UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Funções e núcleos positivos definidos

Ana Paula Peron

Texto sistematizado apresentado ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Livre Docente

Janeiro de 2014

Índice

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste texto é apresentar resultados obtidos pela candidata, junto com alguns colaboradores, cujo tema principal versará sobre a diferenciabilidade de funções e núcleos positivos definidos. Também, serão apresentados resultados relativos ao decaimento dos autovalores de um operador integral gerado por núcleo positivo definido. Os artigos aos quais os resultados aqui apresentados pertencem são os seguintes:

[**FMP08**] J. C. Ferreira, V. A. Menegatto, and A. P. Peron, *Integral operators on the sphere generated by positive definite smooth kernels*, J. Complexity **24** (2008), no. 5-6, 632–647.

[**MOP09**] V. A. Menegatto, C. P. Oliveira, and A. P. Peron, *Differentiable positive definite kernels on spheres*, J. Appl. Anal. **15** (2009), no. 1, 101–117.

[**MPO11**] V. A. Menegatto, A. P. Peron, and C. P. Oliveira, *On the construction of uniformly convergent disk polynomial expansions*, Collect. Math. **62** (2011), no. 2, 151–159

[**MPP13**] E. Massa, A. P. Peron, and A. C. Piantella, *Positive definite functions: differenciability and analyticity*, submetido para publicação (2013).

A seguir apresentamos uma breve introdução às funções e núcleos positivos definidos, além de uma descrição da literatura relacionada.

Seja X um espaço vetorial. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é *positiva definida* quando

$$\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{s} c_\mu \overline{c_\nu} f(x_\mu - x_\nu) \geq 0, \tag{1.1}$$

para todo s inteiro positivo, $c_1, c_2, \ldots, c_s$ números complexos e $x_1, x_2, \ldots, x_s$ pontos em

X. Segue facilmente da definição que uma função positiva definida f satisfaz as seguintes propriedades (veja [CL09, p. 80]):

$$f(0) \geq 0\,, \tag{1.2}$$
$$f(-x) = \overline{f(x)}\,, \qquad x \in X\,, \tag{1.3}$$
$$|f(x)| \leq f(0)\,, \qquad x \in X\,. \tag{1.4}$$

De maneira análoga, um núcleo $K : X \times X \to \mathbb{C}$ é dito ser *positivo definido* quando

$$\sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{s} c_\mu \overline{c_\nu} K(x_\mu, x_\nu) \geq 0, \tag{1.5}$$

para todo s inteiro positivo, $c_1, c_2, \ldots, c_s$ números complexos e $x_1, x_2, \ldots, x_s$ pontos em X. Propriedades similares às (1.2)–(1.4) valem para núcleos. Observe-se que, em particular, dada uma função positiva definida f, podemos definir um núcleo positivo definido associado através da fórmula

$$K(x, y) = f(x - y).$$

Um exemplo clássico de função positiva definida em um espaço vetorial X com produto interno real $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dado por

$$f(x) = \exp(i\langle x, y\rangle), \quad x \in X, \tag{1.6}$$

onde y é um dado ponto em X. Outros exemplos podem ser encontrados em [CL09, p. 77-104]. Para mais detalhes sobre estes conceitos recomendamos [BCR84].

Historicamente, funções e núcleos positivos definidos têm sido estudados por muitos autores em diferentes ramos da Matemática, tais como análise de Fourier, teoria de operadores, teoria de funções complexas, equações integrais, problemas de valor de fronteira para equações diferenciais parciais, teoria da aproximação e outros (veja, por exemplo, [CL09, Gne99, Gne12, Men14, Nar98, Ste76, Sch38, Zie13, Wen05] e as referências citadas neles).

Um fato relevante nas aplicações é a relação entre a diferenciabilidade de núcleos positivos definidos e o decaimento dos autovalores e dos valores singulares dos operadores integrais gerados por tais núcleos; em particular, para melhorar o decaimento usualmente é necessário assumir a existência e limitação de certas derivadas do núcleo (veja, por exemplo [CM12, FMP08]).

