Uma relação entre polinômios ortogonais e funções positivas definidas

- Polinômios de Legendre
  - ✓ Definições e propriedades
- Polinômios de Gegenbauer
  - ✓ Propriedades e suas “convergências”
- Polinômios no disco e funções positivas definidas
  - ✓ Definições, propriedades, exemplos
- Funções positivas definidas
  - ✓ Alguns resultados e o Teorema de Schoenberg revisitado

Funções positivas definidas em produtos cartesianos

Uma função contínua $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ é *positiva definida em $S^d \times S^m$* $(d, m \geq 1)$ quando o núcleo

$$((x,z),(y,w)) \in (S^d \times S^m) \times (S^d \times S^m) \mapsto f(x \cdot y, z \cdot w),$$

é positivo definido em $S^d \times S^m$.

Teorema

([GMP16a]) $f \in \mathcal{P}(S^d \times S^m)$ $(d, m = 1, \ldots, \infty)$, se, e somente se,

$$f(x,y) = \sum_{k,l \geq 0} a_{k,l} c_k(d,x) c_l(m,y),$$

onde $a_{k,l} \geq 0$, $k, l \geq 0$ e $\sum_{k,l \geq 0} a_{k,l} < \infty$

- $c_k(\infty, x) := x^k$

interessados em aplicações estatísticas cujo contexto reside no produto "espaço x tempo", Berg e Porcu

Seja G um grupo localmente compacto. Uma função contínua $f : [-1,1] \times G \to \mathbb{C}$ é *positiva definida em $S^d \times G$* $(d \geq 1)$ quando o núcleo

$$((x,u),(y,v)) \in (S^d \times G) \times (S^d \times G) \mapsto f(x \cdot y, u^{-1}v),$$

é positivo definido em $S^d \times G$. ($f \in \mathcal{P}(S^d \times G)$).

Teorema

([BP16, Theorem 3.3]) $f \in \mathcal{P}(S^d \times G)$, se e somente se,

$$f(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,d}(u) c_n(d,x), \quad x \in [-1,1],\ u \in G.$$

onde $\varphi_{n,d} \in \mathcal{P}(G)$, $\forall n$, e $\sum \varphi_{n,d}(e_G) < \infty$.
A série acima converge uniformemente em $[-1,1] \times G$ e

$$\varphi_{n,d}(u) = \frac{N_n(d)\sigma_{d-1}}{\sigma_d} \int_{-1}^{1} f(x,u) c_n(d,x)(1-x^2)^{(d-2)/2}\, dx.$$

$\star$ $\varphi_{n,d}$: funções d-Schoenberg

BP $\supset$ GMP: $G = O(m+1)$ e BP $\supset$ Teorema de Schoenberg: $G = \{e\}$

técnica similar a de Schoenberg:

Teorema

([BP16, Theorem 3.10]) $f \in \mathcal{P}(S^\infty \times G)$, *se e somente se,*

$$f(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(u) x^n, \quad x \in [-1,1],\ u \in G.$$

onde $\varphi_n \in \mathcal{P}(G)$, $\forall n$, *e* $\sum \varphi_{n,d}(e_G) < \infty$.

Ainda mais, *técnica similar a de Schoenberg+conhecimento sobre diferenciabilidade de f [Zie14]*

$$\varphi_n(u) = \lim_{d\to\infty} \varphi_{n,d}(u), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad u \in G.$$

pd em produto de esferas complexas com grupo l.c.

[BPP$_1$]: pd em produto de um par de Gelfand com um grupo localmente compacto: generalizando os casos $S^d \times S^m$ e $S^d \times G$

Teorema

([BPP$_1$]) $f \in (\Omega_{2q} \times G)$, $q \geq 2$, se e somente se,

$$f(z,u) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varphi_{m,n}^{q-2}(u) R_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in \overline{\mathbb{D}},\ u \in G.$$

onde $\varphi_{m,n}^{q-2} \in \mathcal{P}(G)$, $\forall m,n$, e $\sum \varphi_{m,n}^{q-2}(e_G) < \infty$.
A série acima é uniformemente convergente em $\overline{\mathbb{D}} \times G$.

pd em $\Omega_\infty \times G$

técnica Schoenberg, Berg e Porcu:

$$\lim_{d\to\infty} c_n(d,x) = x^n \text{ uniforme em } n, \text{ para cada } x \text{ fixado}$$

Conjectura: $\lim_{\alpha\to\infty} R^{\alpha}_{m,n}(z) = z^m \overline{z}^n$ uniforme em m, n para cada z fixado

??

