = \gamma'(2\pi)$



Curvas de nível de funções de duas variáveis

Definição As curvas de nível de uma função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são as curvas no domínio D de f com equações

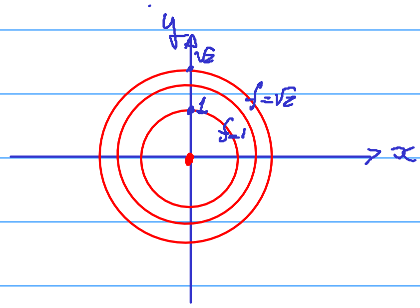
$$f(x,y) = c$$

onde c é uma constante.

Exemplo $f(x,y) = x^2 + y^2$

A função f é definida em $D = \mathbb{R}^2$

- Se $c < 0$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\} = \emptyset$
- Se $c = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, a curva de nível zero é o ponto $(0,0)$.
- Se $c > 0$, a curva de nível c é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{c}$ (com equação $x^2 + y^2 = c$)



$D = \mathbb{R}^2$

O mapa da curvas de nível da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ (isto é, o esboço de algumas curvas de nível)

Observação As curvas de nível de qualquer função f são disjuntas pois

$$\{(x,y) \in D : f(x,y) = c_1\} \cap \{(x,y) \in D : f(x,y) = c_2\} = \emptyset$$

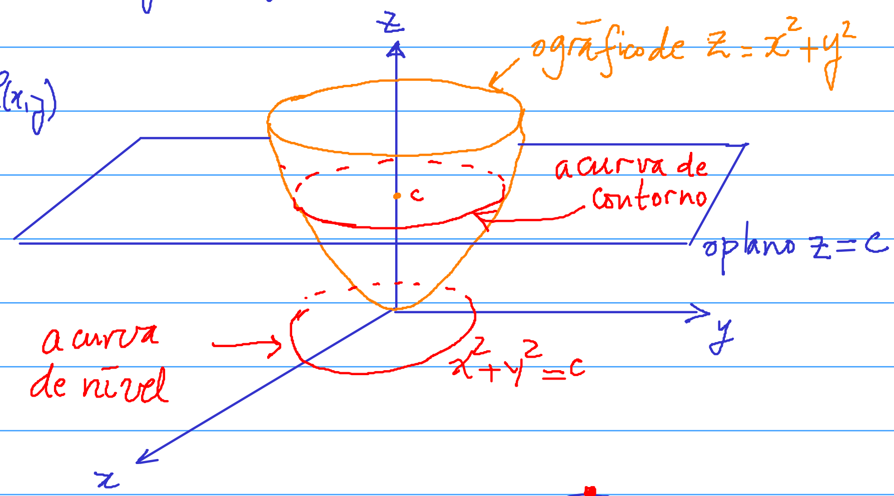
se $c_1 \neq c_2$.

<u>Definição</u> A curva de contorno de $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de nível c é a curva obtida pela interseção do gráfico de f com o plano $z = c$. É o conjunto

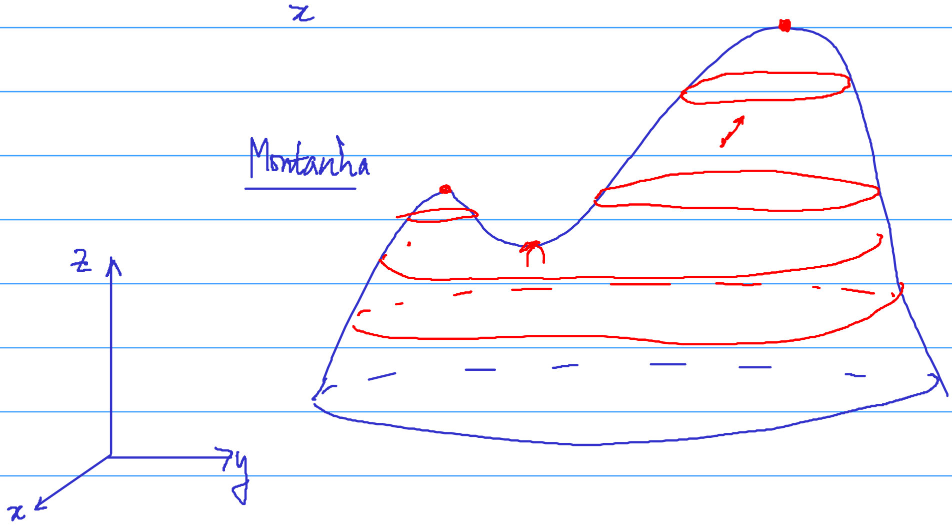
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : z = f(x,y) = c\}$$

<u>Exemplo</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$

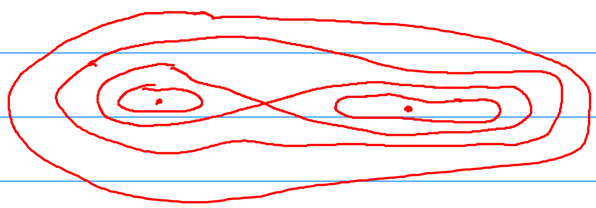
$\{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$



<u>Montanha</u>



$z = f(x,y)$ é a altura de um ponto em relação ao nível do mar



O mapa das curvas de nível

Superfícies de nível de funções de três variáveis

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de 3 variáveis. As superfícies de nível da função f são as superfícies em D com equação

$$f(x,y,z) = c$$

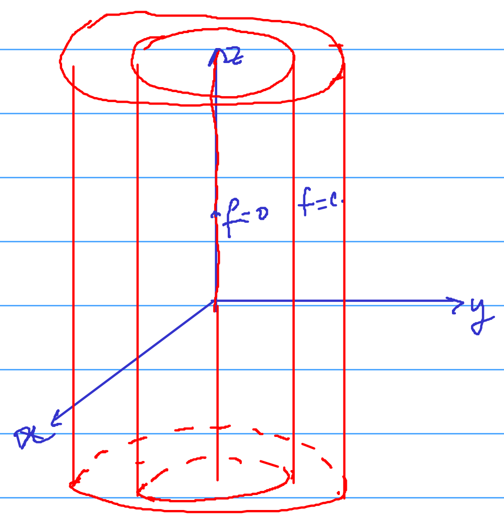
c uma constante.

Exemplo $\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2$

A função f é distinta da função $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2$

O domínio de f é $D = \mathbb{R}^3$

- Se $c < 0$, o conjunto $(x,y,z): x^2+y^2 = c$ é vazio.
- Se $c = 0$, $x^2+y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$
  A superfície de nível 0 é $\{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\}$
- Se $c > 0$, $x^2+y^2 = c$. A superfície de nível c é o cilindro de eixo-z e raio $\sqrt{c}$



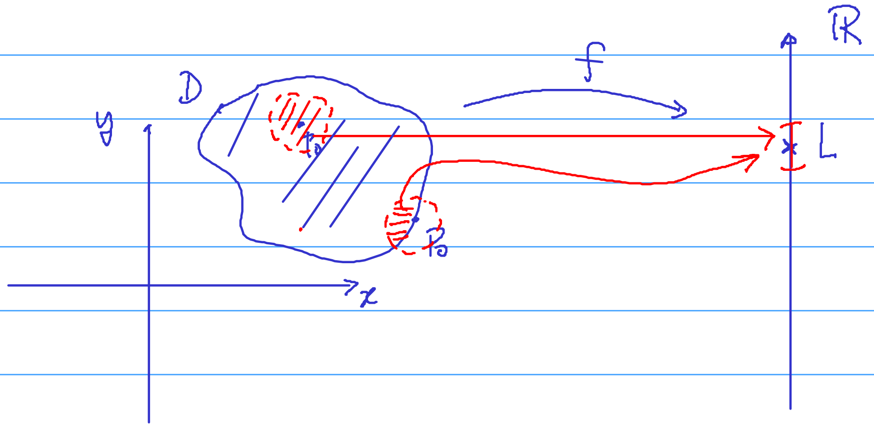
Mapa das superfícies de nível de f

Limites de Funções de duas variáveis

Definição Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $p_0 = (a,b) \in D$.

A função f tem limite L quando (x,y) se aproxima de $p_0 = (a,b)$ se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número positivo δ, tal que para todo $(x,y) \in B(p_0,\delta) \cap D$, temos $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tq } (x,y) \in D : \|(x,y)-(a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon \right)$$



Notação $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$

Observação A definição vale para p_0 um ponto fronteira de D.

Limites infinitos

- $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b) = p_0} f(x,y) = +\infty$ significa

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall (x,y) \in B(p_0,\delta) \cap D$, $f(x,y) > M$.

- $\lim\limits_{(x,y) \to p_0} f(x,y) = -\infty$ significa

$\forall M < 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall (x,y) \in B(p_0,\delta) \cap D$, $f(x,y) < M$.

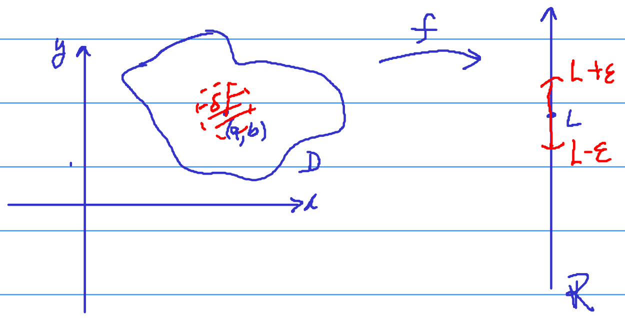
Aula 13

Teste dos dois caminho, continuidade

Conteúdo da aula
- Não existência do limite pelo teste dos dois caminho
- Continuidade

Lembrando $\quad f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ significa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tq $\forall (x,y) \in B((a,b),\delta) \cap D$, temos $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

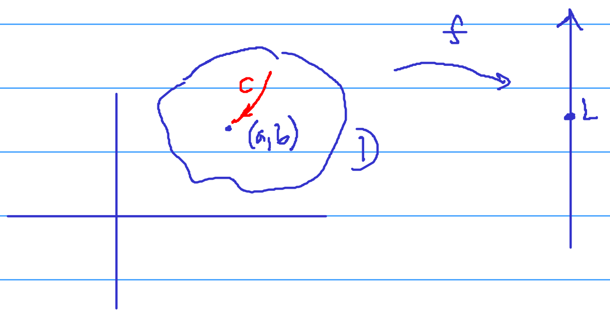


Um caminho em D é uma curva em D.

Seja $C :]t_1, t_2[\longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, $C(t) = (x(t), y(t))$, um caminho em D com $\lim\limits_{t \to t_1} C(t) = (a,b)$.

Dizemos que $f(x,y) \longrightarrow L$ quando $(x,y) \longrightarrow (a,b)$ ao longo do caminho C e escrevemos $\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow{C} (a,b)} f(x,y) = L$

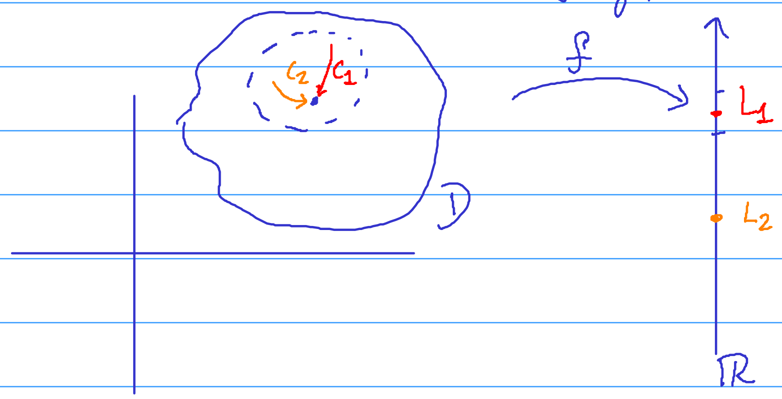
Se $\lim\limits_{t \to t_1} f(x(t), y(t)) = L$.



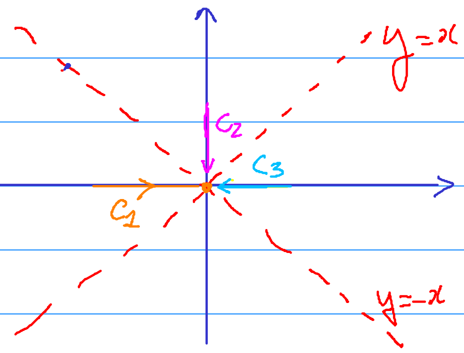
Teste dos dois caminhos

Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(a,b)} f(x,y) = L_1$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_2}(a,b)} f(x,y) = L_2$

com $L_1 \neq L_2$, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe



Exemplo $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq \pm x\}$



Observe que $(0,0)\in D$. É um ponto fronteira de D.

Seja C_1 o caminho

$$C_1 : \left]-\tfrac{1}{2}, 0\right[\longrightarrow D\subset\mathbb{R}^2$$

$$C_1(t) = (t,0)$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t,0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{t^2}{t^2-0^2} = 1.$$

Seja C_2 o caminho

$$C_2 : \left]0, \tfrac{1}{2}\right[\longrightarrow D\subset\mathbb{R}^2, \qquad C_2(t) = (0,t)$$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_2}(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(0,t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{0}{0-t^2} = 0.$$

Portanto, pelo teste dos dois caminhos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{não existe.}$$

Observação

Seja $C_3 : I =]0, \frac{1}{2}[\subset \mathbb{R} \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ $\quad C_3(t) = (t, 0)$

temos $\displaystyle \lim_{(x,y)\xrightarrow{C_3}(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{t^2}{t^2 - 0} = 1 = \lim_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(0,0)} f(x,y)$

Portanto se $\displaystyle \lim_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow{C_2}(a,b)} f(x,y)$, isso não implica que $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe.

O teste dos dois caminhos é usado para mostrar que o limite não existe.

Continuidade

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto (a,b) se f é definida em (a,b) e $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Dizemos que f é contínua em D se é contínua em todo ponto de D.

Afirmações

1. Os polinômios são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

exemplo $\quad P(x,y) = 4x^3 - x^2y + x + 1$

$$\left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} P(x,y) = P(1,-1) \right)$$

2. As funções racionais $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, P, Q polinômios

são funções contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) : Q(x,y) = 0\}$.

3. Composta de funções contínuas é uma função contínua. Logo com sen, cos, ln, exp, são contínuas, então

$\operatorname{sen}(f(x,y)),\ \cos(f(x,y)),\ e^{f(x,y)},\ \ln(f(x,y))$

são contínuas se f é contínua.

4. Se f e g são contínuas então $\lambda f + \mu g$ é contínua para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5. Se f e g são contínuas, então $f \cdot g$ é contínua e

$\frac{f}{g}$ é contínua nos pts onde $g \neq 0$.

[<u>OB</u> Valem as propriedades do limite para funções de várias variáveis.]

Agora é "fácil" calcular limites de funções.

<u>Exemplos</u>

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3 + 1} = 3$$

A função é racional e (0,0) pertence ao domínio então é contínua no pt (0,0).

2. Determine a região de $\mathbb{R}^2$ em que f é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ é uma função racional

Portanto é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Para verificar se f é contínua em $(0,0)$, precisamos verificar se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Para o caminho $C_1 :]0,1[\to D$, com $C_1(t) = (t,t)$ (ou seja $y = x$)

temos $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} f(t,t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \dfrac{t^2}{t^2+t^2} = \dfrac{1}{2}$

Mas para o caminho $C_2 :]0,1[\to D$, com $C_2(t) = (t,0)$

temos $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow{C_2}(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} f(t,0) = 0$

Portanto, pelo teste dos dois caminhos, o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Segue que f não é contínua em $(0,0)$.

Então a região em $\mathbb{R}^2$ em que f é contínua é $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Aula 7 de Consolidação: Curvas, Funções de várias variáveis e Curvas de Nível

Questão 1:*Considere a curva* $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t))$.

(a) γ é diferenciável?

(b) γ é regular?

(c) Faça um esboço do traço (imagem) de γ.

(d) Qual é o sentido de percurso de γ?

Solução:

(a) Temos que $x(t) = e^t\cos(t)$ e $y(t) = e^t\sin(t)$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Portanto, γ é diferenciável em $[0,\infty)$.

(b) Temos que $\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$, para todo $t \in [0,\infty)$. Como para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos $e^t \neq 0$ e o sistema $\begin{cases} \cos t - \sin t = 0 \\ \cos t + \sin t = 0 \end{cases}$ não possui solução, podemos concluir que $\gamma'(t) \neq (0,0)$ para todo $t \in [0,\infty)$ e que γ é regular.

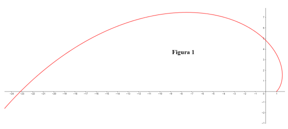
(c) Temos que $||\gamma(t)|| = \sqrt{(e^t\cos(t))^2 + (e^t\sin(t))^2} = e^t$. Portanto

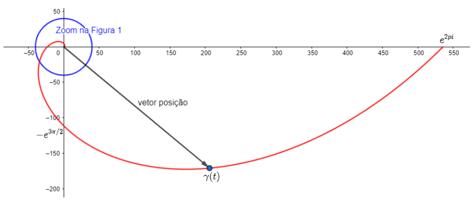
$$\begin{cases} ||\gamma(t)|| \to +\infty & \text{quando } t \to \infty \\ ||\gamma(t)|| \to 1 & \text{quando } t \to 0. \end{cases}$$

Ainda:

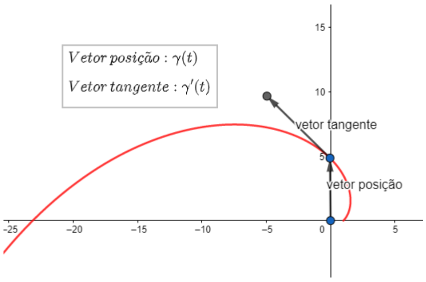
- $\gamma(0) = (1,0)$,
- $x(t) = 0$ quando $t = t_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, o que implica $\gamma(t_k) = (0, (-1)^k e^{\frac{\pi}{2}+k\pi})$,
- $y(t) = 0$ quando $t = \bar{t}_k = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, o que implica $\gamma(\bar{t}_k) = ((-1)^k e^{k\pi}, 0)$.

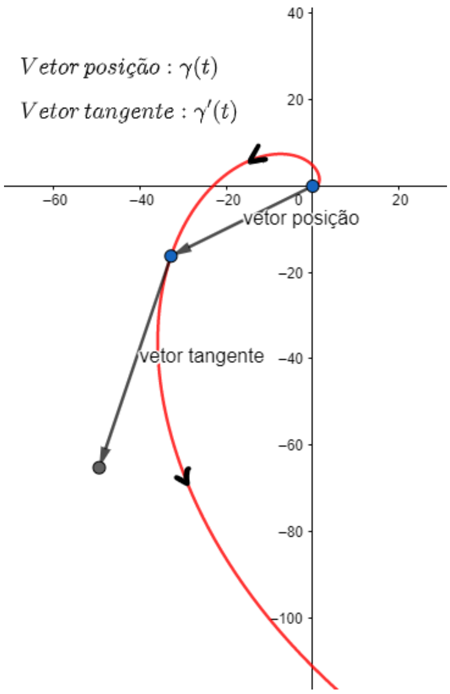
Assim, o traço de γ intercepta os eixos x e y infinitas vezes. A curva é uma espiral:





(d) Temos $\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$. Note $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, e^{\frac{\pi}{2}})$ e $\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$





Geogebra: visualizar a, v e u

Questão 2. *Considere as curvas* $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\gamma(t) = (t+1, t^2+1)$ *e* β *dada pela elipse (1 volta)* $x^2 + 4y^2 = 4$*.*

(a) Encontre a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(0)$.

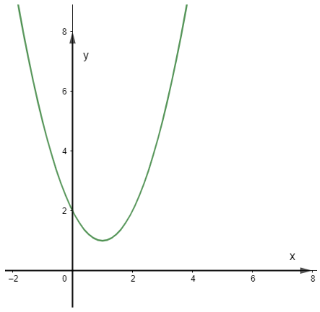
(b) Determine a equação em coordenadas retangulares cuja curva contém o traço de γ.

(c) Encontre uma parametrização da curva β no sentido horário.

Solução: (a) Temos que $\gamma'(t) = (1, 2t)$ e $\gamma(0) = (1, 1)$. Portanto, a equação da reta tangente é dada por

$$r : r(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) = (1, 1) + s(1, 0) = (1 + s, 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

(b) Fazendo $x = t + 1$ e $y = t^2 + 1$, temos $t = x - 1$ e substituindo em $y = t^2 + 1$, obtemos $y = (x - 1)^2 + 1$ (equação de parábola). Portanto o traço de γ está contido na parábola:



Desafio: qual parte da parábola representa o traço de γ?

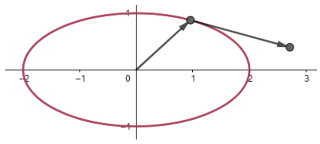
(c) Fazendo $x(t) = 2\sin t$ e $y(t) = \cos t$, com $t \in [0, 2\pi]$ temos que

$$\frac{(x(t))^2}{4} + (y(t))^2 = 1 \iff (x(t))^2 + 4(y(t))^2 = 4.$$

Ainda, $x'(t) = 2\cos t$ e $y'(t) = -\sin t$ e portanto os vetores $(x'(t), y'(t)) = (2\cos t, -\sin t)$ percorrem a elipse no sentido horário quando t varia de 0 a 2π.

Assim, uma parametrização para β é

$$\beta(t) = (2\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



Geogebra: visualizar m, w e b

Questão 3. *Considere a função* $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Determine a imagem de f.

(c) Faça um esboço do gráfico de f.

(d) Esboce curvas de nível de f.

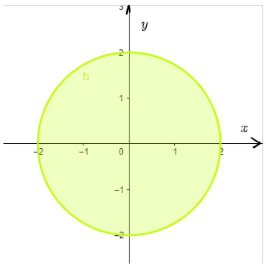
Solução:

(a) A função f está definida quando $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, ou seja, quando $x^2 + y^2 \leq 4$.

Então o domínio D_f da função f é:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

o disco fechado em $\mathbb{R}^2$ de centro $(0,0)$ e raio 2.



(b) A imagem de $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ é

$$Im(f) = \{k \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in D_f \text{ tal que } f(x,y) = k\}.$$

Temos: se $k \in Im(f)$, então exite $(x,y) \in D_f$ tal que $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = k$ o que implica:

$$4 - x^2 - y^2 = k^2 \iff x^2 + y^2 = 4 - k^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} k \in Im(f) \quad &\Longrightarrow \quad 0 \overset{x^2+y^2 \geq 0}{\leq} 4 - k^2 \overset{(x,y)\in D_f}{\leq} 4 \iff 0 \leq k^2 \leq 4 \\ &\iff \quad 0 \leq k \leq 2. \quad (\Longrightarrow Im(f) \subset [0,2]) \end{aligned}$$

Ainda mais, se $k \in [0,2]$ então $(0, \sqrt{4 - k^2}) \in D_f$ e

$$f(0, \sqrt{4-k^2}) = \sqrt{4 - 0 - (\sqrt{4-k^2})^2} = k. \quad (\Longrightarrow [0,2] \subset Im(f))$$

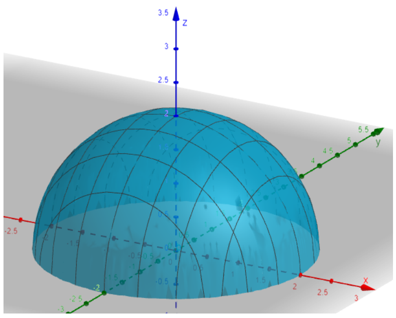
Portanto, concluímos que $Im(f) = [0,2]$.

(c) O gráfico de $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ é o conjunto

$$graf(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_f \text{ e } z = f(x,y)\}.$$

Temos $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = z \Longrightarrow 4 - x^2 - y^2 = z^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$. A última equação é a de uma esfera de centro na origem e raio 2.

Como $z \geq 0$, o gráfico de f é a parte da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 2 contida no semi-espaço $z \geq 0$.