A diferenciabilidade de funções positivas definidas está também relacionada aos espaços de Hilbert de reprodução gerados pelos núcleos associados, os quais foram recentemente aplicados em problemas da teoria do aprendizado (veja [BP06, FM12, Zho08]).

Na resolução de problemas de interpolação (veja, por exemplo, ([Che95, CS98a, FS98, Men99, MP01a])) tornam-se importantes as *funções estritamente positivas definidas (SPD)* (e os *núcleos estritamente positivos definidos*), isto é, as funções (resp. núcleos) pelas quais a desigualdade em (1.1) (resp. em (1.5)) é estrita quando os pontos são distintos e os escalares não todos nulos. Um exemplo de uma função que seja estritamente positiva definida é

$$f(x) = \exp(-\alpha\langle x, x\rangle), \quad x \in X, \tag{1.7}$$

onde $\alpha > 0$ e X como em (1.6).

Neste texto, trataremos principalmente o caso em que X é um subconjunto do espaço Euclideano m-dimensional $\mathbb{R}^m$, sendo m um inteiro positivo. No caso em que X é a esfera unitária no espaço complexo $\mathbb{C}^m$, a expansão de um núcleo estritamente positivo definido será apresentada de forma explícita.

A seguir, nas Seções 1.1 a 1.4, descrevemos brevemente os resultados de cada capítulo deste texto. Na Seção 1.5 apresentamos alguns problemas abertos e possíveis direções de pesquisa.

1.1 Autovalores de operadores integrais

O primeiro artigo que apresentaremos é [FMP08] e será detalhado no Capítulo 3. Nele consideramos operadores integrais na esfera unitária gerados por núcleos positivos definidos. Sob condições de suavidade de tipo-Lipschitz sobre o núcleo, obtemos uma estimativa para o decaimento dos autovalores do operador integral. A técnica que utilizamos é uma versão multi-dimensional, adaptada ao contexto esférico, de um procedimento usado na análise de um problema similar para operadores integrais sobre o intervalo $[0, 1]$ (veja, [CH99]). Além da teoria espectral, o argumento chave deste trabalho envolve o uso de coberturas especiais da esfera geradas por fórmulas de quadratura. As estimativas obtidas são comparáveis com outras existentes na literatura para problemas similares (veja, por exemplo [Küh87]).

1.2 Núcleos positivos definidos em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

O segundo artigo que apresentaremos é [MOP09] e será detalhado no Capítulo 4. Nele analisamos a diferenciabilidade de núcleos positivos definidos em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ e a diferenciabilidade termo a termo de núcleos definidos por séries uniformemente convergentes da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Y_k(x)\overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^{m-1},$$

onde $a_k \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k > 0$, e $\{Y_k\}$ é uma sequência de harmônicos esféricos ou ainda funções mais gerais. Como esta última classe de núcleos inclui os núcleos contínuos positivos definidos em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, os resultados deste artigo mostrarão que, sob certas condições, a ação de determinados operadores diferenciais sobre núcleos positivos definidos geram núcleos positivos definidos.

1.3 Funções definidas no disco unitário complexo

O terceiro artigo que apresentaremos é [MPO11] e será detalhado no Capítulo 5. Nele fornecemos um método para obter explicitamente expansões em termos de polinômios no disco, que sejam uniformemente convergentes, para funções real-analíticas no disco unitário complexo. Como aplicação, deduziremos a expansão harmônica esférica do núcleo de Poisson-Szegö na bola unitária de $\mathbb{C}^q$ e também, apresentaremos a expansão em termos de polinômios no disco de um núcleo estritamente positivo definido em $\Omega_{2q} \times \Omega_{2q}$.