Teorema de Schoenberg revisitado

$$\boxed{f \in \mathcal{P}(S^d \times G) : f(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,d}(u) c_n(d,x); \quad \varphi_{n,d} \in \mathcal{P}(G)}$$

$$\boxed{f \in \mathcal{P}(S^\infty \times G) : f(x,u) \stackrel{\star}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(u) x^n; \quad \varphi_n \in \mathcal{P}(G), \quad \varphi_n(u) = \lim_{d\to\infty} \varphi_{n,d}(u)}$$

Teorema

([BPP$_2$]) Seja $f \in \mathcal{P}(S^\infty \times G)$ e considere $\varphi_{n,d}$, $n \geq 0$, as funções d-Schoenberg associada a f. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{d\to\infty} \varphi_{n,d}(u) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(0,u)}{\partial x^n} =: \varphi_n(u)$$

uniformemente para u em subconjuntos compactos de G.

$\varphi_n \in \mathcal{P}(G)$ e $\{\varphi_n\}$ é a sequência de coeficientes em $\star$.

Prova.

$$c_n(d,x) \overset{Form.Rod.}{=} \frac{(-1)^n}{2^n(d/2)_n}(1-x^2)^{1-d/2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+d/2-1}.$$

$$\varphi_{n,d}(u) = \frac{N_n(d)\sigma_{d-1}}{\sigma_d}\int_{-1}^{1} f(x,u)c_n(d,x)(1-x^2)^{d/2-1}\,dx$$

$$= \frac{N_n(d)\sigma_{d-1}}{\sigma_d}\frac{(-1)^n}{2^n(d/2)_n}\int_{-1}^{1} f(x,u)\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+d/2-1}\,dx$$

$$\underset{[Zie14]}{\overset{f\in C^\infty,\star}{=}} \frac{N_n(d)\sigma_{d-1}}{\sigma_d}\frac{1}{2^n(d/2)_n}\int_{-1}^{1}\frac{\partial^n f(x,u)}{\partial x^n}(1-x^2)^{n+d/2-1}\,dx$$

$$\star\ \left.\underbrace{\frac{\partial^k f(x,u)}{\partial x^k}\overbrace{\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(1-x^2)^{n+d/2-1}}^{(1-x^2)^{k+d/2}R_k(x)}}_{\underbrace{(1-x^2)^k\partial^k f(x,u)/\partial x^k}_{<\infty}\ (1-x^2)^{d/2}R_k(x)}\ \right|_{x=\pm 1} = 0,\ k=0,1,\dots,n-1$$

$$\varphi_{n,d}(u) = \frac{N_n(d)\sigma_{d-1}}{\sigma_d} \frac{1}{2^n (d/2)_n} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^n f(x,u)}{\partial x^n} (1-x^2)^{n+d/2-1}\, dx$$

$$\tau_{d/2-1} = \frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_d} (1-x^2)^{d/2-1}\, dx$$

$$\varphi_{n,d}(u) = \underbrace{\frac{N_n(d)}{2^n (d/2)_n}}_{\xrightarrow{d\to\infty} \frac{1}{n!}} \underbrace{\int_{-1}^{1} \overbrace{(1-x^2)^n \frac{\partial^n f(x,u)}{\partial x^n}}^{g(x)}\, d\tau_{d/2-1}(x)}_{\xrightarrow{d\to\infty} ??} \xrightarrow{d\to\infty} ??$$

$$(b)_n = \overbrace{b(b+1)\ldots(b+n-1)}^{n\ \ termos}$$

$$\frac{N_n(d)}{2^n (d/2)_n} = \frac{1}{n!} \frac{(d)_{n-1}(d+2n-1)}{2^n (d/2)_n}$$

Seja $\mathcal{F} \subset C([-1,1])$ um conjunto de funções contínuas em $[-1,1]$ tal que

(i) $\mathcal{F}$ é limitado, i.e., $\sup_{g\in\mathcal{F}} ||g||_\infty < \infty$,

(ii) $\mathcal{F}$ é equicontínuo em $x=0$, i.e., para todo $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$ tal que $|g(x) - g(0)| \leq \epsilon$ para toda $g \in \mathcal{F}$ e todo x real com $|x| \leq \delta$.

Então $\lim\limits_{d\to\infty} \int g \, d\tau_{(d-2)/2} = g(0)$, uniformemente para $g \in \mathcal{F}$.

$$\therefore \lim_{d\to\infty} \varphi_{n,d}(u) = \lim_{d\to\infty} \overbrace{\frac{N_n(d)}{2^n(d/2)_n}}^{\to\frac{1}{n!}} \overbrace{\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \frac{\partial^n f(x,u)}{\partial x^n} \, d\tau_{d/2-1}(x)}^{\to g(0)}$$
$$= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(0,u)}{\partial x^n},$$

uniform. em subconjutos compactos de G

$$\mathcal{F} := \left\{ x \mapsto \overbrace{(1-x^2)^n \frac{\partial^n f(x,u)}{\partial x^n}}^{g(x)} ; u \in K \right\}, \quad K \overset{compacto}{\subset} G,$$

é limitado e equicontínuo.