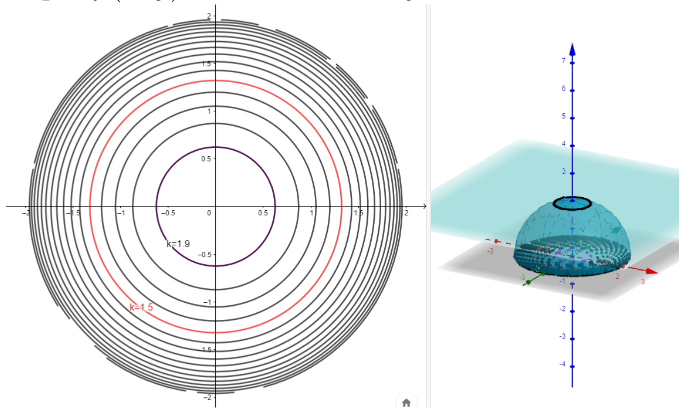


(d) O conjunto de nível k de $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ é o conjunto

$$N_k = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = k\}.$$

Então se $k \notin [0,2] = Im(f)$, $N_k = \emptyset$.
Para $k \in [0,2]$, vimos que $f(x,y) = k \iff x^2 + y^2 = 4 - k^2$.

Portanto, N_k é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{4-k^2}$ se $0 \leq k < 2$, e $N_2 = \{(0,0)\}$.
Geogebra



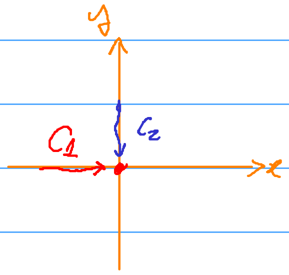
Aula 14

Cálculo de limites

Conteúdo da aula
- Propriedades dos limites
- Exemplos

"Entrada" Determine a região em $\mathbb{R}^2$ em que f é contínua

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



Em $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ f é contínua pois é uma função racional.
Precisamos analisar a continuidade no ponto $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} f(0,0)=0$$

Vamos usar o teste dos dois caminhos.

Para $C_1 :]-\varepsilon, 0[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $C_1(t)=(t,0)$ $(\varepsilon>0)$
temos

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2-0}{t^2-0} = 1$$

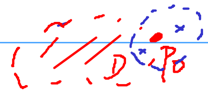
Para $C_2 :]0,\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $C_2(t)=(0,t)$, temos

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_2}(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0-t^2}{0+t^2} = -1$$

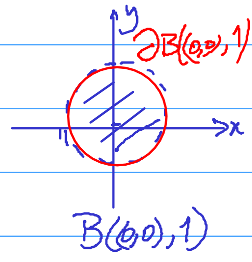
Portanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. Logo f não é contínua em $(0,0)$.

Observação O fato que $\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(0,0)} f(x,y) = 1 \neq f(0,0)$ é suficiente para afirmar que f não é contínua em $(0,0)$. (Mostramos também acima que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.)

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. Vimos que um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ é um ponto da fronteira de D se para todo $\delta > 0$, a bola $B(P_0, \delta)$ contém pontos interiores de D e pontos exteriores de D.



Denotamos por ∂D a fronteira de D (isto é, o conjunto de todos os pontos da fronteira)



Na Aula 12 vimos para $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a definição do $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ com $P_0 = (a,b) \in D$.

Podemos ter $\partial D \cap D = \phi$

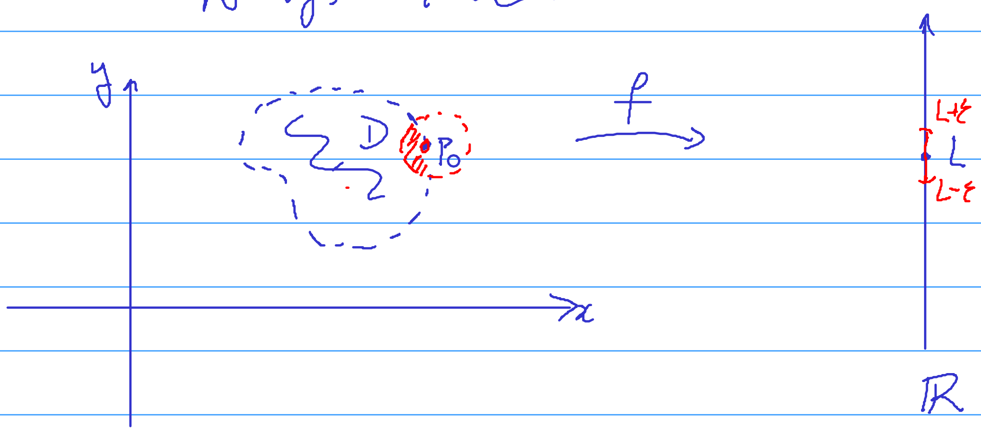
Temos a seguinte definição mais geral que inclui os pontos da fronteira ∂D.

<u>Definição</u> Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 = (a,b) \in D \cup \partial D$

Dizemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall (x,y) \in \left(B(P_0, \delta) - \{P_0\}\right) \cap D, \text{ temos}$$

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon.$$



Propriedades dos limites de funções de duas (ou mais) variáveis

Teorema: Sejam f e g duas funções de duas variáveis com

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M .$$

Então:

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)+g(x,y)\right) = L+M$ (Regra da soma)

2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)-g(x,y)\right) = L-M$ (Regra da diferença)

3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\lambda f(x,y)\right) = \lambda L$, λ um escalar (Regra da multiplicação por um escalar)

4. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y) = L\cdot M$ (Regra do produto)

5. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ se $M\neq 0$ (Regra do quociente)

6. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)\right)^n = L^n$ (Regra da potência)

7. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(f(x,y)\right)^{\frac{1}{n}} = L^{\frac{1}{n}}$, assumindo $L>0$ se n é par (Regra da raiz)

∎

Teorema do anulamento

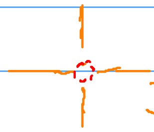
Sejam f e $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P_0 = (a,b) \in D \cup \partial D$

Se g é limitada em $B(P_0, \delta) \cap D$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$

então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y) = 0.$

Exemplo

1. O limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 + xy^2}{x^2+y^2}$ existe?



$D_h = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Escrevemos $h(x,y) = f(x,y)\cdot g(x,y)$ com $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$.

Temos $0 \leq 2x^2+y^2 \leq 2x^2+2y^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 2$. Portanto g é limitada

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e g é limitada, temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0.$

2. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right)$. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y+1}$

Como $(0,0)$ é um ponto do domínio de f, e f é racional, então é contínua em $(0,0)$. Portanto $\cos(f(x,y))$ é contínua em $(0,0)$.

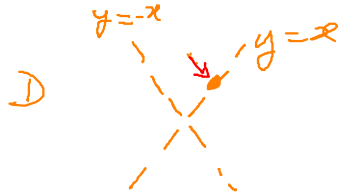
Logo
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right) = \cos\left(\frac{0+0}{0+0+1}\right) = \cos 0 = 1.$$

$\boxed{f_2(x,y) = \operatorname{sen} x}$

3. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{x+y} \operatorname{sen} x$ $\qquad f(x,y) = \underbrace{e^{x+y}}_{f_1(x,y)} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f_2(x,y)}$

Para $f_1(x,y) = e^{x+y}$, a função $g(x,y) = x+y$ é um polinômio então é contínua. Como a função exp é contínua, $f_1(x,y)$ é contínua. A função $f_2(x,y)$ é contínua. Portanto

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \left[\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_1(x,y)\right]\cdot\left[\lim_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x,y)\right] = e^2 \operatorname{sen} 1.$$



4. Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = \frac{3}{2}$

Temos $\displaystyle\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = \frac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}(x+y)} = \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \xrightarrow[(x,y)\to(1,1)]{} \frac{3}{2}$

5. Determine a região em $\mathbb{R}^2$ em que a função f é contínua

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A função é contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (pois é racional e o denominador é $\neq 0$)

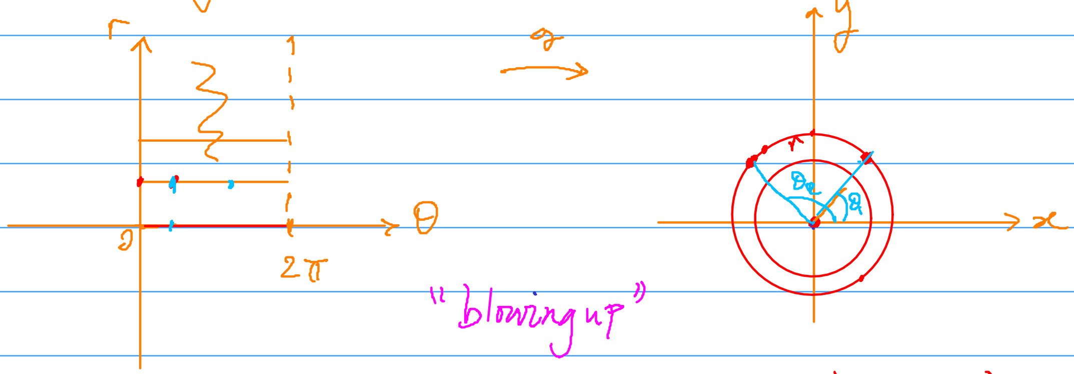
Vamos mostrar que é contínua em $(0,0)$.

[Pode usar o Teorema do anulamento! O objetivo aqui é introduzir uma nova técnica.]

Considere a seguinte aplicação

$$g: [0,2\pi[\times [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

com $g(\theta,r) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$



$g(\theta,0) = (0,0)$ $\qquad g([0,2\pi[\times \{0\}) = \{(0,0)\}$

Fixando $r > 0$ $g([0,2\pi[\times \{r\})$ é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio r

Observe que $g([0,2\pi[\times]0,+\infty[) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

e a aplicação $g: [0,2\pi[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

é bijetora (injetora e sobrejetora).

Então g^{-1} existe. Além disso g^{-1} é contínua.

Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ se e somente se

$$\lim_{(\theta,r)\to(\theta_0,0)} f(g(\theta,r)) = L \quad \text{para todo } \theta_0 \in [0,2\pi[$$

Temos,

$$f(g(\theta,r)) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \frac{r\cos\theta\, r\,\text{sen}\,\theta\,(r^2\cos^2\theta - r^2\text{sen}^2\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta}$$

$$= \underset{\downarrow\, 0}{r^2}\,\underbrace{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)}_{\text{limitada}}.$$

$|\cos\theta| \leq 1$, $|\text{sen}\,\theta| \leq 1$

$|\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta| \leq |\cos^2\theta| + |\text{sen}^2\theta| \leq$

Logo pelo Teorema do anulamento $\lim_{(\theta,r)\to(\theta_0,0)} f(g(\theta,r)) = 0$, $\forall \theta_0$.

Portanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

Concluímos que f é contínua em $\mathbb{R}^2$

Observação

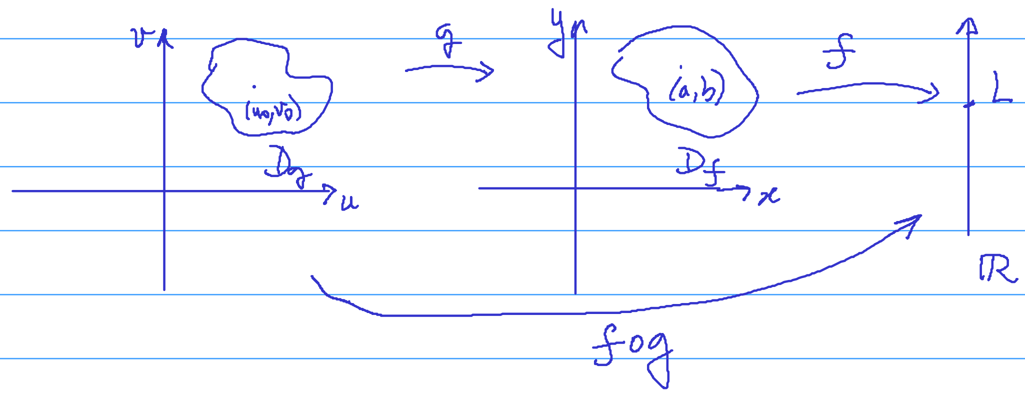
A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ não é contínua em $(0,0)$.

Teorema (limite da composta)

Sejam $g: D_g \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad (g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y)))$

e $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}(g) \subset D_f$.

Suponha que $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} g(u,v) = (a,b)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$



Então $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} (f\circ g)(u,v) = L$ $\quad\boxtimes$

Observação

As definições e os resultados que vimos sobre funções de duas variáveis valem para funções de n-variáveis, com $n \geq 3$.

Exemplos

1. $\displaystyle\lim_{(x,y,z,w)\to(0,0,1,0)} \frac{x^2+xy+z-w^3}{w^2+z^2} = 1.$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y,z,w)\to(0,0,0,0)} (x+zw)\cos\left(x^2+w^2-zy^{100}\right) = 0.$

Aula 15

Derivadas parciais

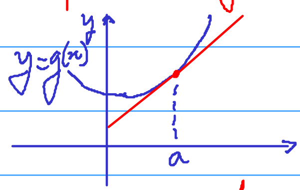
Conteúdo da aula
- Definição da derivada parcial
- Interpretação geométrica
- Existência das derivadas parciais não implica continuidade

Para uma função g de uma variável,

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Precisamos que g seja definida em um intervalo aberto $]a-\delta, a+\delta[$ para algum $\delta > 0$

Interpretação geométrica



$g'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g no ponto $(a, g(a))$.

Derivadas parciais de funções de duas variáveis

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e seja (a,b) um ponto interior de D

A função depende de duas variáveis (x,y).

Para y fixo, a função $x \mapsto f(x,y)$ é uma função de uma variável, e sua derivada é chamada da derivada parcial de f em relação a x

Para x fixo, a derivada da função $y \mapsto f(x,y)$ é a derivada parcial de f em relação a y.

Exemplo $\quad f(x,y) = 2xy + y^2e^x \qquad D = \mathbb{R}^2$

Derivada parcial de f em relação a x : $2y + y^2e^x$
Derivada parcial de f em relação a y : $2x + 2ye^x$

Notação

A derivada parcial de f em relação a x é denotada por

$$f_x \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

A derivada parcial de f em relação a y é denotada por

$$f_y \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Observação A notação $\frac{dg}{dx}$ é a derivada g' de uma função de uma variável.

Definição Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a,b) um ponto interior de D.

A derivada parcial de f em relação a x no ponto (a,b) é

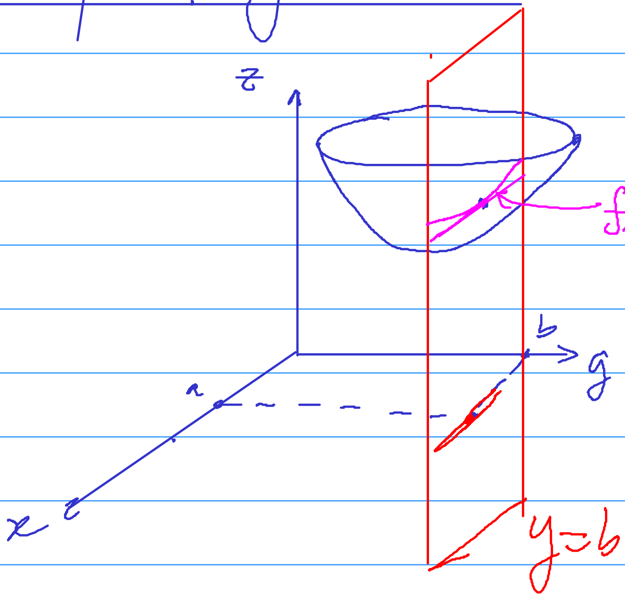
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$ desde que o limite exista.

A derivada parcial de f em relação a y no ponto (a,b) é

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h},$$

desde que o limite exista.

Interpretação geométrica



$f_x(a,b)$ é o coeficiente ângular da reta tangente no pt $(a,b,f(a,b))$ da curva C obtida pelo corte do gráfico de f pelo plano $y = b$.

Temos uma interpretação similar para $f_y(a,b)$.

Observação

A existência das derivadas parciais em um ponto não implica a continuidade da função no ponto.

Exemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vimos na Aula 13 que f não é contínua em (0,0).

Mas $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0 = f_x(0,0)$,

e $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0 = f_y(0,0)$.

Então as derivadas parciais $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem.

Observação

Para uma função de n-variaveis $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ temos n derivadas parciais

$$f_{x_i} \quad \left(\text{ou } \frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Em um ponto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ no interior do domínio de f

posição i

$$f_{x_i}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

desde que o limite exista.

(Fixamos $x_j = a_j$, $j = 1 \dots n$, $j \neq i$ e derivamos em relação a x_i.)

Aula 8 de Consolidação: Limites e Continuidade

- **Limite:** Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D aberto, e $p_0 = (a,b) \in D \cup \partial D$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$ significa $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que:

$$\underbrace{(x,y) \in D \cap B(p_0,\delta)\backslash\{p_0\}}_{(x,y)\in D \ \ e \ \ 0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta} \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$ dizemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe

- **Continuidade:** Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $p_0 = (a,b) \in D$.
f contínua em p_0 significa $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que:

$$\underbrace{(x,y) \in D \cap B(p_0,\delta)}_{(x,y)\in D \ \ e \ \ \|(x,y)-(a,b)\|<\delta} \Longrightarrow |f(x,y) - f(p_0)| < \varepsilon$$

Relação entre Continuidade e Limite:
$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; D_f pode ser "complicado".

1. se $p_0 = (a,b) \in D_f$ é **ponto de acumulação** de D_f então: f é contínua em p_0, quando $\lim\limits_{(x,y)\to p_0} f(x,y) = f(p_0)$.

   - $p \in \mathbb{R}^2$ é um **ponto de acumulação (p.a.) de** $A \subset \mathbb{R}^2$ se

   $$\forall\, \delta > 0\ \exists\, (x,y) \in A \cap B(p,\delta) \setminus \{p\}\,.$$

   Exemplo: Se A é aberto, o conjunto dos p.a. de A é $A \cup \partial A$.

   - $p \in \mathbb{R}^2$ **não** é um **ponto de acumulação de** A se

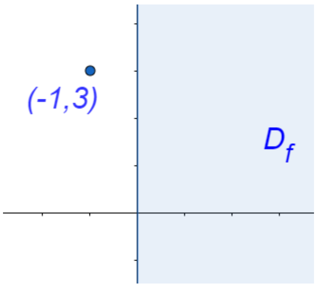
   $$\exists\, \delta > 0\ \ A \cap B(p,\delta) = \{p\}\,.$$

2. se $p_0 \in D_f$ **não é ponto de acumulação** (ponto isolado) de D_f, então: f é sempre contínua em p_0.

De fato, como $\exists \delta > 0; D_f \cap B(p_0,\delta) = \{p_0\}$ então $\forall \varepsilon > 0$ é válido: $(x,y) \in D_f \cap B(p_0,\delta) \implies |f(x,y) - f(p_0)| = 0 < \varepsilon$.

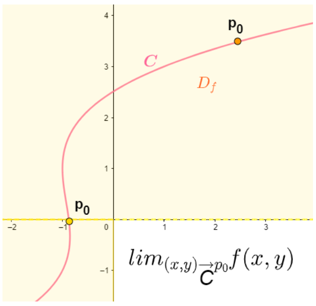
Exemplo: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x} & se \quad x > 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \\ 2 & se \quad (x,y) = (-1,3). \end{cases}$

Temos que $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \{(-1, 3)\}$



Certamente f é contínua em $(-1, 3)$. Nos demais pontos de D_f é preciso analisar a continuidade: exercício!

Lembrete: No "Teste dos dois caminhos": lembrar que os caminhos devem passar pelo ponto p_0 e estarem contidos, exceto pelo ponto p_0, no domínio da função.



Questão 1: *Determine se os limites existem, se sim, calcule.*

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{-y/x}$

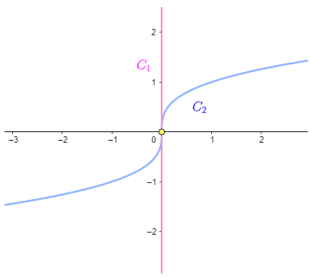
(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} (y - 1)e^{\cos(y/x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} (y - 1)e^{\cos(x^2+y^2)} \cosh(x + \ln(1 + x^2 + y^2))$

Solução:

(a) Escrevemos $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$.

Temos $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Considere os caminhos $C_1 : x = 0$ e $C_2 : x = y^3$.



Ao longo do caminho C_1, temos $f(0, y) = 0$. Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} f(x, y) = 0.$$

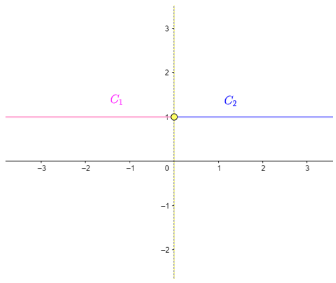
Ao longo do caminho C_2, temos $f(y^3, y) = 1/2$. Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} f(x, y) = \frac{1}{2}.$$

Concluímos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe.

(b) Escrevemos $f(x, y) = xe^{-y/x}$.

Temos que $D_f = \{(x, y) : x \neq 0\}$. Considere os caminhos $C_1 : y = 1, x \leq 0$ e $C_2 : y = 1, x \geq 0$



Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ C_2}} xe^{-y/x} = \lim_{x\to 0^+} xe^{-1/x} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ C_1}} xe^{-\frac{y}{x}} = \lim_{x\to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = -\infty.$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{-y/x}$ não existe.

(c) Escrevemos $f(x, y) = (y - 1)e^{\cos(y/x)}$, e

$$g(x, y) = (y - 1), \quad h(x, y) = e^{\cos(y/x)}.$$

Temos $f = gh$ com $D_f = D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, e $D_g = \mathbb{R}^2$. Observe que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} (y - 1) = 0,$$

e

$$e^{-1} \leq h(x, y) = e^{\cos(y/x)} \leq e, \forall (x, y) \in D_f = D_h.$$

Portanto, pelo Teorema do Anulamento, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} (y-1)e^{\cos(y/x)} = 0.$$

(d) A função

$$f(x,y) = (y-1)e^{\cos(x^2+y^2)} \cosh(x + \ln(1 + x^2 + y^2))$$

é definida e contínua em $\mathbb{R}^2$. Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1) = 0$.

Questão 2. *Em quais pontos (x,y) no plano a função g dada por $g(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ é contínua?*

Solução: Temos que

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}.$$

A função g pode ser decomposta como: $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, com

$$g_1(x,y) = xy, \qquad g_2(u) = \frac{1}{u}, \qquad g_3(t) = \operatorname{sen}(t):$$

As funções g_1, g_2, g_3 são contínuas no seus domínios: $D_{g_1} = \mathbb{R}^2$, $D_{g_2} = \mathbb{R} - \{0\}$ e $D_{g_3} = \mathbb{R}$. Portanto, g é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Questão 3. *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \textit{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine os pontos em que f é contínua.

Solução: Temos que $D_f = \mathbb{R}^2$.

Seja $(a,b) \neq (0,0)$. Em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ a função f coincide com uma função racional cujo domínio é $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Portanto, f é contínua em (a,b).

Seja $(a,b) = (0,0)$. Para determinar se f é contínua em $(0,0)$, precisamos verificar se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Para $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} = x\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ e

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1, \qquad \forall (x,y) \neq (0,0),$$

podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Logo, f é contínua no ponto $(a,b) = (0,0)$ e portanto em $\mathbb{R}^2$.

Aula 16

Derivadas parciais de segunda ordem

Aula de hoje: $\begin{cases} \cdot \text{ Derivadas parciais de ordem dois} \\ \cdot \text{ Teorema das derivadas mistas} \end{cases}$

"Entrada" Seja $f(x,y,z) = x^2 + \ln(1+x^2+y^2) + z^2$
Calcule as derivadas parciais de f.

Solução: f é definida em $D = \mathbb{R}^3$. Temos $g(x) = f(x,y,z)$, para y, z fixos, é diferenciável. Então $g'(x)$ existe.
Portanto $f_x(x,y,z) = g'(x)$ existe e

$$f_x(x,y,z) = 2x + \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

De maneira análoga,

$$f_y(x,y,z) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

e

$$f_z(x,y,z) = 2z.$$

Definição:

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aberto. As derivadas parciais

$f_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, são chamadas

derivadas parciais de primeira ordem.