1.4 Funções positivas definidas em $\mathbb{R}^m$

O último trabalho que apresentaremos é [MPP13] e será detalhado no Capítulo 6. Nele obtemos resultados sobre as derivadas de funções positivas definidas em $\mathbb{R}^m$, usando propriedades conhecidas de núcleos positivos definidos, entre as quais uma obtida em [MOP09]. Provamos que certas derivadas de tais funções são também positivas definidas e obtemos uma condição sobre as derivadas de ordem par na origem que implica que a função é constante. Além disso, obtemos uma condição suficiente para a real-analiticidade de funções positivas definidas e estimamos o conjunto onde elas podem ser estendidas holomorficamente. Em particular, nossos resultados mostram que o comportamento global de uma função positiva definida suave é completamente determinado por certas derivadas de ordem par na origem.

Os resultados deste trabalho mostram que muitas propriedades obtidas no caso $m = 1$ ([BP11]) têm um correspondente em dimensão m qualquer.

1.5 Considerações finais

Os trabalhos tratados neste texto estão relacionados com problemas importantes da área da teoria da aproximação.

Acreditamos que ainda seja possível obter novos resultados dentro desta linha de pesquisa. A seguir apresentamos algumas direções de investigação que a candidata pretende seguir no futuro próximo.

- Não sabemos se os resultados em [MOP09] sobre derivadas de núcleos positivos definidos podem ser provados sem considerar o espaço ambiente ao qual a esfera pertence. Resultados similares, formulados com noções diferentes de diferenciabilidade, como por exemplo a derivada de Laplace-Beltrami ([JM14]), utilizam novos argumentos que não precisam passar pelo espaço ambiente.

  Seria então interessante substituir a noção de diferenciabilidade em [MOP09] por uma das descritas em [SV00], o que ainda abriria a possibilidade de considerar espaços mais gerais do que a esfera.

- A técnica utilizada em [FMP08] para obter o decaimento dos autovalores do operador integral gerado por núcleos positivos definidos suaves, envolve fortemente ferramentas pesadas da teoria espectral e coberturas especiais da esfera. Gostaríamos de indagar a possibilidade de utilizar certas desigualdades sobre os núcleos generalizados de Jackson para obter uma prova bem mais direta e simples da estimativa obtida em [FMP08].

- Ainda, outra linha de pesquisa relacionada ao assunto deste texto trata sobre funções estritamente positivas definidas na esfera. Neste caso, é usualmente usada uma definição de positividade definida diferente de (1.1): veja na p. 33.

  No caso em que X é a esfera unitária S^{m-1}, Schoenberg ([Sch42]) caracterizou as funções contínuas que são positivas definidas como sendo séries uniformemente convergentes com coeficientes não negativos de polinômios de Gegenbauer. Esta caracterização gerou uma cadeia de artigos sobre interpolação em esferas em direção a caracterizações de funções estritamente positivas definidas em esferas ([CMS03a, CS98b, CK90]), bem como de artigos sobre extensões do próprio resultado de Schoenberg ([Boc41, Mus10, MP01b, PP08]).

  Várias tentativas de caracterizar os núcleos estritamente positivos definidos quando $m < \infty$ conseguiram obter apenas condições necessárias ou apenas condições suficientes ([Men99, Men95, RS96, Sch97]). Em 2003, a caracterização plena para positividade estrita definida foi obtida para todo m em [CMS03a].

  Recentemente, Musin ([Mus08, Mus10]) estendeu o Teorema de Schoenberg ([Sch42]) para a seguinte nova classe de funções positivas definidas: dado um subconjunto de m pontos em S^{m-1}: $Q = \{q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(m)}\}$, uma função contínua real de multivariáveis $F(t, u, v)$, onde $t \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^m$ e tal que $F(t, u, v) = F(t, v, u)$, pertence à classe $PD(Q, S^{m-1})$ quando para quaisquer pontos $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}$ em S^{m-1} e números reais $c_1, c_2, \ldots, c_s$ vale:

  $$\sum_{\mu=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{s} c_\mu c_\nu F(t_{\mu\nu}, u_\mu, u_\nu) \geq 0, \tag{1.8}$$

  onde

  $$t_{\mu\nu} = d_m(x^{(\mu)}, x^{(\nu)}), \qquad u_\mu = (d_m(x^{(\mu)}, q^{(1)}), \ldots, d_m(x^{(\mu)}, q^{(m)})), \quad 1 \leq \mu, \nu \leq s,$$

  e d_m é a distância geodésica em S^{m-1}. Quando $Q = \emptyset$, esta classe coincide com a classe usual das funções positivas definidas em S^{m-1}.
  Uma proposta é obter uma caracterização de estrita positividade definida, nos moldes de [CMS03a], para esta nova classe de funções