$\blacksquare$

pd em $\Omega_\infty \times G$

Teorema

([BPP$_2$]) Uma função contínua $f : \overline{\mathbb{D}} \times G \to \mathbb{C}$ *é positiva definida em* $\Omega_\infty \times G$*, se e somente se, existe uma sequencia* $(\varphi_{m,n})_{m,n\geq 0}$ *em* $\mathcal{P}(G)$ *com* $\sum \varphi_{m,n}(e_L) < \infty$ *tal que*

$$f(z,u) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varphi_{m,n}(u) z^m \overline{z}^n, \quad z \in \overline{\mathbb{D}},\ u \in G.$$

A série acima é uniformemente convergente em $\overline{\mathbb{D}} \times G$*. Além disso,*

$$\lim_{q\to\infty} \varphi_{m,n}^{q-2}(u) = \varphi_{m,n}(u) = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} f(0,u)}{\partial z^m \partial \overline{z}^n},$$

uniformemente em subconjuntos compactos de G*.*

Funções estritamente positivas definidas - um pequeno histórico

Na teoria de aproximação, funções positivas definidas são usadas na interpolação de dados arbitrários sobre a esfera: dados n pontos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em S^m (ou Ω_{2q}) e uma função $h : S^m \to \mathbb{R}$, o problema de interpolação requer encontrar uma função contínua $s : S^m \to \mathbb{R}$ da forma (para alguma função f)

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x \cdot x_j), \quad x \in S^m, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

de modo que $s(x_i) = h(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Se escolhemos f sendo positiva definida, então a matriz de interpolação pode ser singular e o problema de interpolação pode não ter solução única.... Mas se f é estritamente positiva definida então o problema de interpolação tem uma única solução para qualquer n e quaisquer n pontos dados.

$\boxed{f(\cos x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k(m,x)}$

• Estrita Positividade Definida (SPD)

90's: E. Cheney, V. Menegatto, A. Ron, X. Sun, M. Schreiner

Caso: SPD em S^m, $m \geq 2$

- **[CMS03]** f é SPD em S^m se, e somente se, $\{k \in \mathbb{N} : a_k > 0\}$ contém infinitos inteiros pares e ímpares.

Caso: SPD em S^1

- **[MOP06]** f é SPD em S^1 se, e somente se, $\{k \in \mathbb{Z} : a_{|k|} > 0\}$ intercepta toda progressão aritmética em $\mathbb{Z}$.

Casos: SPD em $S^m \times S^d$, $S^1 \times S^1$, $S^1 \times S^m$, $m, d \geq 2$

- [GM16]; [GMP, GMP16b]

✓ SPD não depende dos valores dos coeficientes nas expansões, SPD depende apenas dos índices nos quais os coeficientes são positivos.

$$\boxed{f(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} R_{m,n}^{q-2}(z)}$$

Caso: SPD em Ω_{2q}, $q \geq 2$

- **[MP01]** Se f é SPD em Ω_{2q}, então $\{m - n : a_{m,n} > 0\}$ intercepta toda progressão aritmética em $\mathbb{Z}$.
- **[GM17]** Se $\{m - n : a_{m,n} > 0\}$ intercepta toda progressão aritmética em $\mathbb{Z}$, então f é SPD em Ω_{2q}.

Caso: SPD em Ω_2

- **[MOP06]** f é SPD em Ω_2 se, e somente se, the set $\{k \in \mathbb{Z} : a_k > 0\}$ intercepta toda progressão aritmética em $\mathbb{Z}$.

Casos: SPD em $\Omega_{2q} \times \Omega_{2p}$, $q, p \geq 1$

- Castro, Massa, Peron

Funções positivas definidas em esferas e suas caminhadas através das dimensões

- [Mat65]: propôs operadores chamados Montèe e Descente que preservam a propriedade de positividade definida alterando a dimensão do espaço inicialmente considerado. Tal propriedade tem sido chamada caminhada através das dimensões.

- [Wen95]: foi usado o operador Montée com certa classe de funções radiais.

- [PZB16]: foi usado uma versão fracional do operador de Montée para obter versões generalizadas das funções de Wendland.