Para funções de duas variáveis, as derivadas parciais de primeira ordem f_x; f_y são funções em (x,y).
Podemos derivá-las de novo (ou seja, derivar f duas vezes)
Derivando $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ em relação a x e a y

obtemos as derivadas parciais de f de segunda ordem

denotadas por:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemplo $\quad f(x,y) = x\cos y + y e^x \qquad D = \mathbb{R}^2$

Derivadas parciais de primeira ordem

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \cos y + y e^x \\ f_y(x,y) = -x \operatorname{sen} y + e^x \end{cases}$$

Derivadas parciais de segunda ordem

$$f_{xx}(x,y) = y e^x$$

$$f_{xy}(x,y) = -\operatorname{sen} y + e^x$$

$$f_{yx}(x,y) = -\operatorname{sen} y + e^x$$

$$f_{yy}(x,y) = -x\cos y$$

Observe que, neste caso, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

Será que isso vale para todo f?

Exemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vimos na Aula 14 que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

As derivadas parciais de primeira ordem existem em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

No ponto $(0,0)$, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Portanto $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem e $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

Temos

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1 = f_{xy}(0,0)$$

$$\lim_{h} \frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1 = f_{yx}(0,0)$$

Então, neste caso, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Exercício. $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ são contínuas em $(0,0)$?

Teorema das derivadas mistas (TDM)

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se todas as suas derivadas de primeira e segunda ordem de f existem num um aberto que contém (a,b) e são contínuas em (a,b), então

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

Exemplo

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$$

As derivadas parciais de primeira e segunda ordem existem e são contínuas, então

$$f_x(x,y) = y\cos(xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = \cos(xy) - xy\,\operatorname{sen}(xy) \overset{TDM}{=} f_{yx}(x,y)$$

Observação O Teorema vale para $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existem em um aberto que contém $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ e são contínuas em P_0, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0) \qquad (i,j = 1, \dots, n)$$

Para uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, temos n^2 derivadas parciais de ordem dois (quando existem) em um ponto $p_0 \in D$.

Organizamos tais derivadas em uma matriz $n \times n$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

chamada Hessiana de f. Quando f satisfaz as condições do Teorema das derivadas mistas, a matriz H é simétrica.

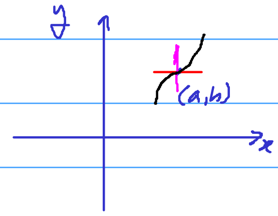
Aula 17

Diferenciabilidade

Aula de hoje:
- Diferenciabilidade de uma função de n-variáveis
- Derivada de uma função de n-variáveis
- Diferenciabilidade $\Rightarrow$ continuidade
- Diferenciabilidade $\Rightarrow$ existência das derivadas parciais (de primeira ordem)
- Existência e continuidade das derivadas parciais $\Rightarrow$ diferenciabilidade

Por definição, para $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a,b) no interior de D,

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$



$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Ou seja $f_x(a,b) = g'(0)$ onde $g(t) = f(a+t, b)$

e $f_y(a,b) = k'(0)$ onde $k(t) = f(a, b+t)$.

Queremos uma noção da "derivada" de f no pt (a,b) que fornecerá, em particular, informações sobre $g'(0)$ para todo $g(t) = f(x(t), y(t))$ onde $t \to (x(t), y(t))$ é um caminho em D com $(x(0), y(0)) = (a,b)$

Definição Uma aplicação $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se

$$L(au+bv) = a\,L(u) + b\,L(v)$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ e todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Escolhando as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ a aplicação L pode ser representada por uma matriz $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou seja para todo $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ temos

$$L(u) = A \cdot u = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Para $n = 1$

Uma matriz 1×1 é um escalar

$$A = (a) = a.$$

Uma aplicação $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear se

$$L(u) = (a) \cdot u = a.u$$

Para $n > 1$ e $m = 1$

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A = (a_1, \dots, a_n)$ é uma matriz $1 \times n$, ou seja um vetor.

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável.

A função f é diferenciável em $t_0 \in I$ se, e somente se,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = a \overset{= f'(t_0)}{} \quad \text{(existe)}$$

f é diferenciável em t_0 $\iff \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - a\right) = 0$

$$\iff \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)-ah}{h}\right| = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{|f(t_0+h)-f(t_0)-a.h|}{|h|} = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{|f(t_0+h)-f(t_0)-L(h)|}{|h|} = 0$$

onde $L(h) = a.h$ (aplicação linear)

Observe que se f é diferenciável em t_0, podemos aproximar $f(t)$ para $t = t_0+h$ perto de t_0 por

$$f(t) \simeq f(t_0) + L(t-t_0)$$

$$\left(f(t) \simeq f(t_0) + f'(t_0).(t-t_0) \right)$$

<u>Exemplo</u> $\quad f(t) = e^t \qquad t_0 = 2$

$f'(2) = e^2 \qquad f'(2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(2).h = e^2.h$$

<u>Definição</u> Seja um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Dizemos que f é diferenciável em $P_0 \in D$ se existe uma aplicação linear

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(P_0+h) - f(P_0) - L(h)|}{\|h\|} = 0$$

$(P_1+h_1, P_2+h_2, P_n+h_n)$

onde $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$

A aplicação linear L é chamada derivada de f em P_0.

Dizemos que f é diferenciável em D se é diferenciável em todo ponto $P_0 \in D$.

<u>Teorema</u>: Seja D um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Se f é diferenciável em $P_0 \in D$, então
(1) f é contínua em P_0
(2) as derivadas parciais de f existem em P_0
(3) a derivada de f em P_0 é a aplicação linear $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por
$L(h) = \nabla f(P_0) \cdot h$ onde

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right).$$

$\nabla f(P_0)$ é chamado gradiente de f em P_0.
(é uma matriz $1 \times n$, ou seja um vetor).

$$\left[L(h) = \nabla f(P_0) \cdot h = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \cdot h_n \right]$$

Demonstração

- (1) Seja $\varepsilon > 0$. Como f é diferenciável em P_0, $\exists \delta > 0$, tal que para $\|h\| < \delta$, temos

$$\frac{|f(P_0+h) - f(P_0) - L(h)|}{\|h\|} < \varepsilon$$

Portanto para $\|h\| < \delta$, $|f(P_0+h) - f(P_0) - L(h)| < \varepsilon \|h\|$

Usando o fato que $||a| - |b|| \leq |a-b|$ para $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$|f(P_0+h) - f(P_0)| - |L(h)| \leq \Big| |f(P_0+h) - f(P_0)| - |L(h)| \Big|$$

$$\leq |f(P_0+h) - f(P_0) - L(h)|$$

$$< \varepsilon \|h\|$$

logo

$$|f(P_0+h) - f(P_0)| < \varepsilon \|h\| + |L(h)|$$

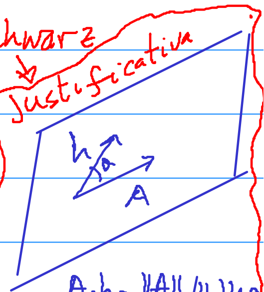
Escrevendo $L(h) = A \cdot h$ onde $A = (a_1, \ldots, a_n)$

temos

desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|L(h)| = |A \cdot h| \leq \|A\| \cdot \|h\|$$

Justificativa



$A \cdot h = \|A\| \|h\| \cos\theta$

$|A \cdot h| = \|A\| \|h\| |\cos\theta|$

$\leq \|A\| \|h\|$

Portanto

$$|f(P_0+h) - f(P_0)| < \varepsilon \|h\| + \|A\| \cdot \|h\|$$

$$< (\varepsilon + \|A\|) \|h\|$$

Seja $\delta_1 = \min\left(\delta, \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + \|A\|}\right)$

Então para $\|h\| < \delta_1$, temos $(\varepsilon + \|A\|)\|h\| \leq (\varepsilon + \|A\|) \cdot \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + \|A\|} = \varepsilon$

logo, para $\|h\| < \delta_1$, temos

$$|f(p_0 + h) - f(p_0)| < \varepsilon,$$

ou seja $\lim\limits_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$.

• (2) e (3) Temos $L(h) = A \cdot h = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n$.

Para $h = (h_1, 0, 0, \ldots, 0)$, temos $L(h) = a_1 h_1$

e $$\lim_{h \to 0} \frac{|f(p_0+h) - f(p_0) - L(h)|}{\|h\|} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{|f(p_0+h) - f(p_0) - a_1 h_1|}{|h_1|}$$

$$= \lim_{h_1 \to 0} \left| \frac{f(p_0+h) - f(p_0)}{h_1} - a_1 \right| = 0$$

logo $$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(p_0+h) - f(p_0)}{h_1} = a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0).$$

De maneira análoga, se $h = (0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots 0)$
i-ésima coordenada

mostramos que

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$$

Portanto as derivadas parciais de f existem no ponto p_0 e a derivada de f em p_0 é representada pela matriz (vetor)

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right).$$ ∎

<u>Teorema</u> Seja D um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1..n$, existem e são contínuas em $p_0 \in D$, então a função f é diferenciável em P_0.

<u>Observações</u>

(1) A recíproca do teorema anterior não vale

<u>Exemplo</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$ mas f_x e f_y não contínuas em $(0,0)$.

(2) A existência das derivadas parciais não garante a diferenciabilidade.

<u>Exemplo</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vimos na Aula 15 que as derivadas parciais de f existem no ponto $(0,0)$. Mas f não é contínua em $(0,0)$ (ver Aula 13) portanto não é diferenciável em $(0,0)$.

Aula 9 de Consolidação: Derivadas Parciais de ordem superior

Questão 1: *Considere a função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y,z) = xyz^2 + \sin(x^2z)$. *Encontre a função* f_{xzy}.

Solução:

Temos que f possui derivadas parciais de todas as ordens contínuas, pois sua expressão envolve funções polinomiais, trigonométricas e composição delas que já sabemos de Cálculo 1 que elas são deriváveis de todas as ordens contínuas em seus domínios. Então,

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= yz^2 + 2xz\cos(x^2z), \\ f_{xz}(x,y,z) &= 2yz - 2xz\sin(x^2z)x^2 + 2x\cos(x^2z), \\ f_{xzy}(x,y,z) &= 2z. \end{aligned}$$

Podemos também usar o Teorema de Schwarz. Sabemos sabemos que $f_{xzy} = f_{yxz}$ e que

$$\begin{aligned} f_y(x,y,z) &= xz^2, \\ f_{yx}(x,y,z) &= z^2, \\ f_{yxz}(x,y,z) &= 2z. \end{aligned}$$

Questão 2: *Mostre que a função* $T(t,x) = e^{-4t}\text{sen}(2x)$ *satisfaz a equação do calor* $T_t = T_{xx}$.

Solução: Temos

$$\begin{aligned} T_t(x,y) &= -4e^{-4t}\text{sen}(2x), \\ T_x(x,y) &= 2e^{-4t}\cos(2x), \\ T_{xx}(x,y) &= -4e^{-4t}\text{sen}(2x). \end{aligned}$$

Portanto, $T_t = T_{xx}$.

Questão 3: *Seja* $w = e^x + x\ln(1+y^2+x^4) + \cos(y + e^{\sqrt{1+x^2y^2}})$. *É verdade que* $w_{xy} = w_{yx}$*?*

Solução: Temos que $D_w = \mathbb{R}^2$. A função w possui derivadas parciais de todas ordens contínuas em $\mathbb{R}^2$. Segue, pelo Teorema das derivadas mistas (Teorema de Schwarz), que $w_{xy} = w_{yx}$.

Questão 4: *Seja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Encontre as funções derivadas parciais f_x e f_y.

(b) As funções f_x e f_y estão definidas em $(0,0)$? Se sim, elas são contínuas em $(0,0)$?

Solução:

(a)Temos que $D_f = \mathbb{R}^2$.

Para $(a,b) \neq (0,0)$ podemos encontrar as derivadas parciais f_x e f_y através das regras de derivação (f é uma função racional em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$).

Para $(a,b) = (0,0)$, devemos encontrar as derivadas parciais através da definição. Temos,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\left(\frac{h^3}{h^2}\right) - 0}{h} = 1.$$

Portanto $f_x(0,0)$ existe e é igual a 1.

De maneira análoga,

$$\lim_{\substack{k \to 0 \\ k \neq 0}} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{\substack{k \to 0 \\ k \neq 0}} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = 0.$$

Portanto $f_y(0,0)$ existe e é igual a 0. Segue que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Note que $D_{f_x} = D_{f_y} = \mathbb{R}^2$.

(b) As funções f_x e f_y são continuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Para mostrar que f_x é contínua em $(0,0)$ precisamos verificar se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 1.$$

Temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \qquad (*)$$

Considerando os caminhos $C_1 : x = 0$ e $C_2 : x = y$ obtemos:

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0)\\ C_1}} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0, \qquad (\diamond)$
- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0)\\ C_2}} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2(4y^2)}{4y^4} = 1.$

Portanto o limite em $(*)$ não existe e f_x não é contínua em $(0,0)$. Também, apenas por $(\diamond)$ podemos concluir que f_x não é contínua em $(0,0)$, pois caso o limite existisse seria diferente de $1 = f_x(0,0)$.

Para mostrar que f_y é contínua em $(0,0)$ precisamos verificar se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0) = 0.$$

Temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2}. \qquad (**)$$

Considerando os caminhos $C_1 : x = 0$ e $C_2 : x = y$ obtemos:

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0)\\ C_1}} -\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$
- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(0,0)\\ C_2}} -\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{y\to 0} -\frac{2y^4}{4y^4} = -\frac{1}{2}. \qquad (\diamond\diamond)$

Portanto o limite em $(**)$ não existe e f_y não é contínua em $(0,0)$. Também, apenas por $(\diamond\diamond)$ podemos concluir que f_y não é contínua em $(0,0)$, pois caso o limite existisse seria diferente de $0 = f_y(0,0)$.

Aula 18

Regra da cadeia

Aula de hoje $\begin{cases} \cdot \text{ Regra da cadeia para funções de várias variáveis} \\ \cdot \text{ Derivação implícita} \end{cases}$

"Entrada" (exercício) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calcule $\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[C_a]{} (0,0)} f(x,y)$, onde C_a é o caminho $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$,

e $\lim\limits_{(x,y) \xrightarrow[C_2]{} (0,0)} f(x,y)$ onde C_2 é o caminho $x = y^2$.

Para funções de uma variável diferenciáveis

$$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ com } g(J) \subset I$$

Então $f \circ g : J \xrightarrow{g} I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ($f \circ g$)

$(f \circ g)(t) = f(g(t))$ é diferenciável e

$$\boxed{(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)}$$

Regra da Cadeia

Para uma função de n-variáveis $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (D aberto) diferenciável, a derivada de f em um ponto p é uma aplicação linear $L_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ representada por uma matriz $1 \times n$ (neste caso é um vetor)

$$L_p = \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

ou seja, $L_p(v) = \nabla f(p) \cdot v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

Denotamos também L_p por $Df(p)$. Então
$$Df(p) = \nabla f(p).$$

Seja $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (U aberto) $(m \geq 1)$
com
$$g(u_1, \dots, u_m) = (g_1(u_1, \dots, u_m), g_2(u_1, \dots, u_m), \dots, g_n(u_1, \dots, u_m))$$

Dizemos que g é diferenciável em U se as funções g_i, $i = 1, \dots, n$, são diferenciáveis em U.

A derivada de g em um ponto $q \in U$ é a aplicação linear
$$Dg(q) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

representada pela matiz $n \times m$

$$Dg(q) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(q) & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(q) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m}(q) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(q) & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(q) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m}(q) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1}(q) & \frac{\partial g_n}{\partial u_2}(q) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_m}(q) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \nabla g_1 \\ \leftarrow \nabla g_2 \\ \\ \leftarrow \nabla g_n \end{array} \end{array}$$

Teorema (Regra da Cadeia)

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto D de $\mathbb{R}^n$ e seja $g: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no aberto U de $\mathbb{R}^n$ com $g(U) \subset D$. Então

$$f \circ g: \quad U \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

com $(f \circ g)(q) = f(g(q))$

é diferenciável em U e

$$\boxed{D(f\circ g)(q) = Df(g(q)) \cdot Dg(q)} \qquad \text{(Regra da cadeia)}$$

Observação: A fórmula da regra da cadeia é a mesma para funções de uma variável só que tem que interpretar as derivadas como matrizes.

Casos particulares

Caso 1 $n=2$, $m=1$

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$g: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{com } g(I) \subset D$$

f, g diferenciáveis

Escrevemos $g(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$

e $w(t) = (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(x(t), y(t))$.

Então w é diferenciável, e pelo Teorema da regra da cadeia

$$w'(t) = \frac{dw(t)}{dt} = Df(g(t)) \cdot Dg(t)$$

Temos $Df(g(t)) = \nabla f(g(t))$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))\right)$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $Dg(t)$ é uma matriz 2×1

$$Dg(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

logo

$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

Exemplo $f(x,y) = x^2 + y^3$

$g(t) = (t^2, t) = (x(t), y(t))$ são diferenciáveis

Usando a regra da cadeia para $w(t) = f(g(t))$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

logo $\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) = 2t^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) = 3t^2$.

Temos também $\frac{dx}{dt} = 2t$ e $\frac{dy}{dt} = 1$

Portanto

$$\frac{dw}{dt} = (2t^2)\cdot(2t) + (3t^2)\cdot 1 = 4t^3 + 3t^2.$$

Observe que, neste caso,

$$w(t) = f(g(t)) = f(t^2, t) = t^4 + t^3$$

$$\Rightarrow w'(t) = 4t^3 + 3t^2.$$

Caso 2 $n=2$, $m=2$

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciáveis

$g: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $g(U) \subset D$

Escrevemos $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$

Então $w = f\circ g$ é diferenciável e

$$Dw(u,v) = D(f\circ g)(u,v) = \nabla f(g(u,v)) \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \nabla g_1 \\ \leftarrow \nabla g_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g_2}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g_1}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g_2}{\partial v} \end{cases}}$$

Exemplo $f(x,y) = xy + e^x$ diferenciáveis

$g(u,v) = (u+v, u-v)$.

Vamos usar a regra da cadeia para calcular Dw, onde $w(u,v) = (f \circ g)(u,v)$.

Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = y + e^x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x$

Então $\nabla f(x,y) = (y + e^x, x)$

$\nabla f(g(u,v)) = \nabla f(u+v, u-v) = (u - v + e^{u+v}, u+v)$

A derivada de g é

$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

logo $Dw(u,v) = \left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right)$ é dada por

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right) = (u - v + e^{u+v}, u+v) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right) = \left(2u + e^{u+v}, -2v + e^{u+v}\right)}$$

Outros caso

Exercício: expresse $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ usando a regra da cadeia

para $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

$x = ue^v \operatorname{sen} u$, $y = ue^v \cos u$, $z = ue^v$

$w(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

Derivação implícita

Exemplo 1 Considere a função $F(x,y,z) = (x^2+1)z + y$

Para (x,y,z) tal que $F(x,y,z) = c$, c = constante

$$(x^2+1)z + y = c \iff (x^2+1)z = c - y$$

$$\iff z = \frac{c-y}{x^2+1}$$

(ou seja a superfície de nível $F=c$ é gráfico da função $z = f(x,y) = \frac{c-y}{x^2+1}$)

Podemos usar a regra da cadeia para calcular as derivadas parciais de f.

Temos $w(x,y) = F(x,y,f(x,y)) = c \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Daí

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} \end{aligned}}$$

Formulas das derivadas implícitas

No exemplo anterior, $F(x,y,z)=(x^2+1)z+y$ e para $c=0$ o ponto $P_0=(1,-2,1)$ satisfaz $F(P_0)=0$.

Temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=x^2+1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(1,-2,1)=2\neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=2xz \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,-2,1)=2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1,-2,1)=1$$

Então, sabendo que $F(x,y,z)=0$ define z como função de x e y ao redor de $P_0=(1,-2,1)$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,-2,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,-2,1)}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,-2,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,-2,1)}=-\frac{1}{2}$$

Calculamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $(1,-2)$ sem precisar saber a expressão de z como função de x,y !

Exemplo 2

Encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(1,1,1)$ sabendo que

$$xy + z^3 x - 2yz = 0$$

define z como uma função de duas variáveis independentes e que as derivadas parciais existem.

Solução Observe que neste exemplo, a expressão explícita de z como função de x,y é complicada. Mas pelas formulas da derivação implícita não precisamos da expressão de z para calcular suas derivadas parciais!

Escrevendo $F(x,y,z) = xy + z^3 x - 2yz$

temos $F(1,1,1) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = y + z^3 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = x - 2z \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 x - 2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 1 \neq 0$$

Logo

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = 1. \qquad \blacksquare$$

Resumimos as contas anteriores no seguinte resultado.

Teorema (Fórmula das derivadas implícitas)

Suponha que $F(x,y,z)$ é diferenciável e que a equação

$$F(x,y,z)=c$$

defina z como função diferenciável de (x,y) em um ponto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ onde $F(P_0)=c$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\neq 0$. Então

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

Observação

Para $F(x,y)=0$ e sobre as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos

$$\frac{dy}{dx}(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Aula 19

Derivadas direcionais, vetor gradiente plano tangente

Conteúdo da aula
- Derivadas direcionais e suas propriedades
- Interpretação geométrica do vetor gradiente
- Plano tangente de uma superfície de nível

"Entrada" Seja $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + e^{x+y}$.

(a) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$

(b) Encontre $\frac{dy}{dx}$ no ponto $(0,0)$ sabendo que $f(x,y) = 1$ define y como uma função de x e que a derivada existe.

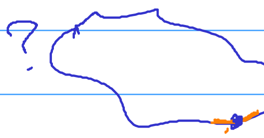
Solução

f é definida em $D = \mathbb{R}^2$ e é diferenciável (as derivadas parciais existem e são contínuas)

(a)
$$Df(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$
$$= \left(y_0 \cos(x_0 y_0) + e^{x_0+y_0},\ x_0 \cos(x_0 y_0) + e^{x_0+y_0}\right)$$

$$\boxed{Df(0,0) = (1, 1)}$$

?



$f(x,y)=1$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(0) = -\frac{1}{1} = -1$$

$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow y = y(x)$, x perto de x_0
$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = I$

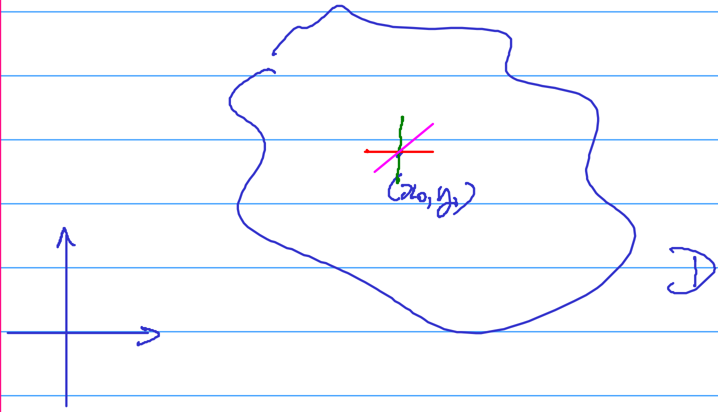
$$f(x, y(x)) = 1, \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Derivadas direcionais de funções de duas variáveis

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ D aberto

Seja (x_0, y_0) um ponto em D



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Se $\gamma(t) = (x_0 + t, y_0)$,

$$= (x_0, y_0) + t(1,0)$$

$$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

é o segmento da reta por (x_0, y_0) e paralela a $(1,0)$

temos $f(\gamma(t)) = f(x_0 + t, y_0)$, uma função de uma variável t

Temos

$$\left(f(\gamma(t))\right)'\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

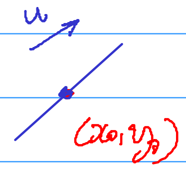
Da mesma maneira $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é a derivada de $f(x_0, y_0 + t)$ em $t = 0$

Definição

A derivada de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $u = (u_1, u_2)$ é o escalar (número)

$$D_u f(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

desde que o limite exista
(ou seja $D_u f(x_0,y_0)$ é derivada de $f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2)$ em $t=0$).