  Outra proposta é definir uma nova classe de funções positivas definidas sobre a esfera complexa unitária Ω_{2m} de $\mathbb{C}^m$, seguindo a definição de Musin, e então transpor a caracterização que ele obteve no caso de S^{m-1} para este caso. Para fazer isso, serão úteis resultados conhecidos sobre positividade definida quando X é a esfera unitária Ω_{2m} ou quando X é um espaço com produto interno real: veja-se em [LS05, MP02, MOP06b, MOP06a, Pin04a, Pin04b].

Dependendo dos resultados obtidos, é natural prosseguir a pesquisa investigando então o caso das funções estritamente positivas definidas sobre Ω_{2m}, segundo esse novo contexto.

1.6 Agradecimentos

Os trabalhos tratados neste texto sistematizado são fruto de colaborações com os Professores Valdir A. Menegatto (ICMC-USP), José Claudinei Ferreira (Universidade Federal de Uberlândia), Claudemir P. Oliveira (Universidade Federal de Itajubá), Ana Carla Piantella (Universidade Federal de Uberlândia) e Eugenio Massa (ICMC-USP).

Capítulo 2

Notações

Neste capítulo introduzimos algumas notações que aparecerão no decorrer do texto.

Pontos em $\mathbb{R}^m$ serão escritos como $x = (x_1, \dots, x_m)$ e S^{m-1} denotará a esfera unitária em $\mathbb{R}^m$. A notação de multi-índice será usada, a saber, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, então

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \quad \alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_m!$$

e

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m};$$

denotaremos por e_j, $j = 1, 2, \dots, m$, o multi-índice com j-ésima componente igual a 1 e todas as outras iguais a 0. A seguinte relação ([Joh82, p. 55]) sobre multi-índices será usada:

$$\alpha! \leq |\alpha|! \leq m^{|\alpha|} \alpha! \,. \tag{2.1}$$

A letra O denotará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, $C^{2n}(O \times O)$ será o clássico conjunto dos núcleos $K : O \times O \to \mathbb{C}$ para os quais todas as derivadas

$$D_{x,y}^{\alpha,\beta} K(x,y) := \frac{\partial^{|\alpha+\beta|} K}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x,y) = \frac{\partial^{|\alpha+\beta|} K}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m} \partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_m^{\beta_m}}(x,y), \tag{2.2}$$

$|\alpha|, |\beta| \leq n$, existem e são contínuas em $O \times O$. Também, dizemos que $f : O \to \mathbb{C}$ pertence à classe $C^n(O)$ (resp. $C^\infty(O)$) quando todas as derivadas

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(x), \tag{2.3}$$

$|\alpha| \leq n$ (resp. $|\alpha|$ qualquer), existem e são contínuas em O.

A função derivada de uma função definida em S^{m-1} é definida como a função derivada de sua extensão radial a $\mathbb{R}_*^m := \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, restrita a S^{m-1}. O mesmo se aplica aos núcleos definidos $S^{m-1}\times S^{m-1}$ em quando tratamos cada variável separadamente. A saber, dada $f: S^{m-1}\to\mathbb{C}$, sua *extensão radial* é a função $\widetilde{f}$ dada por

$$\widetilde{f}(x) = f(x/\|x\|), \quad x\in\mathbb{R}^m_*, \tag{2.4}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma usual em $\mathbb{R}^m$. Se α é um multi-índice, a ação do símbolo D^α na função f definida em S^{m-1} é a restrição a S^{m-1} da ação de D^α na extensão $\widetilde{f}$, isto é,

