Uma relação entre polinômios ortogonais e funções positivas definidas

- Polinômios de Legendre
  - ✓ Definições e propriedades

- Polinômios de Gegenbauer
  - ✓ Propriedades e suas "convergências"

- Polinômios no disco e funções positivas definidas
  - ✓ Definições, propriedades, exemplos

- Funções positivas definidas
  - ✓ Alguns resultados e o Teorema de Schoenberg revisitado

Polinômios no disco - Zernike generalizado

- $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$
- $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ o disco unitário fechado.

Dados m e n inteiros não negativos, o *polinômio no disco* de grau $m+n$ em x e y associado a um número real $\alpha > -1$ é a função $R^{\alpha}_{m,n}$ dada por

$$R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta}) := r^{|m-n|} e^{i(m-n)\theta} R^{(\alpha,|m-n|)}_{m\wedge n}(2r^2-1),$$

$z := re^{i\theta} = x + iy \in \overline{\mathbb{D}}$, $m \wedge n := \min\{m, n\}$ e

$$R^{(\alpha,\beta)}_k(x) = \frac{P^{(\alpha,\beta)}_k(x)}{P^{(\alpha,\beta)}_k(1)}, \quad x \in [-1, 1].$$

$$R^{\alpha}_{m,n}(z) = \begin{cases} R^{(\alpha,m-n)}_n(2z\overline{z}-1)z^{m-n}, & m \geq n \\ R^{(\alpha,n-m)}_m(2z\overline{z}-1)\overline{z}^{n-m}, & m \leq n \end{cases}$$

✓ $R^{\alpha}_{m,n}$ é um polinômio de grau m em z e de grau n em $\overline{z}$.

Propriedades

$\alpha > -1$:

- $R^{\alpha}_{m,n}(e^{i\varphi}z) = e^{i(m-n)\varphi}R^{\alpha}_{m,n}(z),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ z \in \overline{\mathbb{D}}$;
- $R^{\alpha}_{m,n}(1) = 1$;
- $R^{\alpha}_{m,n}(\overline{z}) = \overline{R^{\alpha}_{m,n}(z)} = R^{\alpha}_{n,m}(z),\ z \in \overline{\mathbb{D}}$.

$$\boxed{R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta}) = r^{|m-n|}e^{i(m-n)\theta}R^{(\alpha,|m-n|)}_{m\wedge n}(2r^2-1), z = re^{i\theta}}$$

$\alpha > 0$: $\{R^\alpha_{m,n} : 0 \leq m, n < \infty\}$ é um sistema ortogonal completo em $L^2(\overline{\mathbb{D}}, dm_\alpha)$

$$dm_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\left(1 - x^2 - y^2\right)^\alpha dxdy, \quad z = x + iy$$

$$dm_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} r\left(1 - r^2\right)^\alpha drd\psi, \quad z = re^{i\psi}, r \in [0,1], \psi \in [0, 2\pi)$$

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} dm_\alpha = 1$$

- $$\int_{\overline{\mathbb{D}}} R^\alpha_{m,n}(z)\overline{R^\alpha_{k,l}(z)} dm_\alpha(z) = \frac{1}{h^\alpha_{m,n}}\delta_{m,k}\delta_{n,l}$$

onde

$$h^\alpha_{m,n} = \frac{m+n+\alpha+1}{\alpha+1}\begin{pmatrix}\alpha+m\\ \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+n\\ \alpha\end{pmatrix}$$

Harmônicos complexos

Harmônio sólido (harm. homogêneo) do tipo (m, n) é um polinômio $H(z, \overline{z}) = H(z_1, \ldots, z_q, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_q)$ que é homogêneo de grau m em suas q variáveis complexas $z_1, \ldots, z_q$ e homogêneo de grau n em suas q variáveis complexas $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_q$ e que satisfaz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \overline{z}_1} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial z_q \partial \overline{z}_q} \right) H(z, \overline{z}) = 0.$$

$\Omega_{2q} := \{z \in \mathbb{C}^q : |z| = 1\}$ esfera unitária complexa
A classe $H^q(m, n)$ (dos harmônicos esféricos) consiste de todas funções definidas em Ω_{2q} as quais são restrições a Ω_{2q} de harmônios sólidos do tipo (m, n).

Se $\alpha = q - 2$, onde $q \geq 2$ é um inteiro, então as funções $R^{\alpha}_{m,n}$ coincidem com as funções zonais definidas em Ω_{2q} do espaço dos harmônicos $H^q(m,n)$ de grau m em z e grau n em $\bar{z}$.