Teorema

Se $f(x,y)$ for diferenciável em (x_0, y_0) e $u = (u_1, u_2)$ um vetor unitário então

$$D_u f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, u_2$$

$$= \nabla f(x_0,y_0) \cdot u$$

$$= Df(x_0,y_0) \cdot u$$

$Df(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$u \to Df(x_0,y_0)u$

Demonstração

Seja $w(t) = f(x_0 + t u_1, y_0 + t u_2)$

Temos, por definição, $D_u f(x_0,y_0) = \frac{dw}{dt}(0)$

Pela regra da cadeia $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

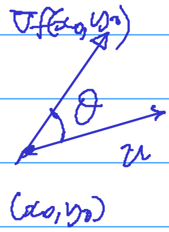
$$\Rightarrow \frac{dw}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, u_2 \,. \quad \blacksquare$$

Propriedades da derivada direcional

Temos $D_u f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)u_2$

$$= \nabla f(x_0,y_0) \cdot u$$

onde "$\cdot$" é o produto escalar.



Pelas propriedades do produto escalar: (u é unitário)

$$D_u f(x_0,y_0) = \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cdot \underbrace{\|u\|}_{=1} \cos\theta$$

$$= \|\nabla f(x_0,y_0)\| \cos\theta$$

Consequência Variando $\theta \in [0,2\pi[$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

- f cresce mais rapidamente no ponto (x_0,y_0) quando $\cos\theta = 1$, ou seja $\theta = 0$

$$\Rightarrow u = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$$

- f decresce mais rapidamente quando $\theta = \pi$ ($\cos\theta = -1$)

$$\Rightarrow u = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$$

- Se u é ortogonal ao gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$

$$D_u f(x_0,y_0) = 0.$$

Exemplo

Encontre as direções unitárias nas quais a função $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\operatorname{sen} y$ cresce e decresce mais rapidamente no ponto $P_0 = (1,0)$.

Solução f é definida e é diferenciável em $\mathbb{R}^2$

f cresce mais rapidamente no pt P_0 na direção

$$u = \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|}$$

Temos

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy + ye^{xy}\operatorname{sen} y,\ x^2 + xe^{xy}\operatorname{sen} y + e^{xy}\cos y\right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(1,0) = (0,2)$$

Logo f cresce mais rapidamente na direção $(0,1)$ e decresce mais rapidamente em P_0 na direção $(0,-1)$.

Interpretação geométrica do gradiente

Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável em D.

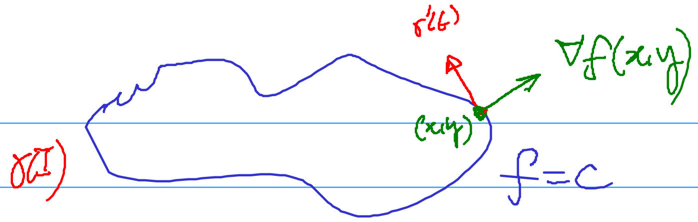
Considere a curva de nível $f(x,y) = c$

Exemplo $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, $c = 1$, a curva de nível

$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ é uma elipse,

que pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Temos $f(\gamma(t)) = 1$.



Suponha que a curva de nível $f(x,y)=c$ é parametrizada por

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I$$

ou seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ percore todos os pontos da curva $f(x,y)=c$, quando t varia em I

Temos $f(x(t), y(t)) = c$ para todo $t \in I$

logo $\frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = 0, \quad \forall t \in I$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x(t),y(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x(t),y(t)) \text{ é ortogonal a } \gamma'(t).$$

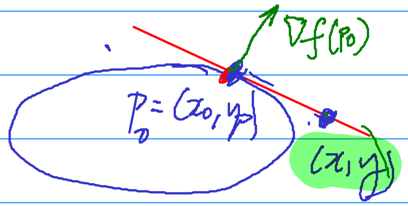
Teorema

Em todo ponto (x_0, y_0) no domínio de $f(x, y)$ (assumindo que ela é diferenciável) o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal (normal) a curva de nível de f por (x_0, y_0).

Exemplo

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2$

Encontre a reta tangente da elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ no ponto $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$



$X = (x, y)$ pertence a reta tangente em $P_0 = (x_0, y_0)$ se, e somente se $X - P_0 \perp \nabla f(P_0)$

Solução Observe $f\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

Temos $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{x}{2}, 2y\right) \Rightarrow \nabla f\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

Então a equação da reta tangente é

$$\nabla f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \cdot \left(x - \sqrt{2}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 + \sqrt{2}y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x + 2y - 2\sqrt{2} = 0}$$

Solução alternativa

Equação da reta $ax + by + d = 0$ onde (a, b) é um vetor normal (supondo o sistema de coord. é ortog.)

Então $(a, b) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y + d = 0$

Como $P_0 = \left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Substituindo obtemos d.

Funções de três variáveis

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{diferenciável}$$

Derivada de f em (x_0, y_0, z_0) : $Df(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$

Derivada direcional em $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ na direção unitária $u = (u_1, u_2, u_3)$

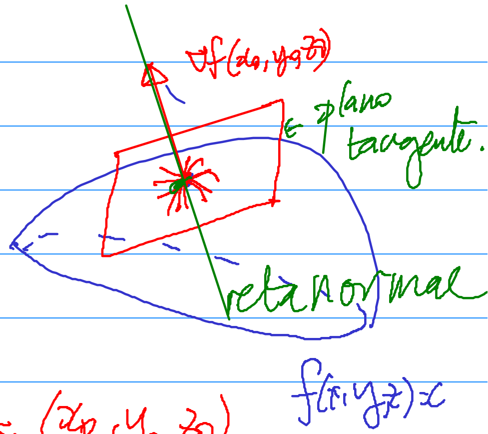
$$D_u f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot u.$$

$$= \| \nabla f(p_0) \| \cos\theta$$

θ = ângulo entre u e $\nabla f(p_0)$

Interpretação geométrica do gradiente

Considere a superfície de nível $f(x,y,z) = c$



Definição

O plano tangente no ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ na superfície de nível $f(x,y,z) = C$ é o plano P que passa por p_0 e é ortogonal $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.

A reta normal a superfície em p_0 é a reta por p_0 e paralela a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$

Aula 20

Teorema do valor médio, Fórmula de Taylor de ordem 1
(para funções de duas variáveis)

Conteúdo da aula
- Teorema do valor médio
- Propriedades dos polinômios
- Linearização: polinômio de Taylor de ordem 1

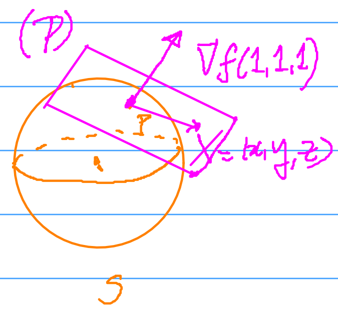
"Entrada":

① Seja S a superfície de nível $f(x,y,z)=3$
onde $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.
Obtenha a equação do plano tangente no ponto $p=(1,1,1)$ da superfície S.

② Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de $z=f(x,y)$ no ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, supondo que f é diferenciável em (x_0,y_0).

Solução

① $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=3\}$



Temos $\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$
$= (2x, 2y, 2z)$

Logo

$$\nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$$

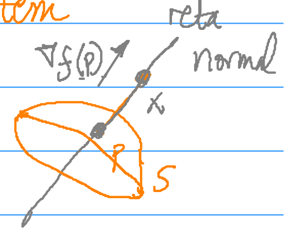
Um pt $X=(x,y,z)$ pertence ao plano (P) se e somente se
$\nabla f(1,1,1)\cdot(X-p) = 0 \iff (2,2,2)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$

$$\iff 2(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0$$

$$\iff \boxed{x+y+z-3=0}$$

a S emp
O plano tangente é a união de todas as retas tangentes no ponto p a curvas em S que passam por p.

A reta normal a superfície S no pt $p=(1,1,1)$ tem equações paramétricas



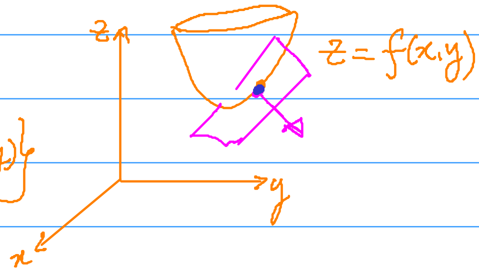
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$x - p \parallel \nabla f(p)$

$x = p + t\nabla f(p)$

(2) $z = f(x,y)$

$\text{gráfico}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$



$(x,y,z) \in \text{graf}(f) \Leftrightarrow z = f(x,y) \Leftrightarrow z - f(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow F(x,y,z) = 0$, onde $F(x,y,z) = z - f(x,y)$

logo o gráfico de f é a superfície de nível 0 de F

Portanto o plano tangente ao gráfico de f no pt $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ tem por equação

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - f(x_0,y_0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0,y_0)) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) - f_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)}$$

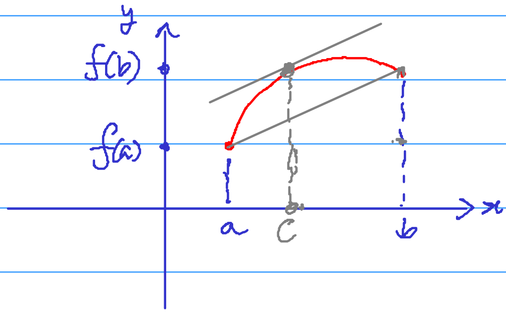
Exercício: use esta fórmula para resolver a questão (1)

Teorema do valor médio

Lembrando TVM para funções de uma variável

f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, então existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$$

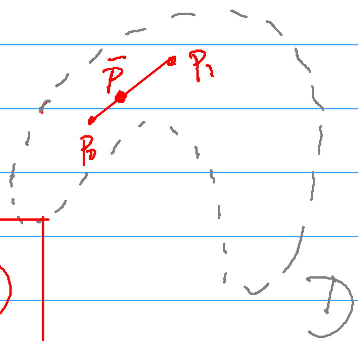


$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Teorema

Suponha que $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tenha derivadas parciais contínuas em um aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Sejam P_0 e P_1 dois pontos em D tais que o segmento P_0P_1 seja contido em D.

Então existe um ponto $\bar{P}$ no interior do segmento P_0P_1 tal que



$$\boxed{f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P})\cdot(P_1 - P_0)}$$

Demonstração

Considere a função de uma variável

$$g(t) = f(P_0 + t(P_1 - P_0)), \quad 0 \le t \le 1.$$

$$[0,1] \xrightarrow{\gamma} D \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\gamma(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

A função é contínua em $[0,1]$ e é diferenciável em $]0,1[$. Pelo TVM para fcts de uma variável, existe $\bar{t} \in]0,1[$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\bar{t}) \cdot (1-0)$$

Temos $g(1) = f(P_1)$, $g(0) = f(P_0)$

Pela regra da cadeia

$$g'(t) = \nabla f(P_0 + t(P_1 - P_0)) \cdot (P_1 - P_0)$$

Como $\bar{t} \in]0,1[$, $\bar{P} = P_0 + \bar{t}(P_1 - P_0)$ é um ponto do interior de $\overline{P_1 P_0}$ e

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P}) \cdot (P_1 - P_0). \quad \boxtimes$$

Observação

Escrevendo $P_1 = (x,y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, a expressão $f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P}) \cdot (P_1 - P_0)$ torna-se

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(\bar{x},\bar{y}) \cdot (x - x_0) + f_y(\bar{x},\bar{y}) \cdot (y - y_0)$$

Os polinômios de Taylor

Um função polinomial (ou polinômio) de grau n de duas variáveis $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é uma função da forma

$$P(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{11}y + a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + \cdots + \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, x^{n-k} y^k$$

onde a_{ij} são constantes reais.

Exemplo $\quad P(x,y) = 1 + x - y + xy + x^4y^2$ (grau 6)

Propriedades dos polinômios

- A soma de dois polinômios de grau $\leq n$ é um polinômio de grau $\leq n$.

  O produto de um polinômio de grau $\leq n$ por um escalar é um polinômio de grau $\leq n$.

  O conjunto dos polinômios de grau $\leq n$ é um espaço vetorial de dimensão $m = (n+1)(n+2)/2$.

  Podemos identificar o conjunto de tais polinômios com $\mathbb{R}^m$

$$P = (a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

É por isso que as funções polinomiais são úteis nas aplicações.

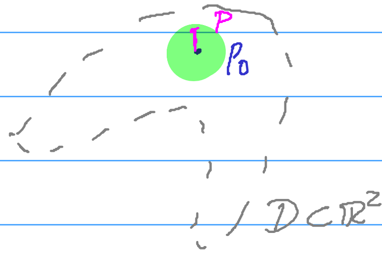
- P possui derivadas parciais contínuas de toda ordem.

Problema: existem funções que não são polinomiais:

exemplo $\quad f(x,y) = \cos(x) + e^{y} + \ln(1 + x^2 + y^2)$

Objetivo: Aproximar as funções não polinomiais em torno de um ponto por funções polinomiais e estimar o erro na aproximação

Linearização: Polinômio de Taylor de ordem 1



Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D aberto.
Suponha que as derivadas parciais de f de ordem ≤ 2 existem e são contínuas em D.

Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in D$. Como D é um aberto existe

$B(P_0, \varepsilon) \subset D$, $\quad B(P_0, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - P_0\| < \varepsilon\}$

Então $p = (x_0 + h, y_0 + k)$, com $\|(h,k)\| < \varepsilon$,
pertence a $B(P_0, \varepsilon)$, portanto $p \in D$

Logo o segmento $\overline{PP_0} \subset D$

Considere a função

$$g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Pela Fórmula de Taylor para g (Cálculo 1)

existe $\bar{t}$ em $]0,1[$ tal que

$$g(1) = g(0) + g'(0)\cdot(1-0) + \frac{g''(\bar{t})}{2!}(1-0)^2$$

Temos $g(0) = f(x_0, y_0)$

$g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$

Vamos calcular $g'(0)$ e $g''(t)$.

Temos $g'(t) = f_x(x_0+th, y_0+tk)\cdot h + f_y(x_0+th, y_0+tk)\cdot k$

e

$$g''(t) = \left(f_{xx}(x_0+th, y_0+tk)\cdot h + f_{xy}(x_0+th, y_0+tk)\cdot k\right) h +$$

$$\left(f_{yx}(x_0+th, y_0+tk) h + f_{yy}(x_0+th, y_0+tk) k\right)\cdot k$$

$$= f_{xx}(x_0+th, y_0+tk)\cdot h^2 + 2 f_{xy}(x_0+th, y_0+tk) hk +$$

$$f_{yy}(x_0+th, y_0+tk)\cdot k^2$$

Como $\bar{t} \in \,]0,1[$ o ponto $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_0+\bar{t}h, y_0+\bar{t}k)$ pertence ao interior do segmento PP_0

Consequentemente,

Teorema (Fórmula de Taylor de ordem 1)

Suponha que $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suas derivadas de ordem ≤ 2 sejam contínuas no aberto D.

Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ e seja $P = (x_0+h, y_0+k) \in B(P_0, \varepsilon) \subset D$.

Então

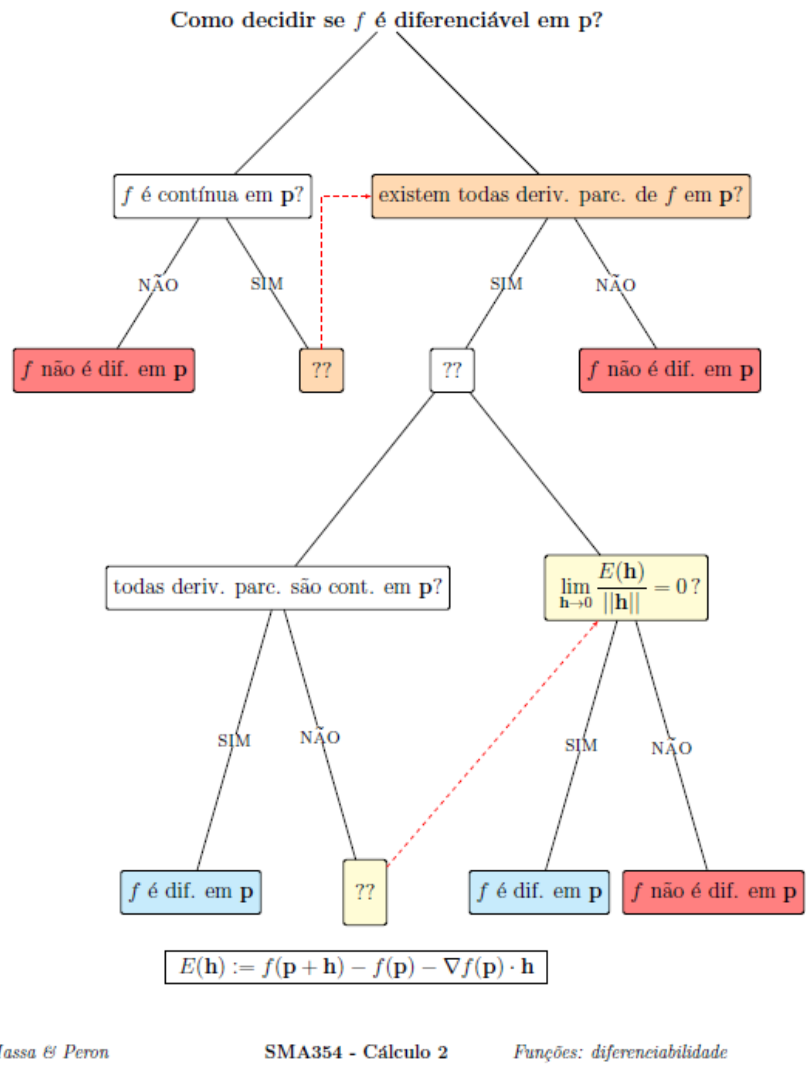
$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot h + f_y(x_0, y_0)\cdot k + E(h,k)$$

onde $E(h,k) = \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) h^2 + 2 f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) hk + f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) k^2\right)$

e $(\bar{x}, \bar{y})$ é um ponto no interior do segmento PP_0.

Aula 10 de Consolidação: Diferenciabilidade, Regra da Cadeia, Derivação Implícita e Derivada Direcional

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D aberto, $p \in D$.



Questão 1: Determine o conjunto D dos pontos em que a função f dada é diferenciável e encontre sua derivada em D.

(a) $f(x, y) = \cos(x) + xy$

(b) $f(x, y, z) = (x + \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2), e^{x+2y+3z})$

Solução: (a) Temos que $D_f = \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nos pontos onde existem as derivadas parciais de ordem 1 de f, temos $Df = \nabla f$. Agora, as derivadas parciais de 1^a ordem de f: $f_x(x,y) = -\sin(x)+y$, $f_y(x,y) = x$, são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e

$$Df(x,y) = \nabla f(x,y) = (-\sin(x)+y, x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Definindo $g_1(x,y,z) = x + \ln(1+x^2+y^2+z^2)$ e $g_2(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$, temos que $D_{g_1} = D_{g_2} = \mathbb{R}^3$ e então $D_f = \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Nos pontos onde existem as derivadas parciais de ordem 1 de f, temos

$$Df = \begin{pmatrix} \text{“}\nabla g_1\text{”} \\ \text{“}\nabla g_2\text{”} \end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

Temos que

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 1 + \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = e^{x+2y+3z}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2e^{x+2y+3z}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 3e^{x+2y+3z}$$

são contínuas em $\mathbb{R}^3$. Logo, g_1 e g_2 são diferenciáveis em $\mathbb{R}^3$ e portanto f também o é. Assim, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \text{“}\nabla g_1(x,y,z)\text{”} \\ \text{“}\nabla g_2(x,y,z)\text{”} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2} & \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2} \\ e^{x+2y+3z} & 2e^{x+2y+3z} & 3e^{x+2y+3z} \end{pmatrix}.$$

Questão 2. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) f **é contínua em** $(0,0)$**?** Sim - Aula de Consolidação 8.

(b) Encontre as funções derivadas parciais f_x **e** f_y**.** Aula 9:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f_y(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c) As funções f_x **e** f_y **estão definidas em** $(0,0)$**?** Sim. **Elas são contínuas em** $(0,0)$**?** Não - Aula 9

(d) A função f **é diferenciável em (0,0)?**

Solução: (d) Aqui precisamos usar a definição de diferenciabilidade pois as derivadas parciais existem mas não são continuas em $p = (a, b) = (0, 0)$. Para $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$, temos

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - L(h_1,h_2) \\ &= f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - \nabla f(a,b) \cdot (h_1,h_2) \\ &= f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - (f_x(a,b)h_1 + f_y(a,b)h_2) \\ &= f(h_1,h_2) - f(0,0) - f_x(0,0)h_1 - f_y(0,0)h_2 \\ &= \tfrac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 = -\tfrac{h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{E(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{-h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2}.$$

Como o limite acima não existe (para verificar basta tomar os caminhos $\gamma_1(t) = (0,t), t \in \mathbb{R}$ e $\gamma_2(t) = (t,t), t \in [0,\infty)$), segue que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Questão 3. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^6 + z^4$, onde $x = x(u, v) = uv$, $y = y(u, v) = v$, $z = z(u, v) = u - 2$, e $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Usando a Regra da Cadeia, calcule F_u e F_v.

Solução: Temos que $F(u, v) = f(g(u, v))$, onde $g(u, v) = (uv, v, u - 2)$, e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ são diferenciáveis. Portanto, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável e vale

$$(\overbrace{DF}^{\nabla F}(\cdot))_{1\times 2} = \left(\overbrace{Df}^{\nabla f}(g(\cdot))\right)_{1\times 3} \cdot (Dg(\cdot))_{3\times 2}$$

Temos

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,x) &= (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,x), \frac{\partial f}{\partial xy}(x,y,x), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,x)) \\ &= (2x, 6y^5, 4z^3). \end{aligned}$$

Logo

$$\nabla f(g(u, v)) = (2uv, 6v^5, 4(u - 2)^3).$$

Temos também

$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\tfrac{\partial F}{\partial u}(u,v), \tfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)) &= (2uv,\, 6v^5,\, 4(u-2)^3) \cdot \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (2uv^2 + 4(u-2)^3,\, 2u^2v + 6v^5).
\end{aligned}$$

Questão 4.

(a) Suponha que a equação $(x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$ defina implicitamente y como uma função diferenciável de x em torno do ponto $(0,1)$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $x = 0$.

(b) Suponha que a equação $xyz + x^3 + y^2 + z^3 = 4$ defina implicitamente y como uma função diferenciável de x e z em torno do ponto $(0,2,0)$. Calcule $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ no ponto $(x,z) = (0,0)$.

Solução: (a) Considere $F(x,y) = (x^2+y^2+2x)^2 - (x^2+y^2)$. Sabemos que $F(x,y) = 0$ defina implicitamente $y = y(x)$ como uma função diferenciável de x em torno do ponto $(0,1)$, ou seja $F(x,y(x)) = 0$ para todo x perto de 0. Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx}(x) = 0$$

ou seja

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}$$

para todo x perto de 0. Para $x = 0$, temos

$$\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -2.$$

(Observe que conseguimos calcular $\frac{dy}{dx}(0)$ sem conhecer a função $y = y(x)$ explicitamente!)

(b) Seguindo o mesmo raciocino do item (a) (ver as notas da Aula 18), e escrevendo $F(x,y,z) = xyz + x^3 + y^2 + z^3$, temos

$$\frac{\partial y}{\partial z}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(0,2,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,2,0)} = 0.$$

Questão 5. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente a distribuição de temperatura no plano xy: $T(x,y)$ é a temperatura no ponto (x,y), onde x e y são dados em cm e T em ^oC.

(a) Descreva a trajetória descrita por um ponto P que se desloca de maneira que a temperatura é sempre a mesma do ponto $A = (3,2)$.

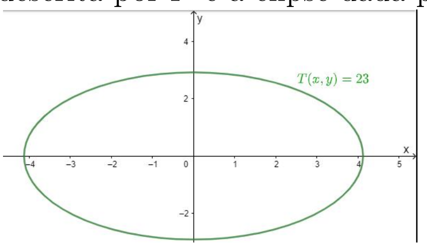
(b) Determine a direção e sentido que se deve tomar de modo que um ponto P se desloque, a partir de $(3,2)$, na direção de maior crescimento da temperatura.