$$D^\alpha f := \left(D^\alpha \widetilde{f}\right)|_{S^{m-1}}. \tag{2.5}$$

Assim, para que $D^\alpha f$ faça sentido é necessário que a correspondente derivada usual de $\widetilde{f}$ exista em $\mathbb{R}^m_*$. Analogamente, para um núcleo K com domínio $S^{m-1}\times S^{m-1}$ e multi-índices α e β de $\mathbb{Z}^m_+$, colocamos

$$D^{\alpha,\beta}_{x,y}K = \left(D^{\alpha,\beta}_{x,y}\widetilde{K}\right)|_{S^{m-1}\times S^{m-1}}\ , \tag{2.6}$$

onde

$$\widetilde{K}(x,y) := K(x/\|x\|, y/\|y\|), \quad x,y\in\mathbb{R}^m_*.$$

Enfatizamos que para $D^{\alpha,\beta}_{x,y}K$ existir, a derivada $D^{\alpha,\beta}_{x,y}\widetilde{K}$ deve existir em $\mathbb{R}^m_*\times\mathbb{R}^m_*$. Continuidade de $D^{\alpha,\beta}_{x,y}K$ significará continuidade de $D^{\alpha,\beta}_{x,y}\widetilde{K}$ em $\mathbb{R}^m_*\times\mathbb{R}^m_*$ e assim por diante. Se o operador derivada estiver agindo em apenas uma variável do núcleo, escreveremos ou D^α_x ou D^α_y para indicar em qual variável o operador está atuando.

Capítulo 3

Operadores integrais gerados por núcleos positivos definidos

Neste capítulo serão apresentados os resultados de [FMP08]. O contexto adotado neste artigo é o que segue. Considere σ_{m-1} a medida usual de Lebesgue em S^{m-1}. O Teorema de Mercer ([Mer09]) em sua forma generalizada afirma que um núcleo contínuo positivo definido $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ é uma série uniformemente convergente da forma

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Y_k(x)\overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^{m-1}, \tag{3.1}$$

onde $\{a_k\}$ é uma sequência não crescente de números não negativos satisfazendo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ e $\{Y_k : k = 0, 1, \ldots\}$ é um sistema ortonormal em $L^2(S^{m-1})$. A

Se $K \in L^2(S^{m-1} \times S^{m-1})$ é um núcleo hermitiano, então o operador integral $\mathcal{K}$ associado ao núcleo e definido por

$$\mathcal{K}(f)(x) = \int_{S^{m-1}} K(x, y) f(y)\, d\sigma_{m-1}(y), \quad x \in S^{m-1}, \tag{3.2}$$

é um operador compacto em $L^2(S^{m-1})$. Ainda mais, se K é positivo definido, então $\mathcal{K}$ é auto-adjunto e hermitiano e o teorema espectral para operadores compactos pode ser aplicado. Em particular, o espectro de $\mathcal{K}$ é um conjunto enumerável de números reais não negativos com nenhum ponto de acumulação, exceto possivelmente o zero. Os autovalores de $\mathcal{K}$ estão ordenados na ordem decrescente e considerando suas multiplicidade:

$$\lambda_1(\mathcal{K}) \geq \lambda_2(\mathcal{K}) \geq \ldots.$$

A abordagem que escolhemos é de adaptar à esfera o método usado em [CH99] para obter resultados parecidos para operadores gerados por núcleos definidos em intervalos fechados.

O principal resultado deste capítulo descreve um decaimento para a sequência $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$, $n \to \infty$, quando certas derivadas do núcleo positivo definido gerador do operador integral satisfazem uma condição de suavidade do tipo Lipschitz (ver p.17). Seu enunciado completo é como segue.