• $\phi : \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$ contínua é uma função zonal quando:

$$\phi(\xi) = f(\xi \cdot \varepsilon_1), \quad \xi \in \Omega_{2q},$$

onde f é uma função contínua definida em $\overline{\mathbb{D}}$.

• representação integral tipo fórmula de Laplace: para $\alpha > 0$, $\theta \in (0, \pi/2]$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$R^{\alpha}_{m,n}(\cos\theta e^{i\varphi}) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos\theta e^{i\varphi} + i\sin\theta r e^{i\psi})^m \times (\cos\theta e^{-i\varphi} + i\sin\theta r e^{-i\psi})^n r(1-r^2)^{\alpha-1} d\psi dr.$$

$$c_n(\lambda, \cos\theta) = \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n (\sin\varphi)^{2\lambda-1} d\varphi.$$

Também um análogo dessa fórmula para o produto vale:

$$R^{\alpha}_{m,n}(z)R^{\alpha}_{m,n}(w) =$$
$$\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} R^{\alpha}_{m,n}(\cos\theta_1 e^{i\varphi_1}\cos\theta_2 e^{i\varphi_2} + \sin\theta_1 \sin\theta_2 r e^{i\psi}) r(1-r^2)^{\alpha-1} d\psi dr,$$

onde $z = \cos\theta_1 e^{i\varphi_1}$, $w = \cos\theta_2 e^{i\varphi_2}$, $\theta_j \in (0, \pi/2]$ e $\varphi_j \in [0, 2\pi)$.

limitação

Teorema

Se $\alpha \geq 0$*, então* $|R^{\alpha}_{m,n}(z)| \leq 1$*, para todo* $z \in \overline{\mathbb{D}}$ *e* $m, n \geq 0$*.*

Prova.

$$M := \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |R^{\alpha}_{m,n}(z)| \overset{|R^{\alpha}_{m,n}(1)|=1}{\Longrightarrow} M \geq 1$$

- $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$

$$M^2 = |R^{\alpha}_{m,n}(z_0)|^2 = |R^{\alpha}_{m,n}(z_0) R^{\alpha}_{m,n}(z_0)| \overset{z=w=z_0=\cos\theta e^{i\varphi}}{=}$$

$$\left| \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} R^{\alpha}_{m,n}(\cos\theta e^{i\varphi} \cos\theta e^{i\varphi} + \sin\theta \sin\theta r e^{i\psi}) r(1-r^2)^{\alpha-1} d\psi dr \right|$$

$$\leq \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |R^{\alpha}_{m,n}(\cos^2\theta e^{2i\varphi} + \sin^2\theta r e^{i\psi})| r(1-r^2)^{\alpha-1} d\psi dr$$

$$\leq M \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1-r^2)^{\alpha-1} d\psi dr = M \qquad \blacksquare$$

$\star$ $-1 < \alpha < 0$: $R^{\alpha}_{1,1}(0) = \frac{-1}{1+\alpha} < -1$

convergências...

Teorema

Se $\alpha \geq 0$, *então* $\lim_{m+n\to\infty} R_{m,n}^{\alpha+1}(z) = 0$, *para cada* $z \in \mathbb{D}$ *fixado.*

Prova.

$$(m+n+1+\alpha)(1-|z|^2)\frac{\partial}{\partial z}R_{m,n}^{\alpha}(z) = m(n+1+\alpha)(R_{m-1,n}^{\alpha}(z)-R_{m,n+1}^{\alpha}(z))$$

$$\frac{\partial}{\partial z}R_{m,n}^{\alpha}(z) = \frac{m(n+1+\alpha)}{1+\alpha}R_{m-1,n}^{\alpha+1}(z)$$

$$\therefore (1-|z|^2)R_{m-1,n}^{\alpha+1}(z) = \frac{1+\alpha}{m+n+1+\alpha}(R_{m-1,n}^{\alpha}(z) - R_{m,n+1}^{\alpha}(z))$$

ou

$$(1-|z|^2)R^{\alpha+1}_{m,n}(z) = \frac{1+\alpha}{m+n+2+\alpha}(R^{\alpha}_{m,n}(z) - R^{\alpha}_{m+1,n+1}(z)).$$

$$|R^{\alpha+1}_{m,n}(z)| \leq \frac{2}{1-|z|^2}\ \frac{1+\alpha}{m+n+2+\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Fazendo $m+n \to \infty$ o resultado segue. $\blacksquare$

$$\boxed{P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+\alpha)!(n+\beta)!}{2^n k!(n-k)!(n+\beta-k)!(k+\alpha)!}(1-t)^k(1+t)^{n-k}}$$

$$\boxed{R_{m,n}^{\alpha}(z) = z^{m-n} R_n^{(\alpha,m-n)}(2z\overline{z}-1)}$$

Teorema

$\lim\limits_{\alpha\to\infty} R_{m,n}^{\alpha}(z) = z^m\overline{z}^n$, *para cada* $z \in \overline{\mathbb{D}}$ *e* $m, n \geq 0$ *fixados.*

Prova.