(c) Calcule a derivada direcional de T em $(3,2)$ na direção de $(3,2)$ ao ponto $(0,1)$.

Solução: (a) A temperatura no ponto $A = (3,2)$ é igual a $T(3,2) = 40 - 3^2 - 2(2^2) = 23$. Os pontos no plano onde a temperatura é igual a 23 são os pontos que pertencem à curva de nível $T(x,y) = 23$, ou seja, à curva

$$40 - x^2 - 2y^2 = 23 \iff x^2 + 2y^2 = 17.$$

Portanto, a trajetória descrita por P é a elipse dada pela equação acima.



(b) A partir de $A = (3,2)$, a função T cresce mais rapidamente na direção e sentido do versor do vetor gradiente, i.e., ao longo do vetor $\nabla T(3,2)/||\nabla T(3,2)||$. Como $\nabla T(x,y) = (-2x, -4y)$, o vetor é

$$\frac{\nabla T(3,2)}{||\nabla T(3,2)||} = \frac{(-6,-8)}{\sqrt{36+64}} = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}).$$

(c) Temos $\vec{u} = (0,1) - (3,2) = (-3,-1)$. Logo,

$$D_{\vec{u}}T(3,2) = \nabla T(3,2) \cdot \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = (-6,-8) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{26\sqrt{10}}{10}.$$

(ou seja, a taxa de variação da temperatura a partir do ponto $(3,2)$ na direção do vetor $\vec{u}$ é de $\frac{26\sqrt{10}}{10} \approx 8,22^oC/cm.$)

Questão 6. Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto $(0, 1, 1)$.

Solução: Considere $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. O gráfico de f é a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$. Portanto um vetor normal ao gráfico de f no ponto $(0, 1, 1)$ é o vetor $\nabla F(0, 1, 1)$. Temos que

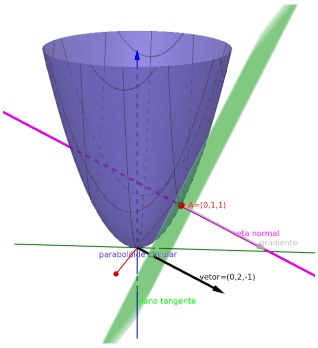
$$\nabla F(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), -1) = (2x, 2y, -1).$$

Portanto uma equação do plano tangente é:

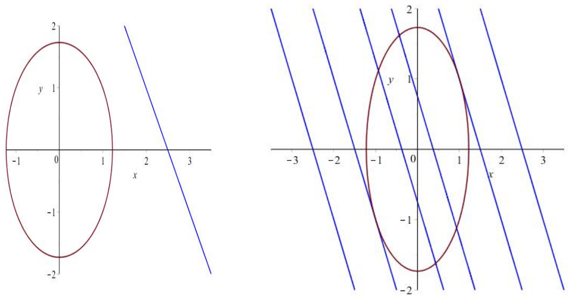
$$\begin{aligned} ((x, y, z) - (0, 1, 1)) \cdot \nabla F(0, 1, 1) = 0 \quad &\iff \quad (x, y - 1, z - 1) \cdot (0, 2, -1) = 0 \\ &\iff \quad 2y - z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Uma equação vetorial e as equações paramétricas da reta normal são:

$$\begin{aligned} (x, y, z) = (0, 1, 1) + t\nabla F(0, 1, 1), t \in \mathbb{R} \quad &\iff \quad (x, y, z) = (0, 1, 1) + t(0, 2, -1), t \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$



Questão 7. Considere a curva $2x^2 + y^2 = 3$. Encontre os pontos desta curva onde a reta tangente é paralela a $r : y + 2x = 5$.



Solução: A reta $r : y + 2x = 5$ tem vetor normal $\vec{v} = (2, 1)$. Portanto, um vetor diretor de r é $\vec{u} = (1, -2)$.

Considere $f(x,y) = 2x^2 + y^2$. Um vetor normal à curva de nível $f(x,y) = 3$ no ponto (a,b) pertencente à elipse é $\nabla f(a,b)$. Portanto, precisamos achar os pontos $P = (a,b)$ da elipse onde $\nabla f(a,b)$ é ortogonal ao vetor diretor $\vec{u} = (1,-2)$ da reta r. Mas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(a,b) \cdot \vec{u} = 0 \\ f(a,b) = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (4a, 2b) \cdot (1,-2) = 4a - 4b = 0 \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a = b \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{array} \right. \iff 2a^2 + a^2 = 3 \iff a = -1 \text{ ou } a = 1.$$

Concluímos que os pontos da elipse dada onde a reta tangente é paralela à reta r dada são $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Aula 21 — Polinômios de Taylor, estimativa do erro

Conteúdo da aula
- Polinômios de Taylor
- Estimativa do erro
- Interpretação geométrica da linearização

"Entrada" Suponha que $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suas derivadas parciais de ordem ≤ 2 existem e são contínuas no aberto D.
Dê a formula de Taylor de ordem 1 para f no ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$.

Para $p = (x, y) = (x_0 + h, y_0 + k) \in B(P_0, \varepsilon) \subset D$.

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\cdot k + E(h,k)$$

onde

$$E(h,k) = \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\,h^2 + 2 f_{xy}(\bar{x},\bar{y})\,hk + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\,k^2\right)$$

onde $(\bar{x},\bar{y})$ é um pt no interior de PP_0

Como $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, temos $h = x - x_0$, $k = y - y_0$.

logo

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}_{L(x,y)} + E(x-x_0, y-y_0)$$

Definição

A função $L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ é chamada **linearização de f** em torno de (x_0,y_0).

A função E é chamada **resto de Lagrange**.

Observação

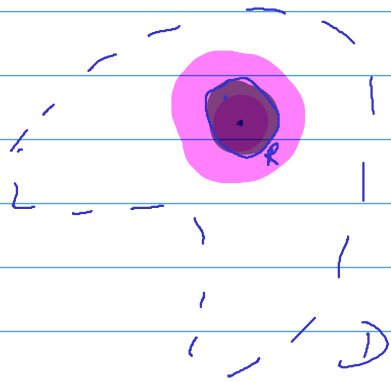
A função E mede o erro cometido ao aproximar $f(x,y)$ pelo polinômio de grau 1, $L(x,y)$ em torno do ponto $P_0=(x_0,y_0)$

Escrevemos $f(x,y) \simeq L(x,y)$.

Estimativa do erro

Seja R uma região compacta (fechada e limitada) que contém P_0 e que é contida em $B(P_0,\varepsilon)\subset D$

Seja $M>0$ tal que



$$|f_{xx}(x,y)|\leq M$$
$$|f_{xy}(x,y)|\leq M$$
$$|f_{yy}(x,y)|\leq M$$

para todo $(x,y)\in R$ (tal M existe pois R é compacta e f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} são contínuas).

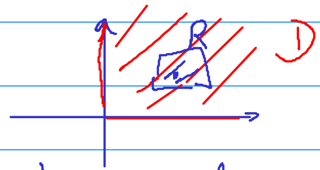
Então $P=(x,y)\in R$ tq $\overline{PP_0}\in R$, temos

$$|E(x,y)|=\left|\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(\bar{x},\bar{y})(x-x_0)^2+2f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\cdot(y-y_0)^2\right]\right|$$
$$\leq\frac{1}{2!}\left[|f_{xx}(\bar{x},\bar{y})|\,|x-x_0|^2+2\,|f_{xy}(\bar{x},\bar{y})|\,|x-x_0|\,|y-y_0|+|f_{yy}(\bar{x},\bar{y})|\,|y-y_0|^2\right]$$
$$\leq\frac{1}{2!}\left[M|x-x_0|^2+2M|x-x_0|\,|y-y_0|+M|y-y_0|^2\right]$$

$$\boxed{|E(x,y)| \leq \frac{1}{2!} M \left(|x-x_0| + |y-y_0|\right)^2}$$

Exemplo

Encontre a linearização $L(x,y)$ de $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$ no ponto $(1,1)$.
Avalie o erro que se comete na aproximação $f(x,y) \simeq L(x,y)$ se $|x-1| \leq 0.2$ e $|y-1| \leq 0.2$.



Solução

f possui derivadas parciais contínuas de toda ordem $D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ e $p_0 = (1,1) \in D$.
Então podemos aplicar a fórmula de Taylor de ordem 1.

Vamos calcular as derivadas parciais de ordem ≤ 2.

Temos

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{y}$$

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

Temos, em $p_0 = (x_0,y_0) = (1,1)$,
$f(1,1) = 0$,
$f_x(1,1) = 1$,
$f_y(1,1) = 1$.

Portanto, a linearização de f em torno de $(1,1)$ é

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0).(x-x_0) + f_y(x_0,y_0).(y-y_0)$$

$$= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$$

$$= 0 + 1(x-1) + 1.(y-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{L(x,y) = x+y-2}$$

Para (x,y) perto de $(1,1)$,

$$f(x,y) = L(x,y) + E(x,y).$$

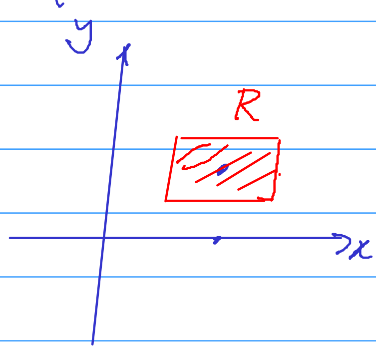
Ao aproximar $f(x,y) \simeq L(x,y)$

$$\ln(x)+\ln(y) \simeq x+y-2$$

cometemos um erro $E(x,y)$.

Vamos calcular um limitante superior do erro na região

$$R: \quad |x-1| \leq 0.2$$
$$|y-1| \leq 0.2$$



Observe que R é compacta.

$|x-1| \leq 0{,}2 \iff -0.2 \leq x-1 \leq 0.2$

$\iff 0.8 \leq x \leq 1.2 \iff \frac{1}{1.2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{0.8}$

Temos $f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{x^2}$, $f_{xy}(x,y)=0$, $f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$

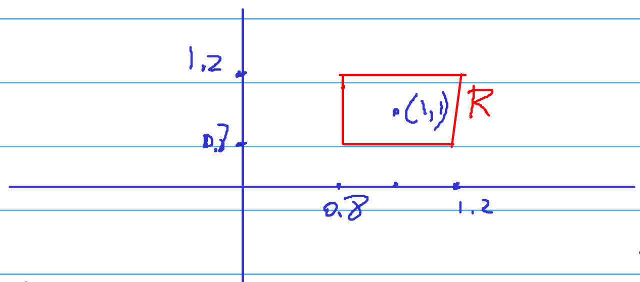
Então, na região R,

$|f_{xx}(x,y)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{0{,}8^2} = \frac{100}{64}$, $|f_{xy}(x,y)| = 0$,

e $|f_{yy}(x,y)| = \left|\frac{1}{y^2}\right| \leq \frac{100}{64}$.

Então $M = \frac{100}{64}$ é um limitante superior das derivadas parciais de ordem 2 na região R.

Logo
$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2!} M \left(|x-x_0| + |y-y_0|\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{2!}\frac{100}{64}\left(\underbrace{|x-1|}_{\leq 0.2} + \underbrace{|y-1|}_{\leq 0.2}\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{2}\frac{100}{64}(0.2+0.2)^2 = \frac{1}{8}.$$



$f(x,y) = \ln(x) + \ln(y) \simeq x + y - 2$ com erro (valor absoluto do) $\leq \frac{1}{8}$

Teorema (fórmula de Taylor de ordem n)

Suponha que $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suas derivadas até $n+1$ sejam contínuas na região aberta D. Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ e $P = (x, y) \in B(P_0, \varepsilon) \subset D$. Então

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]$$

$$+ \vdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^{n-1}(y-y_0) + \cdots \right.$$

$$\left. + n\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^{n-1} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0,y_0)(y-y_0)^n\right]$$

$$+ E(x,y)$$

onde

$$E(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(\bar{x},\bar{y})(x-x_0)^{n+1} + \cdots + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(\bar{x},\bar{y})(y-y_0)^{n+1}\right]$$

Onde $(\bar{x},\bar{y})$ é um ponto no interior de $\overline{PP_0}$.

Escrevemos

$$f(x,y) = \underbrace{P_n(x,y)}_{\text{Polinômio de Taylor de ordem } n} + \underline{E(x,y)} \leftarrow \text{Resto de Lagrange (erro)}$$

Exemplo

Encontre uma aproximação quadrática para $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$ próxima de $(1,1)$.

Qual é a precisão da aproximação se

$$|x-1| \leq 0.2, \quad |y-1| \leq 2$$

Solução

Aproximação quadrática = polinômio de Taylor de ordem 2.

Temos $f_{xx}(1,1) = -1$, $f_{xy}(1,1) = 0$, $f_{yy}(1,1) = -1$

Logo o polinômio de Taylor de ordem 2 no pt $(1,1)$ é

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right)$$

$$= -2 + x + y + \frac{1}{2}\left(-(x-1)^2 - (y-1)\right)^2$$

$$\boxed{P_2(x,y) = -3 + 2x + 2y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 .}$$

Para calcular o magnitude do erro cometido ao aproximar $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$ pelo polinômio $P_2(x,y) = -3 + 2x + 2y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ na região R, precisamos calcular as derivadas parciais de ordem 3 de f. Temos,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{2}{x^3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = \frac{2}{y^3}.$$

Como $|x-1| \leq 0.2$, $|y-1| \leq 0.2$

Temos $\left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant 2\,(0.8)^{-3} = 2 \cdot \frac{10^3}{8^3}$

Podemos tomar $M = 2 \cdot 10^3 \cdot 8^{-3}$ como limitante superior para as derivadas parciais de ordem 3 na região R.

Então

$$|E(x,y)| = \left|\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x},\bar{y})\cdot(x-x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x},\bar{y})\cdot(x-x_0)^2(y-y_0) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x},\bar{y})\cdot(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x},\bar{y})\cdot(y-y_0)^3\right]\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{3!} M\left[|x-x_0|^3 + 3|x-x_0|^2|y-y_0| + 3|x-x_0||y-y_0|^2 + |y-y_0|^3\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{3!} M\,(|x-x_0| + |y-y_0|)^3$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\, 2 \cdot \frac{10^3}{8^3}\,\Big(\underbrace{|x-1|}_{\leqslant 0.2} + \underbrace{|y-1|}_{0.2}\Big)^3 \leqslant \frac{1}{6}\, 2 \cdot \frac{10^3}{8^3}\,(0.2+0.2)^3 = \frac{1}{24}.$$

Observação

$$f(x,y) \simeq L(x,y) \quad \text{com} \quad |E(x,y)| \leqslant \frac{1}{8}$$

$$f(x,y) \simeq P_2(x,y) \quad \text{com} \quad |E(x,y)| \leqslant \frac{1}{24}$$

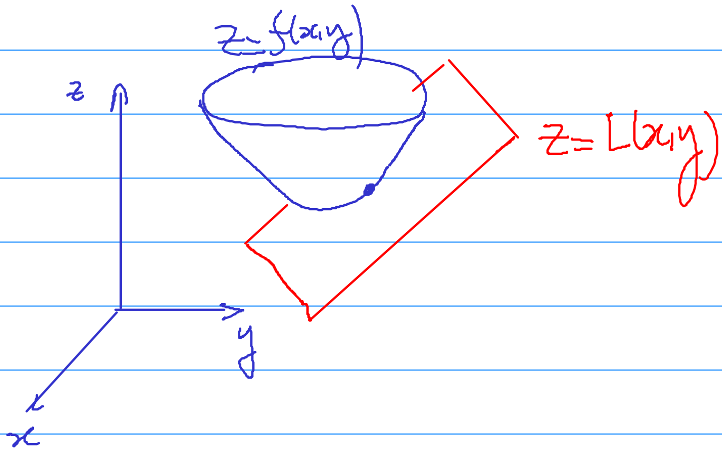
Maior o grau do polinômio de Taylor, melhor a aprixamação $f(x,y) \simeq P_n(x,y)$ [ou seja, menor o erro em uma região R].

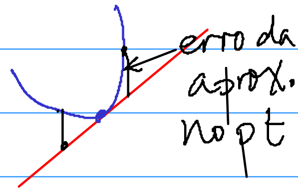
Interpretação geométrica da linearização

Temos

$$z = L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

representa a equação do plano tangente do gráfico de $f(x,y)$ no ponto (x_0,y_0).





(Representação 2D)

Aula 22

Valores extremos locais e pontos de sela

Conteúdo da aula

- Lembrando o teste da derivada segunda para funções de uma variável.
- Definição de um máximo/mínimo local e ponto de sela para funções de duas variáveis
- Condição necessária para um extremo local de uma função de duas variáveis
- Teste da derivada de segunda ordem para valores extremos locais

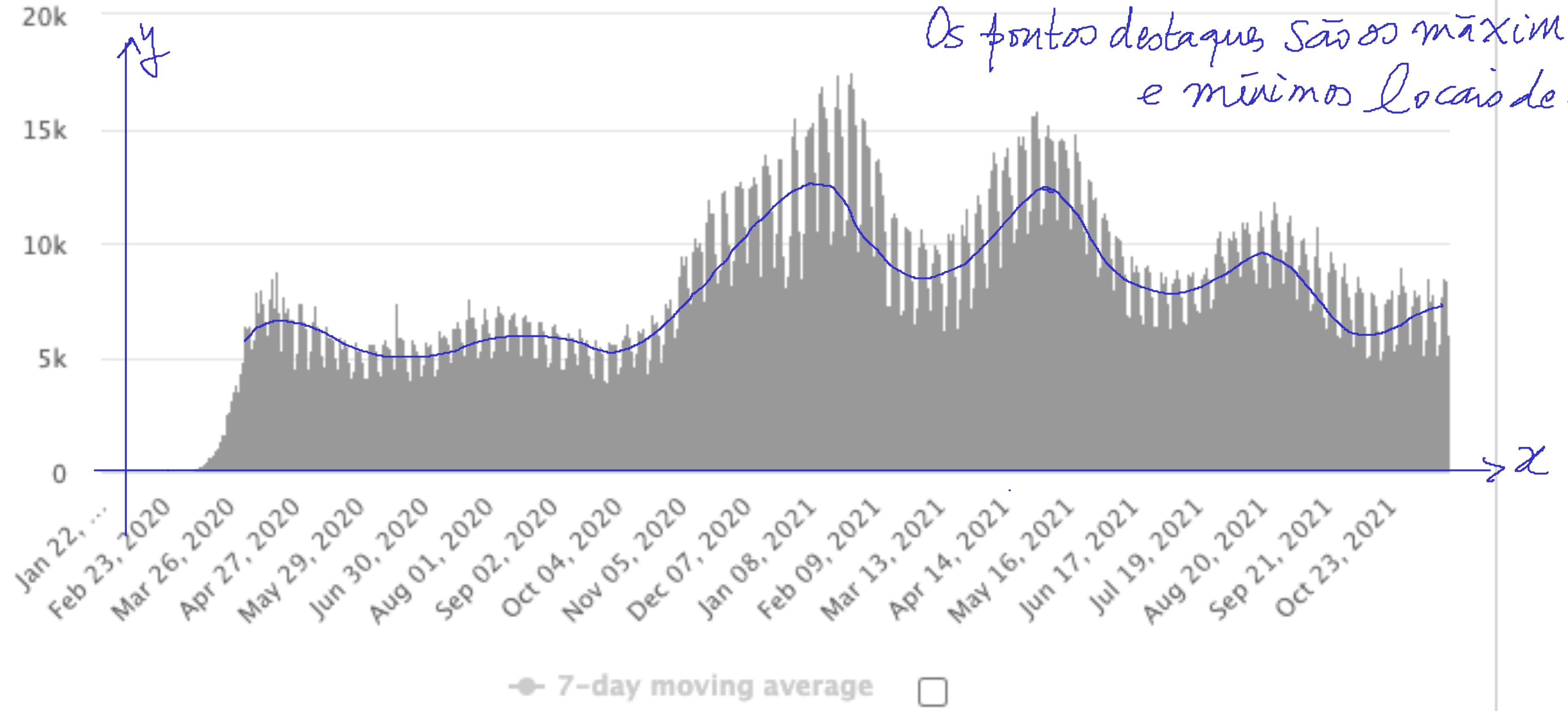
daily linear logarithmic

Daily Deaths

Deaths per Day
Data as of 0:00 GMT+0

O gráfico de $y = f(x)$ representa o número de óbitos diário no mundo pelo Covid 19.

Os pontos destaques são os máximos e mínimos locais de f.



www.worldometers.info/coronavirus 21/11/2021.

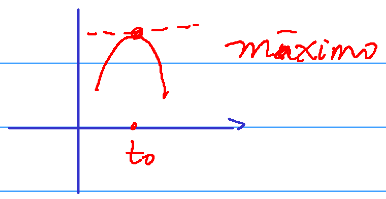
Lembrando: funções de uma variável

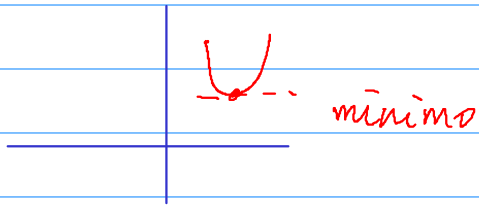
Seja g uma função contínua em $I=[a,b]$.
Então g atinge um valor máximo e um valor mínimo I, ou seja $\exists t_1, t_2$ em I tal que

$$g(t_1) \leq g(t) \leq g(t_2), \quad \forall t \in I$$

Se $t_2 \in]a,b[$ e g é diferenciável em $]a,b[$ então $g'(t_2)=0$ (o mesmo vale para t_1).

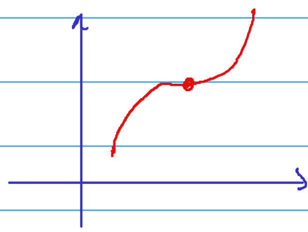
Um ponto $t_0 \in]a,b[$ é um máximo (mínimo) local se $g(t) \leq g(t_0)$ $(g(t) \geq g(t_0))$ para $t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$.
Se g for diferenciável, então $g'(t_0)=0$



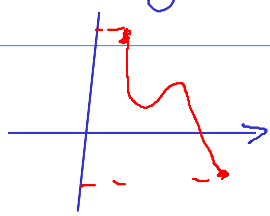


Observações

- $g'(t_0)=0$ não implica que t_0 é um máximo/mín local



- Pode acontecer que o valor máximo/mínimo de g em $I=[a,b]$ seja atingido em ponto da fronteira

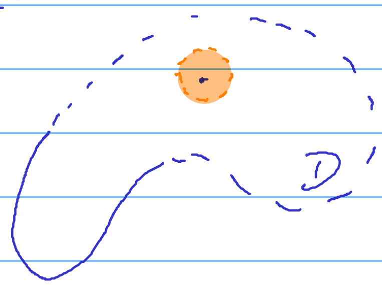


Teorema (Teste da segunda derivada para extremos locais)
Suponha g, g', g'' são contínuas em I que contém t_0.
1. Se $g'(t_0)=0$ e $g''(t_0)<0$, então t_0 é um máximo local de g.
2. Se $g'(t_0)$ e $g''(t_0)>0$, então t_0 é um mínimo local de g.
3. Se $g'(t_0)=g''(t_0)=0$, então o teste é inconcludente.

OBJETIVO

Generalizar o teste da segunda derivada para funções de duas variáveis.

Lembrando



seja D uma região do plano.
Um ponto $P_0 \in D$ é um pt interior se $\exists r>0$ tq

$$B(P_0, r) \subset D$$

Interior de D = o conjunto dos pts interiores de D

Definição
Seja f uma função definida em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$, e $p=(a,b)$ um ponto interior de D. Então
- $f(a,b)$ é valor máximo local de f se
$$f(a,b) \geq f(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \text{ em um}$$
disco aberto $B(p,\varepsilon) \subset D$.
O ponto $p=(a,b)$ é chamado máximo local de f em D.