- [BzC15]: $d \geq 2$

1. Se $f \in \mathcal{P}(S^d)$ tem derivada $f' \in C([-1,1])$, então $f' \in \mathcal{P}(S^{d+2})$ (Descente).
2. Se $f \in \mathcal{P}(S^d)$ é SPD e tem derivada $f' \in C([-1,1])$, então $f' \in \mathcal{P}(S^{d+2})$ é SPD.
3. Se $f \in \mathcal{P}(S^{d+2})$, então existe uma constante c tal que $c + \mathcal{I}f \in \mathcal{P}(S^d)$ (Montèe).
4. Se $f \in \mathcal{P}(S^{d+2})$ é SPD, então existe uma constante c tal que $c + \mathcal{I}f \in \mathcal{P}(S^d)$ é SPD.
5. Se $f \in \mathcal{P}(S^{d+2})$ e todos os coeficientes de Schoenberg são positivos, então $\mathcal{I}f \in \mathcal{P}(S^d)$ e todos seus coeficientes de Schoenberg são positivos.

$$(\mathcal{I}f)(x) = \int_{-1}^{x} f(u)du \quad x \in [-1,1].$$

[MPP]: Se f admite $\mathcal{D}_z f$ e $\mathcal{D}_{\overline{z}} f$ contínuas em $\overline{\mathbb{D}}$:

1. Se $f \in \mathcal{P}(\Omega_{2q})$, então $\mathcal{D}_z f, \mathcal{D}_{\overline{z}} f, \mathcal{D}_x f \in \mathcal{P}(\Omega_{2q+2})$.

2. Se $f \in \mathcal{P}(\Omega_{2q})$ e

$$\{m - n : a^{q-2}_{m,n} > 0, m, n \geq 1\} \cap (N\mathbb{Z} + j) \neq \emptyset, \quad \forall N, j$$

   então $\mathcal{D}_z f, \mathcal{D}_{\overline{z}} f$ e $\mathcal{D}_x f$ são SPD em Ω_{2q+2}.

   Se f admite z-primitiva e $\overline{z}$-primitiva em $\overline{\mathbb{D}}$:

3. Se $f \in \mathcal{P}(\Omega_{2q+2})$, então existem constantes reais c e C tais que $c + \mathcal{I}f, C + \overline{\mathcal{I}}f \in \mathcal{P}(\Omega_{2q})$.

4. Se f é SPD em Ω_{2q+2}, então existem constantes reais c e C tais que $c + \mathcal{I}f, C + \overline{\mathcal{I}}f$ são SPD em Ω_{2q}.

$$\mathcal{I}(f)(z) := \int_\gamma f(w)\, dw \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{I}}(f)(z) := \int_\gamma f(w)\, d\overline{w},$$

onde γ é um caminho em $\overline{\mathbb{D}}$ ligando a origem a z.

Referências

- C. Berg and E. Porcu, *From schoenberg coefficients to coefficients to schoenberg functions*, Constr. Approx. (2016), to appear.
- J. C. Guella, V. A. Menegatto, and A. P. Peron, *An extension of a theorem of Schoenberg to products of spheres*, Banach J. Math. Anal. **10** (2016), no. 4, 671–685.
- C. Berg, A. P. Peron, and E. Porcu, *Orthogonal expansions related to compact gelfand pairs*, submited (2017).
- C. Berg, A. P. Peron, and E. Porcu, *Schoenberg's theorem for real and complex hilbert spheres revisited*, submited (2017).

- D. Chen, V. A. Menegatto, and X. Sun, *A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 9, 2733–2740 (electronic).

- J. C. Guella and V. A. Menegatto, *Strictly positive definite kernels on a product of spheres*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), no. 1, 286–301.

- J. C. Guella, V. A. Menegatto, and A. P. Peron, *Strictly positive definite kernels on a product of circles*, Positivity, to appear.

- Jean C. Guella, Valdir A. Menegatto, and Ana P. Peron, *Strictly positive definite kernels on a product of spheres II*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12** (2016), 103, 15 pages.

- V. A. Menegatto, C. P. Oliveira, and A. P. Peron, *Strictly positive definite kernels on subsets of the complex plane*, Comput. Math. Appl. **51** (2006), no. 8, 1233–1250.
- V. A. Menegatto and A. P. Peron, *A complex approach to strict positive definiteness on spheres*, Integral Transform. Spec. Funct. **11** (2001), no. 4, 377–396.
- J. C .Guella and V. A. Menegatto, *Unitarily invariant strictly positive definite kernels on spheres*, submited.
- J. Ziegel, *Convolution roots and differentiability of isotropic positive definite functions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), no. 6, 2063–2077.

- R. K. Beatson and W. zu Castell, *Dimension hopping and families of strictly positive definite zonal basis functions on spheres*, arXiv:1510.08658 (2015).
- G. Matheron, *Les variables règionalisees et leur estimation*, Masson, Paris (1965).
- E. Massa, A. P. Peron, and E. Porcu, *Positive definite functions on complex spheres and their walks through dimensions*, submited (2017).
- E. Porcu, V.P. Zastavnyi, and M. Bevilacqua, *Buhmann covariance functions, their compact supports, and their smoothness*, Arxiv manuscript (2016).
- Holger Wendland, *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*, Adv. Comput. Math. **4** (1995), no. 4, 389–396.