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = z^m\overline{z}^n + \sum_{k=1}^{m\wedge n} \frac{(-1)^k m!n!\alpha!}{k!(m-k)!(n-k)!(k+\alpha)!}(1-|z|^2)^k z^{m-k}\overline{z}^{n-k}$$

$$\left|\frac{(-1)^j m!n!\alpha!}{k!(m-k)!(n-k)!(k+\alpha)!}\right| =$$

$$= \frac{\overbrace{m.\ldots.(m-(k-1))}^{k \text{ termos}}\ \overbrace{n.\ldots.(n-(k-1))}^{k \text{ termos}}}{k!(\alpha+k).\ldots.(\alpha+1)}$$

$$\leq \frac{(mn)^k}{k!(\alpha+1)^k} \leq \frac{(mn)^k}{(\alpha+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&|R^{\alpha}_{m,n}(z) - z^m \overline{z}^n| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m\wedge n} \left| \frac{(-1)^j m!n!\alpha!}{k!(m-k)!(n-k)!(k+\alpha)!} (1-|z|^2)^k z^{m-k}\overline{z}^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m\wedge n} \frac{(mn)^k}{(\alpha+1)} \leq \sum_{k=1}^{m\wedge n} \frac{(mn)^{m\wedge n}}{(\alpha+1)} \\
&= (m\wedge n) \frac{(mn)^{m\wedge n}}{(\alpha+1)} \overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

$\lim_{\alpha\to\infty} R^{\alpha}_{m,n}(z) = z^m \overline{z}^n$ uniformemente em z, para cada m, n fixados

- Conjecturamos que: $\lim_{\alpha\to\infty} R^{\alpha}_{m,n}(z) = z^m\bar{z}^n$ é uniforme em $m, n \geq 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$ fixado.
- Schoenberg utilizou:

$$c_n(d, \cos\theta) = \frac{\Gamma(d/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n (\sin\varphi)^{d-2} d\varphi.$$

- temos o análogo:

$$R^{\alpha}_{m,n}(\cos\theta e^{i\varphi}) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} (\cos\theta e^{i\varphi} + i\sin\theta r e^{i\psi})^m \times (\cos\theta e^{-i\varphi} + i\sin\theta r e^{-i\psi})^n r(1-r^2)^{\alpha-1} d\psi dr.$$

Referências

J. N. Boyd, *Orthogonal polynomials on the disc*, Thesis, 1970, University of Virginia.

J. N. Boyd and P. N. Raychowdhury, *Zonal harmonic functions from two-dimensional analogs of Jacobi polynomials*, Applicable Anal. **16** (1983), no. 3, 243–259.

T. H. Koornwinder, *The addition formula for jacobi polynomials ii. the laplace type integral representation and the product formula*, Math. Centrum Amsterdam, 1972, Report TW133.

T. H. Koornwinder, *The addition formula for jacobi polynomials iii. completion of the proof*, Math. Centrum Amsterdam, 1972, Report TW135.

Referências

B. Aharmim and E. H. Amal and E. W. Fouzia, and A. Ghanmi. *Generalized Zernike polynomials: operational formulae and generating functions*. In: Integral Transforms Spec. Funct. 26.6 (2015), pp. 395-410.

A. Wünsche, *Generalized Zernike or disc polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **174** (2005), no. 1, 135–163.

A. Torre, *Generalized Zernike or disc polynomials: an application in quantum optics*. J. Comput. Appl. Math. 222 (2008), no. 2, 622-644.

Funções positivas definidas

Dado um conjunto não vazio X, um núcleo em X é uma função $K : X \times X \to \mathbb{C}$, e ele é dito ser *positivo definido em* X (pd) se, e somente se,

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} K(x_\mu, x_\nu) \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{C}$, ou seja, a matriz $(K(x_\mu, x_\nu))$ é hermitiana e não negativa definida. Se a desigualdade acima é estrita quando pelo menos um dos c_μ é não nulo, então o núcleo é chamado *estritamente positivo definido em* X (spd).