- $f(a,b)$ é um valor mínimo local de f se
$$f(a,b) \leq f(x,y)$$
para todo (x,y) em $B(p,\varepsilon) \subset D$.
O ponto $p=(a,b)$ é chamado mínimo local de f em D.
- O ponto p é chamado extremo local de f em D se é um máximo ou mínimo local.

Teorema

Seja f uma função definida em $D \subset \mathbb{R}^2$ e diferenciável no interior de D. Seja $p=(a,b)$ um ponto interior de D. Se p é um extremo local, então
$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0.$$

Demonstração

Consider $g(x) = f(x,b)$ (uma função diferenciável).
Considere o caso p máximo local, o caso mínimo local segue analogamente.

Então $g(x) = f(x,b) \leq f(a,b) = g(a)$
para todo x perto de a.

Logo a é um maximo local de $g \Rightarrow g'(a) = 0$.

Mas $g'(a) = f_x(a,b)$, logo $f_x(a,b) = 0$.

O caso $f_y(a,b) = 0$ segue analogamente $(g(y) = f(a,y))$

$\blacksquare$

Observações

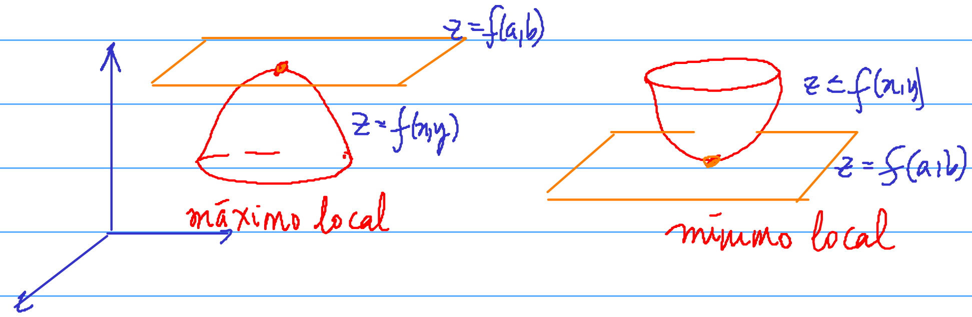
① A equação do plano tangente ao gráfico de $z=f(x,y)$ no ponto $p=(a,b)$ é dada por

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Então quando p é um extremo local a equação é

$$z = f(a,b),$$

ou seja, o plano tg é horizontal (paralelo ao plano xy)



② $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ não implica que (a,b) é um extremo local de f.

Definições

Seja f definida em $D \subset \mathbb{R}^2$ e diferenciável no interior de D.

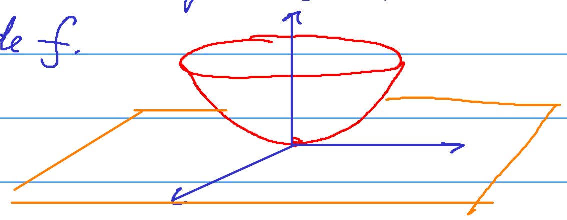
- Um ponto (a,b) no interior de D onde $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ é chamado ponto crítico de f

- Um ponto crítico $p_0=(a,b)$ de f é um ponto de sela se em $B(p_0,r) \subset D$ para algum r existem pontos $(x,y) \in B(p_0,r)$ $f(x,y) > f(a,b)$ e pontos onde $f(x,y) < f(a,b)$.

Exemplos

1. $f(x,y) = x^2+2y^2$: $f(x,y) \geq f(0,0)=0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$O=(0,0)$ é mínimo de f.

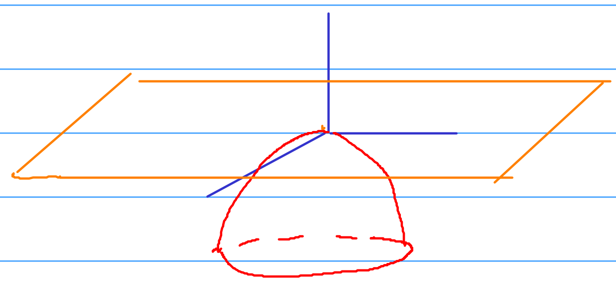
Temos
$f_x(x,y)=2x$
$f_y(x,y)=4y$



O gráfico de f fica localmente acima de seu plano tangente.

$\Longrightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

2. $f(x,y) = -x^2-2y^2$, $f(x,y) \leq f(0,0)=0$
$O=(0,0)$ é um máximo local



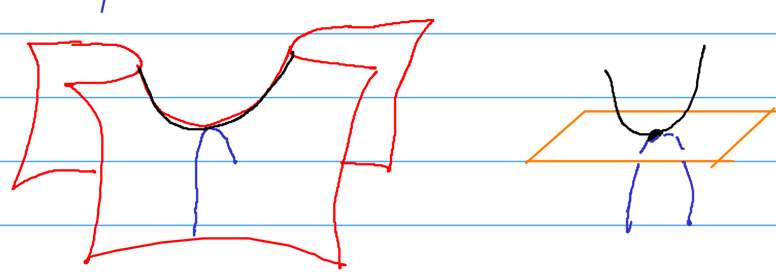
O gráfico de f fica localmente abaixo de seu plano tangente

3. $f(x,y) = x^2-2y^2$, temos $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$
Então $O=(0,0)$ é um ponto crítico de f.

Temos $f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0)$ para $x \neq 0$

$f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0)$ para $y \neq 0$

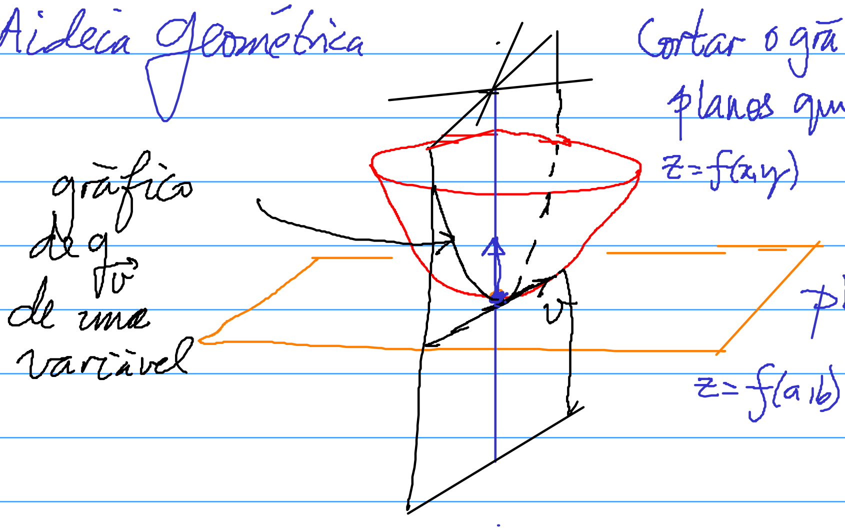
Logo $O=(0,0)$ é um ponto de sela.



Pergunta

Seja (a,b) um ponto crítico de f. Quando (a,b) é ponto máximo/mínimo local ou pt de sela?

A ideia geométrica



Cortar o gráfico de f com o (feixe) planos que contém a reta normal em (a,b).

Suponha que as derivadas de primeira e segunda ordem de f sejam contínuas em $B(P_0,r)\subset D_f$, e que P_0 é um ponto crítico de f:

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$$

Seja $\vec{v}=(h,k)$ um vetor não nulo e definimos

$$\boxed{g_{\vec{v}}(t)=f(a+th,b+tk)}$$

para t pequeno do modo que $(a+th,b+tk)\in B(P_0,r)$

O gráfico de g é a interseção do gráfico de f com o plano que contém o ponto $P_0=(a,b)$ e que é paralelo ao vetor $(h,k,0)$ e $\vec{k}=(0,0,1)$

As funcoes $g_{\vec{v}}, g'_{\vec{v}}, g''_{\vec{v}}$ são contínuas.

$$g_{\vec{v}}(t) = f(a+th, b+tk)$$

$$g'_{\vec{v}}(t) = f_x(a+th, b+tk).h + f_y(a+th, b+tk).k$$

$$g''_{\vec{v}}(t) = \left[f_{xx}(a+th, b+tk).h + f_{xy}(a+th, b+tk).k\right]h$$

$$+ \left[f_{yx}(a+th, b+tk).h + f_{yy}(a+th, b+tk).k\right]k$$

$$= f_{xx}(a+th, b+tk).h^2 + 2f_{xy}(a+th, b+tk)hk + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2$$

Portanto, em $t=0$

$$g'_{\vec{v}}(0) = \cancel{f_x(a,b)}^{=0}.h + \cancel{f_y(a,b)}^{=0}.k = 0$$

$$g''_{\vec{v}}(0) = f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2$$

$t=0$ é um pt crítico de $g_{\vec{v}}$ para todo $\vec{v}$.

Quando $g''_{\vec{v}}(0) > 0$ (ou $g''_{\vec{v}}(0) < 0$) para todo $\vec{v}$?

[Daí variando $\vec{v}$ todas as funções $g_{\vec{v}}$ terão um mínimo/máximo local]

Suponha que $k \neq 0$

$$g''_{\vec{v}}(0) = f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2$$

$$\overset{X = h/k}{=} k^2\left(f_{xx}(a,b)\,X^2 + 2f_{xy}(a,b)\,X + f_{yy}(a,b) \right)$$

Precisamos analizar o sinal deste polinômio de grau 2 em X

$$\Delta = 4\left(f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) \right)$$

$$= -4\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \right)(a,b)$$

- Se $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ e $f_{xx} > 0$ em (a,b), então $g''_{\vec{v}}(0) > 0$ para todo $\vec{v}$ $\Rightarrow$ (a,b) é um mínimo local de f

- Se $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ e $f_{xx} < 0$ em (a,b) então $g''_{\vec{v}}(0) < 0$ para todo $\vec{v}$ $\Rightarrow$ (a,b) é um máximo local de f

- Se $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ então $g_{\vec{v}}(0)$ muda de sinal

$\Rightarrow$ (a,b) e ponto de sela.

- Se $(f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy})(a,b) = 0$ precisamos considerar derivadas parciais de ordem maior que 2 de f em (a,b).

A matriz simétrica 2x2

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

é chamada Hessiana de f em (x,y). [Ela representa a derivada de segunda ordem de f em (x,y)].

Observe que $\det(H(a,b)) = (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a,b)$.

Acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema (Teste da derivada de segunda ordem para valores extremos locais — Teste da Hessiana)

Suponha que f e a suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem sejam contínuas em um disco aberto $B(p_0, r)$ de centro $p_0 = (a,b)$ e que $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. Então

- f tem um máximo local em (a,b) se $f_{xx}(a,b) < 0$ e $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a,b) > 0$
- f tem um mínimo local em (a,b) se $f_{xx}(a,b) > 0$ e $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a,b) > 0$
- f tem um ponto de sela em (a,b) se $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a,b) < 0$
- O teste é inconcludente em (a,b) se $(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a,b) = 0$
  [Neste caso usamos outras ferramentas para determinar o comportamento de f em torno de $p_0 = (a,b)$]

Aula 11 de Consolidação: Polinômios de Taylor, Extremos Locais

Lembrando:

Se f é uma função de classe C^n (i.e., todas as derivadas parciais $\leq n$ existem e são contínuas de ordem) em um aberto D contendo o ponto $p_0 = (x_0, y_0)$, então o **polinômio de Taylor P_n de ordem n de f em torno do ponto** p_0 é o polinômio (de grau no máximo n) dado por

$$\begin{aligned}
P_n(x,y) = \quad & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
& + \tfrac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \\
& + \tfrac{1}{3!}\left[f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3f_{yxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + 3f_{yyx}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\right] \\
& + \ldots + \\
& + \tfrac{1}{n!}\Big[\tbinom{n}{n}\tfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0,y_0)(x-x_0)^n + \tbinom{n}{n-1}\tfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^{n-1}(y-y_0) + \\
& + \tbinom{n}{n-2}\tfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^{n-2}(y-y_0)^2 + \ldots + \tbinom{n}{0}\tfrac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0,y_0)(y-y_0)^n\Big]
\end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in D$ tal que o segmento da reta que liga (x, y) e (x_0, y_0) é contido em D. (Os coeficientes dos monômios de grau k em P_n são os coeficientes binomias de Newton de grau k.)

Se f é uma função de classe $C^{n+1}(D)$, o erro (de ordem $n + 1$) E na aproximação $f(x, y) \approx P(x, y)$ é dado pelo **resto de Lagrange** ($f = P+E$):

$$E_{n+1}(x,y) = E(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\binom{n+1}{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^{n+1} + \binom{n+1}{n}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^n(y-y_0) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \binom{n+1}{0}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(\overline{x},\overline{y})(y-y_0)^{n+1}\right], \quad \forall (x,y) \in D,$$

onde $(\overline{x}, \overline{y})$ é um ponto no segmento ligando o ponto p_0 ao ponto (x, y).

Em uma região compacta $R \subset D$, sempre podemos encontrar um limitante superior para o erro cometido: existe $M > 0$ tal que para todo $(x, y) \in R$, temos

$$\begin{aligned}
|E(x,y)| & \leq \tfrac{1}{(n+1)!} M(|x-x_0|^{n+1} + (n+1)|x-x_0|^n|y-y_0| + \ldots + |y-y_0|^{n+1}) \\
& \leq \tfrac{1}{(n+1)!} M\left(|x-x_0| + |y-y_0|\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Questão 1: Considere a função $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

(a) Encontre o polinômio de Taylor P_1 de ordem 1 de f em torno de $(1, 1)$.

(b) Avalie o erro cometido na aproximação $\sqrt{xy} \approx P_1(x, y)$ na região $R : -0.1 \leq x - 1 \leq 0.1,\ -0.1 \leq y - 1 \leq 0.1$.

(c) Encontre o polinômio de Taylor P_2 de ordem 2 de f em torno de $(1, 1)$.

(d) Avalie o erro cometido na aproximação $\sqrt{xy} \approx P_2(x,y)$ na região R.

Solução: Observe que a função f é definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ e possui derivadas parciais contínuas de toda ordem no aberto $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$. O ponto $p_0 = (1,1) \in D'$, então o Teorema de Taylor se aplica para f em torno de p_0.

(a) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1,1)$, precisamos calcular $f(1,1)$, $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$.

Temos $f(1,1) = 1$ e

$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y) & = & \frac{1}{2}\frac{y}{(xy)^{1/2}} \\ f_y(x,y) & = & \frac{1}{2}\frac{x}{(xy)^{1/2}} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} f_x(1,1) & = & \frac{1}{2} \\ f_y(1,1) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $p_0 = (1,1)$ é dado por

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) \\ &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y. \end{aligned}$$

(b) Para encontrar o erro cometido ao aproximar f por P_1 na região compacta R, precisamos encontrar um limitante superior para os valores absolutos das derivadas parciais de ordem 2 de f na região R. Temos

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}}, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}}.$$

Em $R: -0.1 \leq x-1 \leq 0.1,\ -0.1 \leq y-1 \leq 0.1$ temos:

$$\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{11}{10}, \qquad \frac{9}{10} \leq y \leq \frac{11}{10}.$$

Portanto

$$\left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2, \ \left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq y^2 \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2, \ \left(\frac{9}{10}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{11}{10}\right)^2,$$

$$\left(\frac{10}{11}\right) \leq \frac{1}{(xy)^{1/2}} \leq \left(\frac{10}{9}\right), \quad \left(\frac{10}{11}\right)^3 \leq \frac{1}{(xy)^{3/2}} \leq \left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

Logo, para todo $(x,y) \in R$

$$
\begin{array}{l}
|f_{xx}(x,y)| = |-\frac{1}{4}\frac{y^2}{(xy)^{3/2}}| \leq \frac{1}{4}\cdot(\frac{11}{10})^2\cdot(\frac{10}{9})^3 = \frac{10\times 11^2}{4\times 9^3},\\
|f_{yy}(x,y)| = |-\frac{1}{4}\frac{x^2}{(xy)^{3/2}}| \leq \frac{10\times 11^2}{4\times 9^3},\\
|f_{xy}(x,y)| = |\frac{1}{4}\frac{1}{(xy)^{1/2}}| \leq \frac{1}{4}\cdot(\frac{10}{9}) = \frac{10}{4\times 9}.
\end{array}
$$

Logo $M = \frac{10\times 11^2}{4\times 9^3}$ é um limitante superior para aos valores absolutos de todas as derivadas parciais de ordem 2 de f em R. Assim, para todo $(x,y) \in R$, o resto de Lagrange E satisfaz:

$$
\begin{array}{rcl}
|E(x,y)| & = & \left|\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(\bar{x},\bar{y}).(x-1)^2 + 2f_{xy}(\bar{x},\bar{y}).(x-1).(y-1) + f_{yy}(\bar{x},\bar{y}).(y-1)^2\right)\right|\\
& \leq & \frac{1}{2}M(|x-1|+|y-1|)^2\\
& \leq & \frac{1}{2}M(0.1+0.1)^2\\
& \leq & 2\cdot M\cdot 10^{-2} = 2\frac{10\times 11^2}{4\times 9^3}\cdot 10^{-2} \approx 0.00829.
\end{array}
$$

Então o erro cometido ao aproximar $\sqrt{xy} \approx P_1(x,y)$ em qualquer ponto da região R é menor ou igual a $\frac{11^2}{2\times 10\times 9^3} \approx 0.00829$.

(c) Para calcular o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$, precisamos calcular $f(1,1)$, $f_x(1,1)$, $f_y(1,1)$, $f_{xx}(1,1)$, $f_{xy}(1,1)$ e $f_{yy}(1,1)$. Temos

$$
f_{xx}(1,1) = -\frac{1}{4},\ f_{xy}(1,1) = \frac{1}{4},\ f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{4}
$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $p_0 = (1,1)$ é dado por

$$
\begin{array}{rcl}
P_2(x,y) & = & f(1,1) + f_x(1,1).(x-1) + f_y(1,1)(y-1) +\\
& & \frac{1}{2!}(f_{xx}(1,1).(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,1).(x-1).(y-1) + f_{yy}(1,1).(y-1)^2)\\
& = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{2}{4}(x-1)(y-1) - \frac{1}{4}(y-1)^2)\\
& = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{8}y^2.
\end{array}
$$

(d) Para encontrar o erro cometido ao aproximar f por P_2 na região compacta R, precisamos encontrar um limitante superior M para os valores absolutos das derivadas parciais de ordem 3 de f na região R. Daí

$$
\begin{array}{rcl}
|E(x,y)| & \leq & \frac{1}{3!}M(|x-1|+|y-1|)^3\\
& \leq & \frac{1}{6}M(0.1+0.1)^3\\
& \leq & \frac{4M}{3}10^{-3}.
\end{array}
$$

Verifique que $M = \dfrac{3 \times 10^2 \times 11^3}{8 \times 9^5}$ é um limitante superior para aos valores absolutos de todas as derivadas parciais de ordem 3 de f em R. Portanto,

$$|E(x,y)| \leq \frac{11^3}{2 \times 9^5 \times 10} \approx 0.00112, \quad \forall (x,y) \in R.$$

Questão 2. Considere $f(x,y) = \sin(x) + y$. Escolha um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ e um inteiro $n \geq 0$ tais que o valor $P_n(1,0)$, onde P_n é o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de p_0, forneça um valor aproximado de $f(1,0)$ com erro $< 10^{-5}$ (pense em escolhas de maneira que não seja necessário saber os valores de $\sin(1)$ ou $\cos(1)$).

Solução: f possui todas derivadas parciais de todas as ordens contínuas em $\mathbb{R}^2$, que é um aberto que claramente contém $(1,0)$. Além disso, $f_x(x,y) = \cos(x)$, $\quad f_y(x,y) = 1$,
$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y) = 0 \quad (n > 1)$, todas as derivadas mistas são nulas e

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y)\right|, \; |f_x(x,y)|, \; |f_y(x,y)| \leq 1, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto, $M = 1$ é um limitante superior para todas as derivadas parciais em $\mathbb{R}^2$. Assim, considerando o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de $p_0 = (0,0)$ e $M = 1$, sabemos que

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \overbrace{1}^{M} (|x-0| + |y-0|)^{n+1}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Em particular, queremos:

$$|E(1,0)| \leq \frac{1}{(n+1)!} (1+0)^{n+1} = \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-5}.$$

Agora, basta observar que $n = 8$ satisfaz a desigualdade

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-5}.$$

Portanto, usando polinômio de Taylor de f em torno de $(0,0)$ de ordem pelo menos 8, o erro cometido na aproximação

$$\sin(1) = f(1,0) \approx P_n(1,0), \quad (n \geq 8)$$

será $< 10^{-5}$.

Verifique que $P_8(x,y) = x + y - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$. Calcule $f(1,0)$, $P_8(1,0)$ e $|f(1,0) - P_8(1,0)|$.

Escolhe um outro ponto p_0. Qual é o valor de n nesse caso.

Questão 3. Determine se a função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ possui máximos e mínimos locais em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Os pontos críticos da função f são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{array} \right.$$

As soluções do sistema são, $x = -1, 0, 1$ e $y = -1, 0, 1$, ou seja, temos nove pontos críticos: $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$.

Para determinar a natureza dos pontos críticos aplicamos o teste da derivada de segunda ordem ()Teste da Hessiana). Temos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

- No ponto $(0,0)$, temos $det(H(0,0)) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} > 0$ e $f_{xx}(0,0) < 0$.

  Então $(0,0)$ é um ponto de máximo local.

- Nos pontos $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ temos

  $$\det(H(0,\pm 1)) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} < 0 \quad e \quad \det(H(\pm 1, 0)) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} < 0.$$

  Então $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$ são pontos sela.

- Nos pontos $(\pm 1, \pm 1)$ temos $\det(H(\pm 1, \pm 1)) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} > 0$ e $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) > 0$.

  Então $(\pm 1, \pm 1)$ são pontos de mínimos locais.

Observe que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = \underbrace{(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2}_{\geq 0} - 2 \\ &\geq -2 = f(\pm 1, \pm 1), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos $(\pm 1, \pm 1)$ são pontos de mínimos absolutos de f e o valor mínimo absoluto de f é -2.

A função f não tem valor máximo absoluto pois um ponto de máximo absoluto seria um ponto de máximo local e, por exemplo, $f(2,1) = 7 > 0 = f(0,0)$. Ver Figura 1.

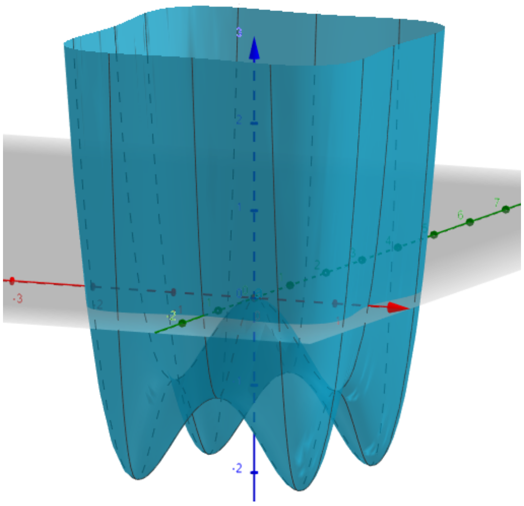


Figura 1: Gráfico da função f.

Aula 23

Máximos e mínimos absolutos em regiões compactas

Conteúdo da aula

- Extremos locais e pontos de sela
- Teorema de Weierstrass
- Como localizar extremos absolutos em regiões compactas

Exemplo

Encontre todos os máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da função

$$f(x,y) = -5x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + 4y - 4.$$

Solução

A função f é um polinômio, portanto é definida em $\mathbb{R}^2$ e possui derivadas parciais de toda ordem contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Precisamos achar os pontos críticos def: ou seja achar os ponto (x,y) onde

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos um ponto crítico único $(a,b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Aplicamos o teste da derivada de seg. ordem no pt (a,b)

Temos $f_{xx}(x,y) = -10$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2$$

$$f_{yy}(x,y) = -4$$

Portanto a Hessiana de f é

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Temos $\det(H(a,b)) = \left(f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)\right)$

$$= 36 > 0$$

Como $f_{xx}(a,b) = -10 < 0$, concluimos

que $(a,b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ é um máximo local.