Teorema 3.0.1. *Sejam $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido e k um inteiro não negativo. Assuma que $D_y^\alpha K$ existe, é contínua, e é (B_α, β)-Lipschitz, sempre que $|\alpha| = k$. Então, a sequência $\{n^{1+(k+\beta)/(m-1)}\lambda_n(\mathcal{K})\}$ é limitada.*

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 3.1 apresentamos alguns resultados básicos sobre partições na esfera, ϕ-redes e fórmulas de quadratura. Tais conceitos serão usados na definição de um núcleo auxiliar introduzido no final da seção. Na Seção 3.2 introduzimos a noção de suavidade do núcleo gerador do operador integral e obtemos estimativas básicas para os núcleos auxiliares sobre a condição de suavidade do núcleo original. A Seção 3.3 contém uma desigualdade básica relacionando a soma de todos os autovalores de $\mathcal{K}$ com a soma de todos autovalores do núcleo auxiliar, enquanto que a Seção 3.4 contém um refinamento dessa desigualdade. Na Seção 3.5, provamos o Teorema 3.0.1 A Seção 3.6.1 contém um exemplo clássico, onde todas as condições necessárias Teorema 3.0.1 são satisfeitas e um exemplo onde usamos núcleos degenerados para construir um conveniente operador integral. Este indica que a estimativa obtida no teorema é ótima. Finalmente, a Seção 3.7 contém um breve resumo de dois outros artigos da candidata relacionados ao tema deste capítulo.

3.1 Resultados técnicos: ϕ-redes e partições

Usaremos partições de S^{m-1} construídas a partir de coberturas especiais de S^{m-1}, a saber, de calotas esféricas. Uma *calota esférica centrada em $x \in S^{m-1}$ definida por $\phi \in [0,\pi]$* é o conjunto

$$S(x,\phi) = \{y \in S^{m-1} : x \cdot y \geq \cos\phi\}. \tag{3.3}$$

O *raio base* de $S(x,\phi)$ é então o raio da esfera $(m-1)$-dimensional

$$\{y \in S^{m-1} : x \cdot y = \cos\phi\}. \tag{3.4}$$

Se $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\overline{N})}\} \subset S^{m-1}$ é uma *ϕ-rede* de cardinalidade $\overline{N}$ ([Kus00]), isto é,

$$S^{m-1} \subset \cup_{j=1}^{\overline{N}} S(x^{(j)},\phi), \tag{3.5}$$

então uma conveniente partição $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1,2,\ldots,\overline{N}\}$ de S^{m-1} pode ser construída via o seguinte procedimento:

$$O_1 = S(x^{(1)},\phi) \qquad O_j = S(x^{(j)},\phi) \setminus \cup_{l=1}^{j-1} S(x^{(l)},\phi), \quad j = 2,3,\ldots,\overline{N}. \tag{3.6}$$

Uma partição construída a partir de uma ϕ-rede será chamada uma *ϕ-partição* de S^{m-1}. Dado um inteiro positivo N, uma *N-partição de S^{m-1}* é uma partição $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$ de S^{m-1} possuindo as duas seguintes propriedades: $\overline{N} \geq N$ e existe uma constante δ_m dependendo de m tal que cada O_j está contido em uma calota esférica de raio base no máximo $\delta_m/2N$. Uma partição de S^{m-1} a qual é uma ϕ-partição e uma N-partição, é chamada de *(ϕ, N)-partição* de S^{m-1}.

A sequência de lemas abaixo descreverá um método bastante especial para construir ϕ-partições de S^{m-1} a partir de ϕ-redes de cardinalidade

$$\overline{N} := (4N+1)(2N)^{m-2},$$

onde $N \geq 1$.

Lema 3.1.1. *Seja N um inteiro positivo. Então, existem um subconjunto Γ_N de S^{m-1} de cardinalidade $\overline{N}$ e um conjunto $\{w_x : x \in \Gamma_N\} \subset [0,1]$ tais que a fórmula de quadratura*

$$\int_{S^{m-1}} f(x)\, d\sigma_{m-1}(x) \sim \frac{1}{d_N} \sum_{x \in \Gamma_N} w_x f(x) \tag{3.7}$$

é exata para elementos de $P_{4N}(S^{m-1})$, o espaço dos polinômios esféricos de grau no máximo $4N$.