Propriedades

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} K(x_\mu, x_\nu) \geq 0}$$

1. K pd em $X \Longrightarrow K(x,x) \geq 0, \ \forall x \in X$

2. K pd em $X \Longrightarrow |K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y), \ \forall x,y \in X$

3. K_1, K_2 pd em X, $a, b \geq 0 \Longrightarrow \overline{K_1}, \ aK_1 + bK_2, \ K_1K_2$ pd em X
   O limite pontual de uma sequência de núcleos pd é pd

4. $K_1 : X \times X \to \mathbb{C}$ e $K_2 : Y \times Y \to \mathbb{C}$ pd $\Longrightarrow K_1 \otimes K_2$ pd

   $K_1 \otimes K_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{C}$
   $K_1 \otimes K_2(x_1, y_1, x_2, y_2) := K_1(x_1, x_2)K_2(y_1, y_2)$

Exemplos

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} K(x_\mu, x_\nu) \geq 0}$$

1. Se $f : X \to \mathbb{C}$, então $K(x,y) = f(x)\overline{f(y)}$ é pd em X

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} f(x_\mu)\overline{f(x_\nu)} = \left|\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu f(x_\mu)\right|^2 \geq 0$$

2. $K(x,y) = \cos(x-y)$ é pd em $\mathbb{R}$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} \cos(x_\mu - x_\nu) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} [\cos(x_\mu)\cos(x_\nu) + \sin(x_\mu)\sin(x_\nu)]$$

$$= \left|\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \cos(x_\mu)\right|^2 + \left|\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \sin(x_\mu)\right|^2 \geq 0$$

3. $K(x,y) = (x+y)^{-1}$ é pd em $(0,\infty)$

Pd em esferas reais

Uma função contínua $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é *positiva definida em S^d* ($d \geq 1$) quando o núcleo $K : S^d \times S^d \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(\cos d(x, y)) = f(x \cdot y), \quad x, y \in S^d,$$

é positivo definido em S^d: $f \in \mathcal{P}(S^d)$.

$$\mathcal{P}(S^d) \subset \mathcal{P}(S^{d-1}), \quad d \geq 2$$

Exemplos pd em esferas reais

1. $P_n^{(d-1)/2} \in \mathcal{P}(S^d) \quad (d \geq 1,\ n \geq 0)$

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} K(x_\mu, x_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} P_n^{(d-1)/2}(x_\mu \cdot x_\nu)$$

$$\overset{T.\,Ad.}{=} \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} \frac{\sigma_d}{N(d+1,n)} \sum_{j=1}^{N(d+1,n)} \overline{Y_j(x_\mu)} Y_j(x_\nu)$$

$$= \frac{\sigma_d}{N(d+1,n)} \sum_{j=1}^{N(d+1,n)} \left| \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \overline{Y_j(x_\mu)} \right|^2 \geq 0$$

2. Se g é uma função completamente monotônica em $(0, \infty)$: C^∞ em $(0, \infty)$ e $(-1)^n g^{(n)}(u) \geq 0, u > 0, n \in \mathbb{Z}_+$ então

$$f(t) := g(\arccos t)$$

é pd em S^d.
Se g não é constante, então f é spd em S^d.

$$g(u) = e^{-u}$$

$$g(u) = (1+u)^{-\beta},\ \beta \geq 0$$

Pd em esferas complexas

Uma função $f : A_q \to \mathbb{C}$ é *positiva definida em Ω_{2q}* $(q \geq 1)$ quando o núcleo $K : \Omega_{2q} \times \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$

$$(x, y) \mapsto f(\langle x, y\rangle), \quad x, y \in \Omega_{2q},$$

é positivo definido em Ω_{2q}

$$A_q = \begin{cases} \overline{\mathbb{D}} & q \geq 2 \\ \partial\overline{\mathbb{D}} = \Omega_2 & q = 1 \end{cases}$$

$f \in \mathcal{P}(\Omega_{2q})$

$$\mathcal{P}(\Omega_{2q+2}) \subset \mathcal{P}(\Omega_{2q}), \quad q \geq 2$$

Exemplos pd em esferas complexas

1. Seja $k \geq 0$. A função $f(z) = z^k$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$, é pd em Ω_{2q}.

   $k = 0$: ok! $k = 1$:

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} f(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} \langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle = \left\langle \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \xi_\mu, \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \xi_\nu \right\rangle = \left| \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu \xi_\mu \right|^2 \geq 0.$$

   Se $k > 1$, a matriz $(\langle \xi_\mu, \xi_\nu \rangle^k)$ é não negativa definida pelo Teorema de Schur.