Exemplo onde o teste da Hessiana é inconcludente

Considere os seguinte exemplo

(a) $f(x,y) = x^2 + y^4$

(b) $f(x,y) = -x^2 - y^4$

(c) $f(x,y) = x^2 - y^4$

Nos três casos em $(a,b) = (0,0)$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ e

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H(0,0)) = 0.$$

No caso (a) $f(x,y) \geq f(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ mínimo de f

No caso (b) $f(x,y) \leq f(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ é máximo de f

No caso (c) temos $f(x,0) > 0$ se $x \neq 0$
$f(0,y) < 0$ se $y \neq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ é pt de sela.

Observações

① O teste da Hessiana se aplica em um pt crítico (a,b) de f onde $\det(H(a,b)) \neq 0$.

Se $\det(H(a,b)) = 0$, precisamos de derivadas parciais de ordem > 2 para determinar o tipo de (a,b).
(supondo que tais derivadas existam)

② Teste da Hessiana para
$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n > 2$, D aberto.

Suponha que as derivadas parciais de ordem ≤ 2 de f existem e são contínuas em D. A Hessiana de f é a matriz simétrica $n \times n$ formada pelas derivadas parciais de seg. ordem de f

$$H(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \leftarrow \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \\ \quad \vdots \\ \leftarrow \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \end{array}$$

Seja $a=(a_1,\dots,a_n)$ um ponto crítico de f,
ou seja $\nabla f(a)=0$.

Se $\det H(a)\neq 0$, a matriz $H(a)$ tem n-auto valores
$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ não nulos

Se todo os λ_i, $i=1\dots,n$ tem o mesmo sinal
o ponto crítico a é um máximo local de f se eles são negativos
e é um mínimo local de f se eles são positivos.

Se dois auto-valores tem sinal oposto, o ponto crítico
é ponto de sela.

Máximos e mínimos absolutos

Lembrando: $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma região compacta se é fechada e limitada.

(limitada: $\exists M > 0$, $d(O,p) < M$, $\forall p \in D$)

$\|\vec{Op}\| \leq M$

Definição

1. O ponto (a,b) é um máximo absoluto de $f(x,y)$ em D se $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in D$.

2. O ponto (a,b) é mínimo absoluto de $f(x,y)$ em D se $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in D$

3. O ponto (a,b) é um extremo absoluto de $f(x,y)$ em D se (a,b) é um mínimo ou máximo absoluto de f em D.

Teorema (de Weierstrass)

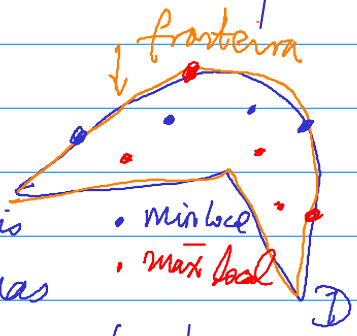
Seja f uma função contínua em um compacto $D \subset \mathbb{R}^n$. Então existem p_1 e p_2 em D tal que

$$f(p_1) \leq f(x) \leq f(p_2)$$

para todo $p \in D$.

Consequência

Seja f uma função contínua em um compacto $D \subset \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema de Weierstrass f possui um máximo e um mínimo absoluto em D.



Suponha que f e suas derivadas parciais de ordem ≤ 2 existem e são contínuas no interior de D. Suponha que o mesmo vale para restrição de f a fronteira de D.

Estratégia para achar os extremos absoluto de f em D

1. Listamos os ponto no interior de D onde f tem máximos ou mínimos locais e calculamos f nesses ponto.

2. Listamos os pontos da fronteira de D onde f tem máximos ou mínimos locais e calculamos f nesses pontos.

3. Procuramos nas listas pelos valores máximo e mínimos de f. Estes serão os valores máximo e mínimo absolutos de f em D.

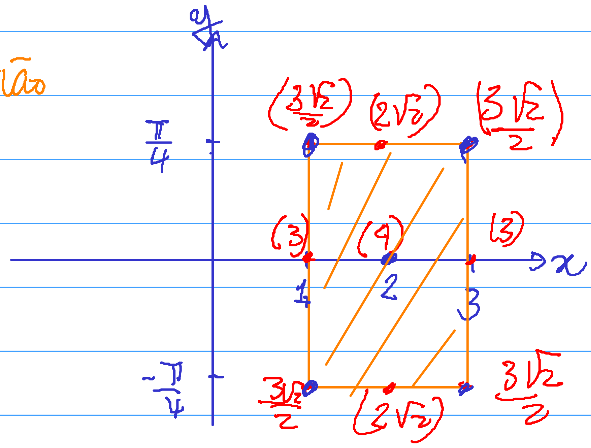
<u>Exemplo</u> Entre os máximos e mínimos absolutos de

$$f(x,y) = (4x - x^2)\cos(y)$$

na região D: $1 \leq x \leq 3$

$$-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$$

D é uma região compacta



os valores entre parenteses são o valores de f nos pontos dados.

<u>Solução</u> f possui derivadas parciais de ordem ≤ 2 contínuas em $\mathbb{R}^2$, em particular em D.

<u>Passo 1</u> <u>Extremos locais no interior de D</u>

Temos
$$\begin{cases} f_x(x,y) = (4-2x)\cos y \\ f_y(x,y) = -(4x - x^2)\operatorname{sen} y \end{cases}$$

Para $-\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4}$, $\cos y \neq 0$, então

$$f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Temos $f_y(2,y) = -4\operatorname{sen} y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Logo f tem um único ponto crítico $(2,0)$ no interior de D

Aplicamos o teste da Hessiano no pt $(2,0)$.

Temos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -2\cos y & -(4-2x)\operatorname{sen} y \\ -(4-2x)\operatorname{sen} y & -(4x-x^2)\cos y \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$H(2,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Temos $\det(H(2,0)) = 8 > 0$ e $f_{xx}(2,0) < 0$, então $(2,0)$ é um máximo local de f com

$$f(2,0) = 4$$

<u>Passo 2</u> <u>Extremos na fronteira de D</u>

A fronteira D consiste em quatro segmentos

$$x = 1,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}, \quad x = 3,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le +\frac{\pi}{4}$$

$$y = -\frac{\pi}{4},\ 1 \le x \le 3, \quad y = \frac{\pi}{4},\ 1 \le x \le 3$$

Observe que

$$f(1,y) = f(3,y) = 3\cos y$$

$$f\left(x,-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(x,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x-x^2)$$

Então basta analizar f nos segmentos

$$x=1, \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{e}$$

$$y = \frac{\pi}{4}, \quad 1 \leq x \leq 3$$

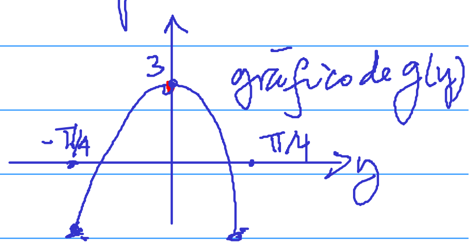
Consideramos a função

$$g(y) = f(1,y) = 3\cos y \qquad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$$

Temos $g'(y) = -3\operatorname{sen} y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$$g''(y) = -3\cos y, \text{ com } g''(0) = -3 < 0$$

Logo g tem um máximo em $y=0$ com $g(0)=3$



Analizando o gráfico de g, concluimos que atinge seu valor mínimo em

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Consideramos agora a função

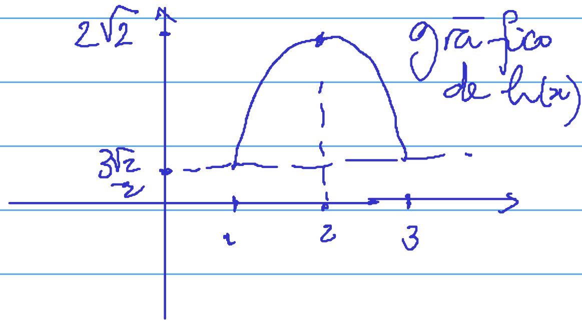
$$h(x) = f\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4x - x^2), \quad 1 \le x \le 3$$

Temos

$$h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - 2x), \quad h''(x) = -\sqrt{2}$$

Logo $x = 2$ é um máximo de h com $h(2) = 2\sqrt{2}$

Analizando o gráfico de h, seu valor mínimo é atingido em $g(1) = g(3) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$



Passo 3 Comparação dos valores dos extremos locais nos passos 1 e 2.

Comparando os valores na figura na página 204

Concluimos que o valor máximo de f em D

é 4 e f assume este valor no ponto $(2, 0)$.

O valor mínimo de f em D é $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e f assume

este valor nos pontos $\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$.

Aula 24

Teorema da função implícita
Multiplicadores de Lagrange

Conteúdo da aula
- Teorema da função implícita
- Multiplicadores de Lagrange a um vínculo

Teorema $(n=3)$

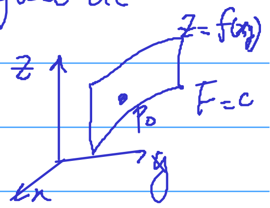
Seja $F: D\subset\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto $D\subset\mathbb{R}^3$.
Seja $p_0=(x_0,y_0,z_0)\in D$ tal que

$$F(x_0,y_0,z_0)=c \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

Então existe um aberto $U\subset\mathbb{R}^2$ que contém (x_0,y_0), um intervalo aberto I que contém z_0, uma função diferenciável $f: U\subset\mathbb{R}^2 \to I\subset\mathbb{R}$ tal que $\forall (x,y,z)\in U\times I$, $F(x,y,z)=c$ se, e somente se, $z=f(x,y)$,
ou seja $F(x,y,f(x,y))=c$, $\forall (x,y)\in U$.

Observações

1. O teorema afirma que, em torno do ponto p_0, a superfície de nível $F(x,y,z)=c$ é o gráfico da função $z=f(x,y)$.



2. Teorema da função implícita para $n=2$:
Para $F: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto D, se $F(x_0,y_0)=c$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, então existe um intervalo aberto $I\ni x_0$, um intervalo aberto $J\ni y_0$, uma função diferenciável $f: I\to J$, tal que $\forall (x,y)\in I\times J$, $F(x,y)=c \Leftrightarrow y=f(x)$.

3. O Teorema vale trocando $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0)\neq 0$ por $\frac{\partial F}{\partial x}(p_0)\neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(p_0)\neq 0$. Se $\frac{\partial F}{\partial y}(p_0)\neq 0$, então existem abertos $U\subset\mathbb{R}^2$, $I\subset\mathbb{R}$

uma função $f: U\subset\mathbb{R}^2 \to I$ tal que $\forall (x,y,z)\in U\times I$,
$F(x,y,z)=c \Leftrightarrow y=f(x,z)$.

Exemplos

1. $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (é diferenciável em $\mathbb{R}^3$)

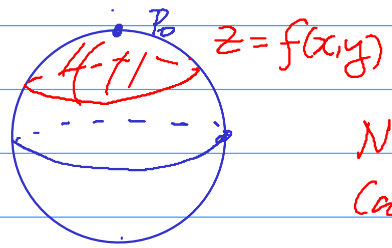
$p_0 = (0,0,1)$, $F(0,0,1) = 1 = c$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2z \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0$$

Então perto $p_0 = (0,0,1)$, existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$F(x,y,z) = 1 \iff z = f(x,y)$$

Observe que $F(x,y,z) = 1 \iff x^2+y^2+z^2 = 1$



Neste exemplo, podemos calcular explicitamente f.

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

2. $F(x,y) = \operatorname{sen} x + e^{x^2+y^2}$ (diferenciável em $\mathbb{R}^2$)

$P_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$

$F(0,0) = 1 = c$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos x + 2x e^{x^2+y^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y e^{x^2+y^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 1 \neq 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Então, pelo teorema da função implícita, existem intervalos $I_1 \ni x_0 = 0$, $I_2 \ni y_0 = 0$ e uma função diferenciável $f: I_2 \to I_1$ tal que

$\forall (x,y) \in I_1 \times I_2$. $F(x,y) = 0 \iff x = f(y)$.

Observe que não temos a expressão explícita de f.

Mas sabemos que $f(0)=0$ e podemos calcular, usando a regra da cadeia, as derivadas de f em $y_0=0$.

De fato, $\quad F(f(y),y)=0, \ \forall y \in I_2$

Obtemos, por exemplo, derivando duas vezes:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(f(y),y)\cdot f'(y)+\frac{\partial F}{\partial y}(f(y),y)=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(f(y),y)\cdot(f'(y))^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(f(y),y)\cdot f'(y)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(f(y),y)+\frac{\partial F}{\partial x}(f(y),y)f''(y)=0$$

Portanto, em $y=0$, $\quad f'(0)=0$ e $f''(0)=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0)=-2$

Assim

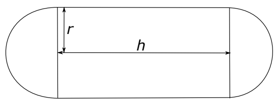
$$x=f(y)=-2y^2+R(y) \quad \text{onde} \quad R(0)=R'(0)=R''(0)=0$$

Ou seja, temos uma aproximação de f por seu polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de $y=0$, dado por $P_2(y)=-2y^2$.

Podemos calcular o polinômio de Taylor de ordem n de f na origem para todo $n\geq 2$.

Multiplicadores de Lagrange:
I. otimização sujeita a um vínculo

Exemplo: Tanque de armazenamento mais barato [Thomas, Cálculo V2] *Sua empresa foi solicitada a projetar um tanque de armazenamento para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente exigem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas, e o tanque deve ter capacidade para 8.000 m^3 de gás. O cliente deseja também utilizar a menor quantidade possível de material na fabricação do tanque. Qual raio e qual altura você recomenda para a parte cilíndrica do tanque?*



O problema:

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & A(h,r) \\ \text{sujeta a} & V(h,r) = 8000 \end{array}$$

onde $A(h,r)$ é a área do tanque e $V(h,r)$ é o volume do tanque.

Objetivo: Achar os extremos absolutos de uma função f de n variáveis sujeita a uma ou várias restrições $g_i = 0$, $i = 1..p$, $p < n$.

Para $n = 3$:

$$\begin{array}{rl} \text{maximize/minimize} & f(x,y,z) \\ \text{sujeta a} & g(x,y,z) = 0 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rl} \text{maximize/minimize} & f(x,y,z) \\ \text{sujeta a} & \begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \end{array}$$

O problema é chamado **otimização sujeito a um vínculo (i.e., condição), ou vários vínculos.**

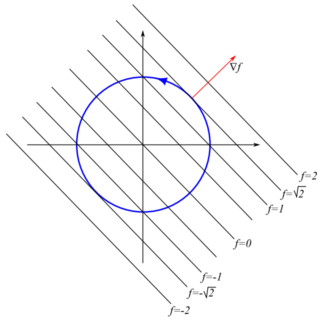
Exemplo 1: $n = 2$

Seja $f(x,y) = x + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A função f não possui extremos em $\mathbb{R}^2$ pois $f_x(x,y) = 1$ e $f_y(x,y) = 1$.

Considere o problema

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & f(x,y) = x + y \\ \text{sujeta a} & g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

O problema é equivalente a procurar o máximo absoluto de f restrita ao círculo unitário C de centre a origem.



Consideramos as curvas de nível de f. O gráfico indica que o máximo absoluto é atingido no ponto onde a curva de nível de f é tangente a $g = 0$, ou seja, ondo ∇f é paralelo a ∇g.

Exemplo 2: $n = 3$

Vamos encontrar o ponto do plano $2x - y - z - 5 = 0$ que esteja mais próximo à origem.

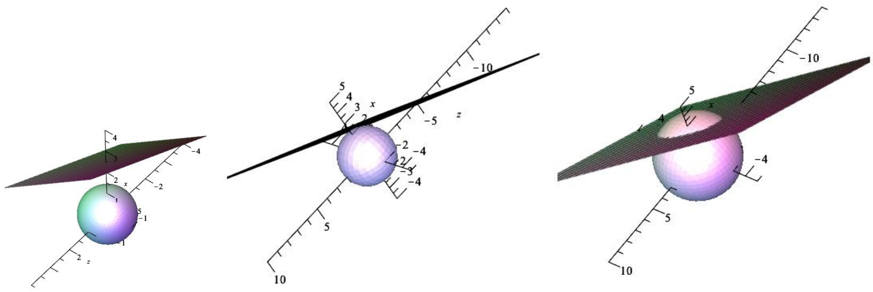
Seja $P = (x, y, z)$ um ponto do espaço. Temos

$$d(0, P) = ||\vec{OP}|| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Com $||\vec{OP}||$ tem valor mínimo quando $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ tem valor mínimo, o problema é equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{sujeta a} & g(x,y,z) = 2x - y - z - 5 = 0 \end{array}$$

Usando nossos conhecimentos de GA, sabemos que a solução é a projeção ortogonal de O ao plano $\pi : g(x, y, z) = 2x - y - z - 5 = 0$. Então, a solução é exatamente o ponto onde a superfície de nível de f, que é uma esfera de centro O, é tangente a π.



Ou seja, a solução é um ponto ondo ∇f é paralelo a ∇g.

Então, temos uma ideia geométrica de como resolver o nosso problema de otimização sujeito a um vínculo (a uma condição).

Teorema 0.1 (Teorema do gradiente ortogonal) *Suponha que $f(x,y,z)$ seja diferenciável em uma região cujo interior contenha uma curva lisa*

$$C : r(t) = g(t)\vec{\mathbf{i}} + h(t)\vec{\mathbf{j}} + k(t)\vec{\mathbf{k}}.$$

Se P_0 é um ponto em C onde f possua um máximo ou mínimo local relativo a seus valores em C, então ∇f é ortogonal a C em P_0.

Demonstração: Os extremos locais de f, relativos a seus valores em C, são os extremos da função $\alpha(t) = f(g(t), h(t), k(t))$. Como f é diferenciável e C é lisa, a função α é também diferenciável.

Se $P_0 = r(t_0)$ é um extremo local de f relativo a seus valores em C, então t_0 é um extremo local de $\alpha(t)$. Portanto $\alpha'(t_0) = 0$.

Pela regra da cadeia,

$$\alpha' = \frac{\partial f}{\partial x}g' + \frac{\partial f}{\partial y}h' + \frac{\partial f}{\partial z}k' = \nabla f \cdot r'.$$

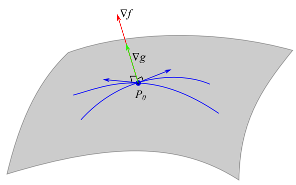
Logo $\nabla f(r(t_0)) \cdot r'(t_0) = 0$, ou seja ∇f é ortogonal a C em P_0.

Consequências do teorema do gradiente ortogonal

- Desconsiderando os termos em z no teorema, obtemos um resultado semelhante para funções de duas variáveis.

- Suponha que $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ sejam diferenciáveis e que P_0 seja um ponto na superfície $g(x,y,z) = 0$ onde a restrição de f a superfície tenha um extremo local. Assumimos que a superfície é lisa, ou seja $\nabla g \neq 0$ onde $g(x,y,z) = 0$. Então f assume um valor máximo ou mínimo local em P_0 relativo aos seus valores em toda curva diferenciável passando por P_0 na superfície $g(x,y,z) = 0$.

  Então, pelo teorema anterior, em P_0, ∇f é paralelo ∇g, ou seja $\nabla f = \lambda \nabla g$ por algum escalar λ.



Método dos multiplicadores de Lagrange a um vínculo

Suponha que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sejam diferenciáveis e que $\nabla g \neq 0$ quando $g(x, y, z) = 0$. Então os candidatos para as soluções dos problemas

$$\begin{array}{cc} \text{maximize/minimize} & f(x,y,z) \\ \text{sujeta a} & g(x,y,z) = 0 \end{array}$$

satisfazem simultaneamente as equações

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

em x, y, z, λ.
Para funções de duas variáveis, a condição é semelhante, mas sem a variável z.
O escalar λ é chamado **multiplicador de Lagrange**.

Cuidado!

O método dos multiplicadores de Lagrange fornece candidatos para extremos de funções sujeitas a vínculos. De fato, considere o seguinte problema

$$\begin{array}{cc} \text{maximize} & f(x,y) = y \\ \text{sujeta a} & g(x,y) = y - x^3 = 0 \end{array}$$

Temos $\nabla f(x, y) = (0, 1)$ e $\nabla g(x, y) = (-3x^2, 1)$. Portanto $\nabla f(0, 0) = \nabla g(0, 0)$. Mas f restrita a g é dada por $\alpha(x) = f(x, x^3) = x^3$, e $x = 0$ não é um extremo local de α. Portanto $(0, 0)$ não é um extremo de $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = 0$.

Identificação dos extremos

Uma vez que encontramos os candidatos para os extremos, precisamos verificar se são de fato extremos. Podemos usar os seguintes argumentos na nossa tarefa:

- Se o vínculo $g = 0$ define uma região compacta, podemos usar o Teorema de Weiestrass que garante a existência de máximos e mínimos absolutos. Tais extremos absolutos estão entre os candidatos encontrados pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Basta então comparar os valores de f entre candidatos para encontrá-los.

- Assumimos que $\nabla g \neq 0$ nos pontos onde $g = 0$. Então podemos usar o Teorema da função implícita para escrever uma das variáveis em função das demais. Por exemplo, no caso $n = 3$, se $g_z \neq 0$ no ponto crítico $p_0 = (a, b, c)$ de f restrita a $g = 0$, então $g(x, y, z) = 0 \iff z = z(x, y)$ em torno de (a, b). Portanto

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & f(x,y,z) \\ \text{sujeta a} & g(x,y,z) = 0 \end{array} \iff \text{maximize}\, f(x, y, z(x, y))$$

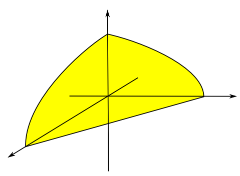
Usamos o teste da Hessiana para $f(x, y, z(x, y))$ em (a, b).

Exemplo 3:
Encontre o maior produto possível dos números positivos x, y, z *se* $x+y+z^2 = 16$.

Solução: Precisamos resolver o seguinte problema

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & f(x,y,z) = xyz \\ \text{sujeta a} & g(x,y,z) = x + y + z^2 - 16 = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{array}$$

Observe que na fronteira da região $\{g(x, y, z) = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, $f(x, y, z) = 0$, e no interior da região $f > 0$. Então podemos supor que $xyz \neq 0$ (pois estamos procurando o valor máximo de f).



Temos $\nabla f = (yz, xz, xy)$ e $\nabla g = (1, 1, 2z)$. Logo, as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ com $g(x, y, z) = 0$ são

$$\left\{ \begin{array}{ccll} yz & = & \lambda & (1) \\ xz & = & \lambda & (2) \\ xy & = & 2\lambda z & (3) \\ x + y + z^2 - 16 & = & 0 & (4) \end{array} \right.$$

Equações (1) e (3) dão $xy = 2yz^2 \implies x = 2z^2$ (pois $y \neq 0$). Similarmente, equações (2) e (3) dão $y = 2z^2$ (pois $x \neq 0$). Substituindo em (4) obtemos

$$2z^2 + 2z^2 + z^2 - 16 = 05z^2 = 16z = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ (pois } z > 0)$$

Então o candidato para o máximo absoluto de f na região escolhida é

$$P_0 = (\frac{32}{5}, \frac{32}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}), \text{ com } f(P_0) = \frac{2^{12}\sqrt{5}}{5^3}.$$

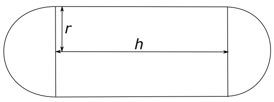
A região D é compacta e f é contínua em D, então pelo Teorema de Weiestrass f atinge seus valores máximo e mínimo em D. Temos $f(x,y,z) \geq 0$, $f(x,y,z) = 0$ nos pontos da fronteira de D e $f(P_0) > 0$. Então, f atinge seu valor máximo em D no ponto P_0. Logo, o maior produto possível dos números positivos x, y, z com $g(x,y,z) = 0$ é $\frac{2^{12}\sqrt{5}}{5^3}$.

Exemplo 4: O problema do tanque de armazenamento

O problema:

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & A(h,r) \\ \text{sujeta a} & V(h,r) = 8000 \end{array}$$

onde $A(h,r)$ é a área do tanque e $V(h,r)$ é o volume do tanque.