Prova. Este é o Teorema 4 em [BFS02]. ■

O próximo resultado descreve um método para produzir uma ϕ-rede a partir de fórmulas de quadratura. A versão que apresentamos aqui é devido a M. Reimer ([Rei00, Rei99]).

Lema 3.1.2. *Sejam N um inteiro positivo e Γ um subconjunto finito de S^{m-1} de cardinalidade $\overline{N}$. Se uma fórmula de quadratura*

$$\int_{S^{m-1}} f(x)\, d\sigma_m(x) \sim \frac{1}{\overline{\overline{N}}} \sum_{x \in \Gamma} w_x f(x), \quad w_x > 0, \tag{3.8}$$

é exata para elementos de $P_{2N}(S^{m-1})$, então Γ é uma ϕ_m-rede de S^{m-1}, na qual $\cos\phi_m$ é o maior zero do polinômio de Gegenbauer $P_N^{(m-2)/2}$ de grau N associado com $(m-2)/2$ ([Sze59, p. 81]).

Existe uma estimativa para o número ϕ_m descrito no lema acima, a qual depenas apenas do grau N. A partição de S^{m-1} produzida pela ϕ_m-rede é então uma (ϕ_m, N)-partição. Tal estimativa pode ser encontrada em [Rei00].

Lema 3.1.3. *Seja ϕ_m como no lema anterior. Então, existe uma constante positiva δ_m tal que $\phi_m \leq \delta_m/2N$.*

Teorema 3.1.4. *Sejam N um inteiro positivo e $\cos\phi_m$ o maior zero do polinômio de Gegenbauer $P_N^{(m-2)/2}$. Então, existe uma (ϕ_m, N)-partição de S^{m-1} com cardinalidade $\overline{N}$.*

Prova. É uma consequência dos lemas acima e de comentários que os precedem. ■

Dado um núcleo suave $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{R}$ e $c \in S^{m-1}$, o teorema de Taylor mostra que podemos decompor K na forma

$$K(x,y) = T_y^k K(x,c) + r_k(x, y-c), \quad y \sim c, \tag{3.9}$$

onde

$$T_y^k K(x,c) := \sum_{|\alpha| \le k-1} \frac{1}{|\alpha|!} D_y^\alpha K(x,c)(y-c)^\alpha, \tag{3.10}$$

e r_k é o resto correspondente. Em particular, podemos escrever

$$r_k(x, y-c) = \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} D_y^\alpha K(x,\theta)(y-c)^\alpha, \tag{3.11}$$

onde o vetor θ pertence ao segmento ligando c e y. A função $y \in S^{m-1} \to T_y^k K(x,c)$ é o *polinômio de Taylor de $y \in S^{m-1} \to K(x,y)$ em torno de c de grau no máximo $k-1$*. A seguir, usaremos o polinômio de Taylor para definir um núcleo auxiliar que será utilizado nas próximas seções.

Seja $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo suave, escreva $K := K_1 + iK_2$ e fixe uma partição $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$ de S^{m-1}. A *$\mathcal{P}$-decomposição de K* é o núcleo $K_{\mathcal{P}}$ dado pela fórmula

$$K_{\mathcal{P}}(x,y) := \sum_{j=1}^{\overline{N}} \chi_{O_j}(x) K(x,y) \chi_{O_j}(y), \quad x, y \in S^{m-1}, \tag{3.12}$$

onde χ_O representa a função característica de O. Se escolhemos pontos $x^{(j)} \in O_j$, $j = 1, 2 \ldots, \overline{N}$, o núcleo auxiliar $L_{\mathcal{P}}$ dado por

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{P}}(x,y) &= K_{\mathcal{P}}(x,y) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{2} i^{\nu+1} \sum_{j=1}^{\overline{N}} \chi_{O_j}(x) \left(T_y^{k+1} K_\nu(x, x^{(j)}) + \overline{T_y^{k+1} K_\nu(y, x^{(j)})} \right) \chi_{O_j}(y), \quad x, y \in S^{m-1}, \end{aligned}$$

é uma versão discreta de $r_{k+1} := r_{k+1}^1 + i r_{k+1}^2$, no qual r_{k+1}^j, $j = 1, 2$, são os restos obtidos pela aplicação do teorema de Taylor em K_1 e em K_2.