2. Para cada $m, n \geq 0$, o polinômio no disco $R_{m,n}^{q-2}$ é pd em Ω_{2q}.

   $\{Y_1^q, Y_2^q, \ldots, Y_{N(q;m,n)}^q\}$ uma base ortonormal de $H^q(m, n)$

$$R_{m,n}^{q-2}(\langle \xi, \zeta \rangle) = \frac{\omega_{2q}}{N(q;\, m,\, n)} \sum_{k=1}^{N(q;m,n)} Y_k^q(\xi)\overline{Y_k^q(\zeta)}, \quad \xi, \zeta \in \Omega_{2q}.$$

Caracterizações de pd em esferas reais

Teorema

([Sch42, Theorem 1]) Uma função contínua $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é positiva definida em S^d $(d \geq 1)$ se, e somente se,

$$f(\cos\theta) = \sum_{k\geq 0} a_k^d c_k(d, \cos\theta), \quad \theta \in [0,\pi],$$

onde $a_k^d \geq 0,\ k \geq 0$ e $\sum_{k\geq 0} a_k^d < \infty$.

$d = \infty$: esfera unitária S^∞ do espaço de Hilbert ℓ^2
Uma função contínua $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{P}(S^\infty)$ quando

$$[f(\xi_i \cdot \xi_j)]_{i,j=1,\ldots,n}$$

é não negativa definida para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e $\xi_1, \ldots, \xi_n \in S^\infty$.

$$S^1 \subset S^2 \subset \cdots \subset S^d \subset \cdots \subset S^\infty \Longrightarrow \mathcal{P}(S^\infty) = \bigcap_{d\geq 1} \mathcal{P}(S^d)$$

$$f \in \mathcal{P}(S^\infty) \Longrightarrow f \in \mathcal{P}(S^d), \ \forall d \geq 1.$$

$$f(\cos\theta) = \sum_{k\geq 0} a_k^d c_k(d, \cos\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \quad \begin{cases} a_k^d \geq 0, \forall k \\ f(1) < \infty \end{cases}$$

Como

$$\lim_{d\to\infty} c_k(d, \cos\theta) = \cos^k\theta,$$

uniformemente em θ, é natural esperar o resultado:

Teorema

([Sch42, Theorem 2]) Uma função contínua $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é positiva definida em S^∞ se, e somente se,

$$f(\cos\theta) = \sum_{k\geq 0} a_k \cos^k\theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

onde $a_k \geq 0, \ k \geq 0$ e $\sum_{k\geq 0} a_k < \infty$.

- convergência uniforme em θ não é suficiente!

Caracterizações de pd em esferas complexas

Teorema

([MP01]) $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *contínua é pd em* $\Omega_2 \iff$

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k < \infty, \quad a_k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema

([MP01]) $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ *contínua é pd em* Ω_{2q}, $(q \geq 2) \iff$

$$f(z) = \sum_{m,n\geq 0} a^q_{m,n} R^{q-2}_{m,n}(z), \quad \sum_{m,n\geq 0} a_{m,n} < \infty, \quad a_{m,n} \geq 0,\ m,n \geq 0$$

Ω_∞ = esfera unitaria esp. Hilbert complexo$\ell_2(\mathbb{C})$

$$\mathcal{P}(\Omega_\infty) = \bigcap_{q\geq 2} \mathcal{P}(\Omega_{2q})$$

$$f \in \mathcal{P}(\Omega_\infty) \Longrightarrow f(z) = \sum_{m,n\geq 0} a^q_{m,n} R^{q-2}_{m,n}(z), \ \ \forall q \geq 2$$

$\lim_{\alpha\to\infty} R^\alpha_{m,n}(z) = z^m\overline{z}^n$ uniforme em z e m,n fixados:
caracterização de Christensen and Ressel
(teoria de Choquet, análise convexa)

Teorema

([CR82]) Uma função contínua $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ é positiva definida em Ω_∞ se, e somente se,

$$f(z) = \sum_{m,n\geq 0} a_{m,n} z^m \overline{z}^n, \quad \sum_{m,n\geq 0} a_{m,n} < \infty, \quad a_{m,n} \geq 0, \ m,n \geq 0.$$

Referências

C. Berg, J. P. R. Christensen, and P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 100, Springer-Verlag, New York, 1984, Theory of positive definite and related functions.

R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, Corrected reprint of the 1985 original.

Referências

I. J. Schoenberg, *Positive definite functions on spheres*, Duke Math. J. **9** (1942), 96–108.

J. P. R. Christensen and P. Ressel, *Positive definite kernels on the complex Hilbert sphere*, Math. Z. **180** (1982), no. 2, 193–201.

V. A. Menegatto and A. P. Peron, *Positive definite kernels on complex spheres*, J. Math. Anal. Appl. **254** (2001), no. 1, 219–232.