A área do tanque é dada por

$$A(h,r) = 2\pi r h + 4\pi r^2,$$

e seu volume é dado por

$$V(h,r) = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Então o problema é

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & A(h,r) = 2\pi r h + 4\pi r^2 \\ \text{sujeta a} & V(h,r) = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 8000 \end{array}$$

Para $A(h,r) = 2\pi r h + 4\pi r^2$, temos

$$\nabla A = (\frac{\partial A}{\partial r}, \frac{\partial A}{\partial h}) = (2\pi h + 8\pi r, 2\pi r).$$

Para $V(h,r) = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3$, temos

$$\nabla V = (\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{\partial h}) = (2\pi r h + 4\pi r^2, \pi r^2).$$

Portanto

$$\nabla A = \lambda \nabla V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\pi h + 8\pi r & = & \lambda(2\pi r h + 4\pi r^2) \\ 2\pi r & = & \lambda(\pi r^2) \end{array} \right.$$

Observe que se $r = 0$ então $h = 0$.

Mas $V(0,0) \neq 8000$, então podemos supor que $r \neq 0$, e daí a segunda equação é equivalente a $\lambda r = 2$.

Substituindo na primeira equação obtemos

$$2\pi h + 8\pi r = \lambda(2\pi r h + 4\pi r^2) \iff h + 4r = \lambda r h + 2\lambda r^2$$

$$\implies h + 4r = 2h + 4r \implies h = 0.$$

Substituindo $h = 0$ em $V(h,r) = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 8000$ obtemos

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 8000 \implies r = r_0 = 10(\frac{6}{\pi})^{\frac{1}{3}}.$$

Então o candidato para o tanque desejado tem o formato de uma esfera de raio r_0.

Vamos mostrar que, de fato, a esfera de raio r_0 é o tanque com a menor área entre os tanques com volume igual a $8000\ m^3$.

Para $V(h,r) = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 8000$, podemos obter h como função de r. De fato

$$\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 8000 \iff h = h(r) = -\frac{4}{3}r + \frac{8000}{\pi r^2}.$$

(Observe que $h(r_0) = 0$.) Então a área dos tanques com volume igual a $8000\ m^3$ é

$$\begin{aligned} \tilde{A}(r) &= A(h(r), r) \\ &= 2\pi r(-\tfrac{4}{3}r + \tfrac{8000}{\pi r^2}) + 4\pi r^2 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^2 + \tfrac{16000}{r}. \end{aligned}$$

Temos $\tilde{A}'(r) = \frac{8}{3}\pi r - \frac{16000}{r^2} = \frac{1}{r^2}(\frac{8}{3}\pi r^3 - 16000)$, e r_0 é a única solução de $\tilde{A}'(r) = 0$. Como $\tilde{A}''(r_0) = \frac{8}{3}\pi + \frac{32000}{r_0^3} > 0$, concluímos que r_0 é um mínimo absoluto de $\tilde{A}$ para $r > 0$.

Portanto, a esfera de raio r_0 e o tanque com menor área entre os tanques com volume igual a $8000\ m^3$.

Aula 25

Multiplicadores de Lagrange: II. otimização sujeita a dois vínculos

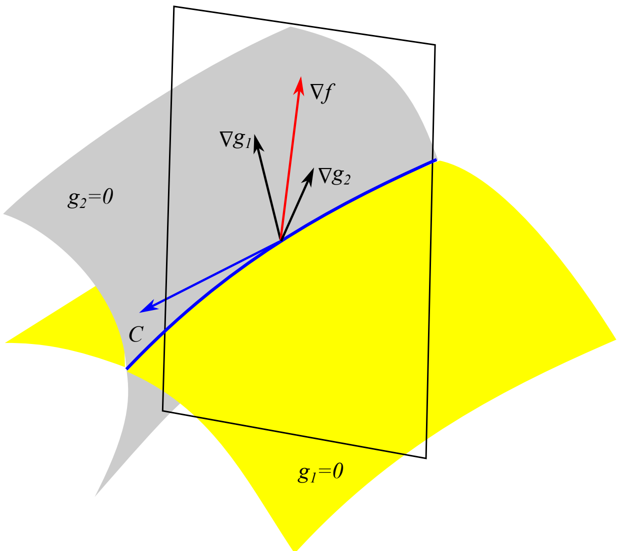
Método dos multiplicadores de Lagrange a dois vínculos

$$\begin{array}{cc} \text{maximize/minimize} & f(x,y,z) \\ \text{sujeita a} & \begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \end{array}$$

Suponha que as superfícies $g_1 = 0$ e $g_2 = 0$ são lisas. Então $\nabla g_1 \neq 0$ sobre $g_1 = 0$ e $\nabla g_2 \neq 0$ sobre $g_2 = 0$. Suponha ainda que as duas superfícies se intersectam transversalmente ao longo de uma curva lisa C. Para isso acontecer, ∇g_1 e ∇g_2 precisam ser $L.I.$

Neste caso, o plano normal a curva C, i.e., o plano ortogonal ao vetor tangente a C, é gerado por ∇g_1 e ∇g_2. Então uma superfície de nível de f é tangente a curva C se, e somente se, ∇f pertence ao plano normal da curve. Equivalentemente,

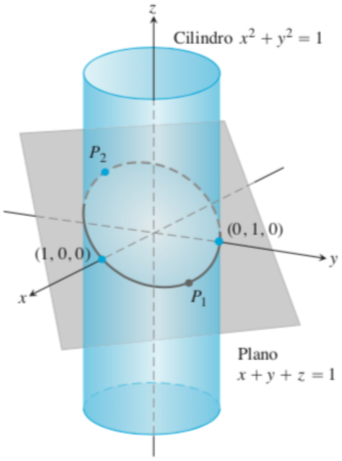
$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2.$$



Para localizar os candidatos para os extremos de f sujeita a dois vínculos, procuramos os valores de x, y, z, λ e μ que simultaneamente satisfazem as equações

$$\begin{cases} \nabla f &= \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x,y,z) &= 0 \\ g_2(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

Exemplo [Thomas] *O plano $x + y + z = 1$ corta o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ em uma elipse. Encontre os pontos sobre a elipse que estão mais próximos e mais afastados da origem.*



Solução: O problema é equivalente a

$$\begin{array}{cc} \text{maximize/minimize} & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{sujeta a} & \left\{ \begin{array}{l} g_1(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Os candidatos para os extremos são solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \nabla f & = & \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1(x,y,z) & = & 0 \\ g_2(x,y,z) & = & 0 \end{array} \right.$$

Temos $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g_1 = (1,1,1)$, $\nabla g_1 = (2x, 2y, 0)$. Logo, $\lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 = (\lambda + 2\mu x, \lambda + 2\mu y, \lambda)$.

Então os candidatos para os extremos são solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2x & = & \lambda + 2\mu x \\ 2y & = & \lambda + 2\mu y \\ 2z & = & \lambda \\ x + y + z - 1 & = & 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo, obtemos quatro soluções $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$, $P_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Temos $f(P_1) = f(P_2) = 1$, $f(P_3) = 4 - 2\sqrt{2}$, $f(P_4) = 4 + 2\sqrt{2}$.

A interseção de $g_1 = 0$ e $g_2 = 0$ é uma elipse, que é compacta. Como f é contínua, pelo Teorema de Weiestrass, f atinge seu valore máximo e mínimo absoluto sobre a elipse.

Portanto, os pontos sobre a elipse mais próximos da origem são P_1 e P_2. O ponto sobre a elipse mais afastado da origem é P_4.

Aula 12 de Consolidação: Extremos absolutos e multiplicadores de Lagrange

Questão 1: Seja f a função dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4.$$

(a) Encontre os extremos (máximos e mínimos) absolutos da função f na região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

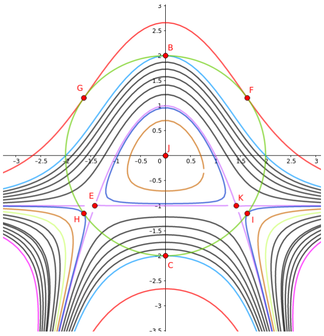
(b) Classifique os pontos críticos de f no interior e na fronteira de D.

Solução: (a) A região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ é compacta. Seu bordo é a circunferência $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ de centro $O = (0, 0)$ e raio 2 e seu interior é o disco aberto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}.$$

Como a função $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ é contínua na região compacta D, ela admite, pelo Teorema de Weierstrass, mínimos e máximos absolutos em D. Portanto, basta encontrarmos os pontos críticos de f no interior e na fronteira de D e comparar os valores de f nestes pontos. (**Não precisamos classificar os pontos críticos de f.**)

Observação: Analisando as curvas de nível de f podemos visualizar (pelo menos neste exemplo!) os pontos críticos e os pontos de extremos da função f em D. Estes importantes pontos são destacados na figura abaixo: no interior de D são os pontos onde a curva de nível de f não é regular ou seja, onde o gradiente de f é nulo. Na Figura abaixo, são os pontos onde a curva de nível é localmente um cruzamento de duas curvas (pontos de sela) ou é em ponto isolado (máximo ou mínimo local). Na fronteira (bordo) de D os pontos críticos são os pontos de tangencia (tome cuidado! Ver Q2) das curvas de nível de f com o bordo de D.



Curvas de nível $f = k$ (a fronteira $D : x^2 + y^2 = 4$ em verde).

Comparando os valores de k nos pontos críticos no interior e na fronteira de D podemos concluir que :

- Valor máximo absoluto de f em D é ≈ 11 que ocorre nos pontos F e G.
- Valor mínimo absoluto de f em D é 4 que ocorre no ponto J.

Encontrando os pontos críticos de f em D

Passo 1: Encontrando os pontos críticos de f no interior de D:
A função $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ possui derivadas parciais contínuas de toda ordem. Então os pontos críticos de f no interior de D são soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $x = 0$ ou $y = -1$. Substituindo na segunda equação, obtemos três pontos críticos da função f

$$p_1 = (0,0),\ p_2 = (\sqrt{2}, -1),\ p_3 = (-\sqrt{2}, -1)$$

todos no interior de D. Temos $f(0,0) = 4$ e $f(\pm\sqrt{2}, -1) = 5$.

Passo 2: Encontrando os pontos críticos de f no bordo/fronteira de D:
Vamos usar o método dos Multiplicadores de Lagrange. O problema é

$$\begin{array}{cc} \text{maximize/minimize} & f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4 \\ \text{sujeta a} & g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}$$

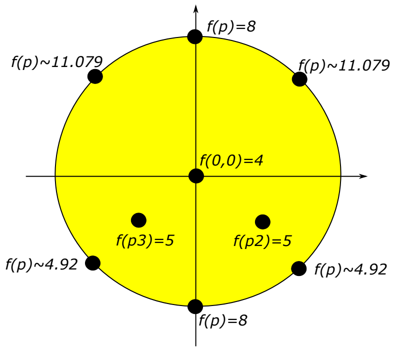
Os possíveis pontos de extremos de f restrita à fronteira de D estão entre as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f &= & \lambda \nabla g \\ g &= & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2xy &= & \lambda(2x) \\ 2y + x^2 &= & \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - 4 &= & 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos seis possíveis extremos de f restrita à fronteira de D: $p_{4,5} = (0, \pm 2)$ e $p_{6,7}^{8,9} = (\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Temos

$$f(0,\pm 2) = 8,$$
$$f(\pm\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, \tfrac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 + \tfrac{16\sqrt{3}}{9}\,(\approx 11,079),$$
$$f(\pm\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, -\tfrac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 - \tfrac{16\sqrt{3}}{9}\,(\approx 4,92).$$



Concluímos que em D: f tem um mínimo absoluto em $(0,0)$ com valor $f(0,0) = 4$ e máximos absolutos em $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ com valor $f(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 + \frac{16\sqrt{3}}{9} \approx 11.079$.

(b) Vamos aplicar agora o Teste da Hessiana para determinar a natureza dos pontos críticos p_1, p_2 e p_3 no interior de D.

A função f possui derivadas parciais de ordem 1 e 2 que são contínuas. Então a Hessiana de f é dada por

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+y) & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

- No ponto $p_1 = (0,0)$, temos $H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $\det(H(0,0)) > 0$ e $f_{xx}(0,0) > 0$, o ponto $p_1 = (0,0)$ é **um mínimo local** de f com $f(0,0) = 4$.

- Nos pontos $p_2 = (\sqrt{2}, -1)$ e $p_3 = (-\sqrt{2}, -1)$ temos:

$$H(\pm\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(H(\pm\sqrt{2}, -1)) < 0$, p_2 e p_3 são **pontos de sela** de f, então não são extremos locais de f.

Para determinar a natureza dos pontos críticos $p_{4,5}$ e $p_{6,7}^{8,9}$ de f restrita ao bordo de D, observamos que a fronteira C de D, dada por $g(x,y) =$

$x^2+y^2-4=0$, é uma curva lisa pois $\nabla g(x,y)=(2x,2y)\neq(0,0)$ nos pontos onde $g(x,y)=0$.

Temos duas possibilidades:

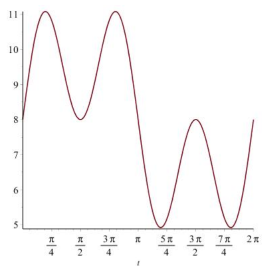
- Parametrizar a curva C por, por exemplo,

$$\gamma(t)=(2\cos(t),2\sin(t)),\quad t\in[0,2\pi].$$

- Expressar C ao redor dos pontos críticos como o gráfico de uma função, por exemplo:
  - Em $(0,\pm 2)$: $x=\pm\sqrt{4-y^2}$, $-1<y<1$
  - Em $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{2\sqrt{3}}{3})$: $y=\pm\sqrt{4-x^2}$, $-1<x<1$

Vamos usar a primeira usar a parametrização de C. A restrição de $f(x,y)=x^2+y^2+x^2y+4$ a C é dada por

$$h(t)=f(\gamma(t))=f(2\cos(t),2\sin(t))=8+8\cos^2(t)\sin(t),\quad t\in[0,2\pi].$$



Observe que o gráfico de h na figura acima confirma que temos seis pontos críticos da função f restrita a fronteira de D e indica a natureza de tais pontos.

Derivando $h(t)=8+8\cos^2(t)\sin(t)$ obtemos

$$h'(t)=-16\cos(t)\sin^2(t)+8\cos^3(t)$$
$$h''(t)=16\sin^3(t)-56\cos^2(t)\sin(t).$$

Temos que $h'=0$ em $\bar{t_1}=\frac{\pi}{2}$, $\bar{t_2}=\frac{3\pi}{2}$, $t_3=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $t_4=\arctan\frac{-\sqrt{2}}{2}$, sendo que t_3 e t_4 fornecem de fato, cada um deles, dois valores em $[0,2\pi]$: $\bar{t_3},\bar{t_4},\bar{t_5},\bar{t_6}$. De qualquer forma basta notar que quando consideramos $\bar{t}$ tal que $(\cos\bar{t},\sin\bar{t})=p$ onde p é um dos 6 ($p_{4,5}$ ou $p^{8,9}_{6,7}$) pontos críticos de f, temos que $h'(\bar{t})=0$.

- Nos pontos $(0,\pm 2)$, temos:

Para $(2\cos(\bar{t_1}), 2\sin(\bar{t_1})) = (0,2)$

$$h''(\bar{t_1}) \quad = \quad 16(2^3) > 0,$$

e para $(2\cos(\bar{t_2}), 2\sin(\bar{t_2})) = (0,-2)$

$$h''(\bar{t_2}) = -16(2^3) < 0.$$

Assim temos:

- um mínimo local de h em $\bar{t_1}$ e portanto um mínimo local de f restrita a C no ponto $(0,2)$;

- um máximo local de h em $\bar{t_2}$ e portanto um máximo local de f restrita a C no ponto $(0,-2)$.

Os valores de f nestes pontos são: $f(0,\pm 2) = 8$.

• Nos pontos $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ e $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ temos:

Para $(2\cos(\bar{t}), 2\sin(\bar{t})) = (\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

$$h''(\bar{t}) \quad = \quad 8\sin(\bar{t})(2\sin^2(\bar{t}) - 7\cos^2(\bar{t})) = -\tfrac{253}{3}\sqrt{3} < 0,$$

e para $(\cos(\bar{t}), \sin(\bar{t})) = (\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$

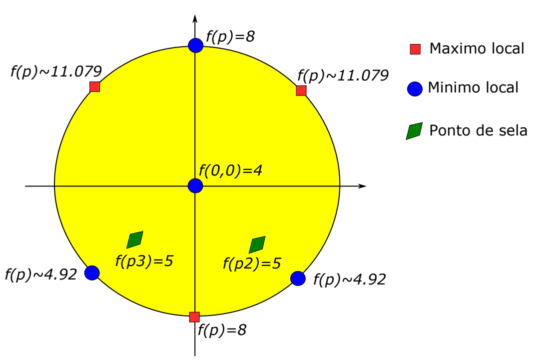
$$h''(\bar{t}) = \frac{253}{3}\sqrt{3} > 0.$$

Portanto, os pontos $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ são máximos locais de f restrita a C e os pontos $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ são mínimos locais de f restrita a C.

Temos

$$f(\pm\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, \tfrac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 + \tfrac{16\sqrt{3}}{9} \quad (\approx 11,079)$$
$$f(\pm\tfrac{2\sqrt{6}}{3}, -\tfrac{2\sqrt{3}}{3}) = 8 - \tfrac{16\sqrt{3}}{9} \quad (\approx 4,92).$$

Resumindo:



Questão 2. A temperatura em um ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$, onde x, y são medidos em metros e T em graus Celsius. Um ponto P desloca-se sobre a circunferência centrada na origem de raio $\sqrt{5}$. Quais são as temperaturas máximas e mínimas que o ponto P atinge?

Solução: O problema é:

$$\begin{array}{cl} \text{maximize/minimize} & T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 \\ \text{sujeta a} & g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{array}$$

Usando o método de Multiplicadores de Lagrange com um vínculo, os possíveis pontos de extremos de T restrita à condição dada estão entre as soluções do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla T & = & \lambda \nabla g \\ g & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 8x - 4y & = & \lambda(2x) \\ 2y - 4x & = & \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - 5 & = & 0. \end{array} \right.$$

Analisando as primeiras duas equações, temos $x = 0 \implies y = 0$, e $y = 0 \implies x = 0$. Mas $(x, y) = (0, 0)$ não é solução da terceira equação. Então podemos supor que $x \neq 0$. Logo, das primeiras duas equações obtemos

$$\frac{y}{x} = \frac{4 - \lambda}{2} = \frac{2}{1 - \lambda}.$$

Portando

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) = 4 \iff -5\lambda + \lambda^2 = 0.$$

Logo $\lambda = 0$ ou $\lambda = 5$.

Para $\lambda = 0$ as primeiras duas equações tornam-se $2x = y$. Substituindo na terceira equação obtemos $x^2 + 4x^2 - 5 = 0$, ou seja $x = 1$ e $y = 2$, ou $x = -1$ e $y = -2$.

Para $\lambda = 5$ as primeiras duas equações tornam-se $x = -2y$. Substituindo na terceira equação obtemos $4y^2 + y^2 - 5 = 0$, ou seja $y = 1$ e $x = -2$, ou $y = -1$ e $x = 2$.

Então temos quatro possíveis pontos de extremos de f restrita à circunferência dados: $(1, 2), (-1, -2), (-2, 1)$ e $(2, -1)$.

Como T é contínua em $\mathbb{R}^2$ e a restrição $D : g(x, y) = 0$ é um conjunto compacto, o Teorema de Weierstrass nos garante que f assume os valores extremos absolutos em D.

Comparando os valores:

$$T(1, 2) = T(-1, -2) = 0, \quad T(-2, 1) = T(2, -1) = 25$$

concluímos que a temperatura mínima atingida por P é de 0^o (nos pontos $(-1,-2)$ e $(1,2)$) e a temperatura máxima é de 25^o (nos pontos $(-2,1)$ e $(2,-1)$). Ver Figura 1.

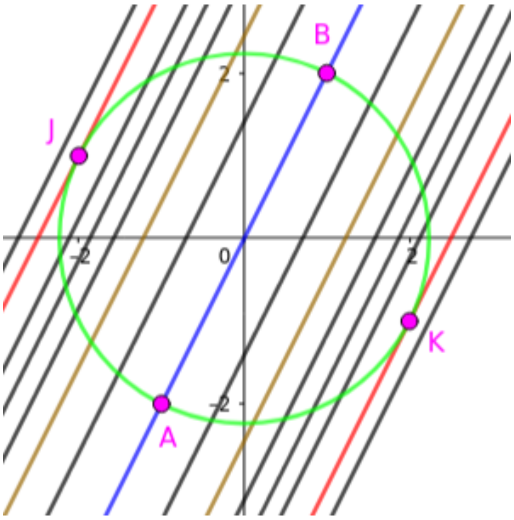


Figura 1: Curvas de nível da função T e a curva $g = 0$. Os pontos de tangencia J e K são os mínimos de T restrita a $g = 0$. Observe que $T(x, y) = (2x - y)^2$, portanto as curvas de nível $c > 0$ são duas retas distintas $2x - y = \pm c$. Quando $c = 0$, temos duas retas idênticas $2x - y = 0$. Observe que $\nabla T(1, 2) = \nabla T(-1, -2) = (0, 0)$. Portanto, os pontos $A = (-1, -2)$ e $B = (2, 1)$ são "pontos de tangencia" da curva de nível $T(x, y) = (2x-y)^2 = 0$ com a curva $g = 0$ (o vetor nulo é considerado paralelo a qualquer vetor).

Observação: Uma outra maneira de resolver a questão é parametrizar a curva $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$ por $(x(t), y(t)) = (\sqrt{5}\cos(t), \sqrt{5}\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ e procurar os valores extremos da função

$$h(t) = f((\sqrt{5}\cos(t), \sqrt{5}\sin(t))) = 5(2\cos(t) - \sin(t))^2,\ t \in [0, 2\pi].$$

Questão 3. Determine dois números reais cuja soma seja 9 e a soma de seus quadrados seja a menor possível.

Solução: O problema é:

$$\begin{array}{rc} \text{minimize} & f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{sujeta a} & g(x, y) = x + y - 9 = 0 \end{array}$$

Usando o método de Multiplicadores de Lagrange com um vínculo, os possíveis pontos de extremos de f restrita à condição dada estão entre as soluções do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla T & = & \lambda \nabla g \\ g & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & \lambda \\ 2y & = & \lambda \\ x+y & = & 9. \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema, obtemos um **possível** ponto de extremo de f restrita à reta dada: $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$.

Como f é contínua mas a restrição $g(x,y) = 0$ não é um conjunto compacto **não podemos usar o teorema de Weierstrass**.

Para garantir que f restrita a $x + y = 9$ assume um valor extremo em $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ usamos o seguinte argumento. Da restrição $g(x,y) = x + y - 9 = 0$ obtemos $y = 9 - x$. Substituindo em f, o problema torna-se

$$\text{minimize}\, h(x) = f(x, 9-x) = x^2 + (9-x)^2 = 2x^2 + 18x + 81,\ x \in \mathbb{R}.$$

A função h tem claramente um mínimo absoluto em $x = \frac{9}{2}$. Portanto, concluímos que $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ é ponto de mínimo de f restrita à condição dada, e os números procurados são $x = y = \frac{9}{2}$. Ver Figura 2.

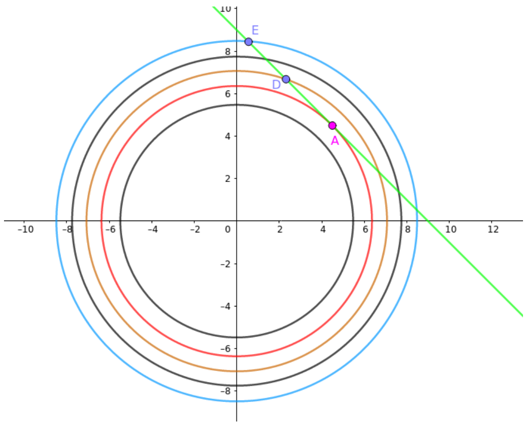


Figura 2: Curvas de nível de f e da restrição $x + y = 9$.