Os resultados deste trabalho dependerão de propriedades dos núcleos $K_{\mathcal{P}}$ and $L_{\mathcal{P}}$ e dos operadores integrais associados $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$. As propriedades básicas dos núcleos estão registradas abaixo.

Teorema 3.1.5. *Sobre as condições introduzidas no parágrafo anterior, se K é hermitiano, então $K_{\mathcal{P}}$ e $L_{\mathcal{P}}$ são hermitianos. Se K é positivo definido, então o mesmo é verdadeiro para $K_{\mathcal{P}}$.*

Assumindo que K é positivo definido, usaremos estimativas sobre os autovalores dos operadores integrais $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ e propriedades espectrais padrões de operadores compactos para deduzir estimativas para os autovalores do operador integral $\mathcal{K}$.

3.2 Estimativas relacionadas aos núcleos auxiliares

Nesta seção, assumimos positividade definida e condições de suavidade de tipo-Lipschitz no núcleo K a fim de deduzir os dois seguintes fatos: uma estimativa para $|L_{\mathcal{P}}|$ e uma estimativa básica para os autovalores do operador integral $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$.

Sejam $\beta \in (0,1]$ e $B \in L^2(S^{m-1})$. Um núcleo K é dito ser (B,β)-*Lipschitz* quando

$$|K(w,x) - K(w,y)| \leq B(w)\|x-y\|^{\beta}, \quad x,y,w \in S^{m-1}. \tag{3.13}$$

Como todos núcleos tem uma extensão radial a $(\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\})$, a definição acima pode ser estendida da seguinte forma:

$$|K(w,rx) - K(w,sy)| \leq B(w)\|x-y\|^{\beta}, \quad r,s \in (0,\infty) \quad x,y,w \in S^{m-1}. \tag{3.14}$$

Uma variação da definição acima substitui a norma na lado direito da desigualdade pela distância geodésica em S^{m-1}. Porém, o uso de tal variação requereria mudanças nas provas de alguns resultados adiantes.

Outro conceito que usaremos nesta seção é o de degeneração de um núcleo. Um núcleo $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ é dito ser *degenerado de posto* n se existem dois conjuntos linearmente independentes $\{a_j : j = 1,2,\ldots,n\}$ e $\{b_j : j = 1,2,\ldots,n\}$ de funções complexas definidas em S^{m-1} satisfazendo

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(y), \quad x,y \in S^{m-1}. \tag{3.15}$$

A fórmula definindo $L_{\mathcal{P}} - K_{\mathcal{P}}$ (final da Seção 3.1) justifica o seguinte resultado básico.

Teorema 3.2.1. *Sejam $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo e k um inteiro não negativo. Assuma que $D_y^{\alpha} K$ existe sempre que $|\alpha| = k$. Seja $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1,2,\ldots,\overline{N}\}$ uma partição de S^{m-1}, escolha pontos $x^{(j)} \in O_j$, $j = 1,2,\ldots,\overline{N}$ e considere o núcleo auxiliar $L_{\mathcal{P}}$. Então, $L_{\mathcal{P}} - K_{\mathcal{P}}$ é degenerado de posto no máximo $2\sum_{|\alpha|\leq k} 1$.*

O valor do posto de $L_{\mathcal{P}} - K_{\mathcal{P}}$ dado no teorema anterior aparecerá nas estimativas das somas de autovalores do operador auxiliar e do operador $\mathcal{K}$. Usaremos então a seguinte notação

$$C_k^m := 2 \sum_{|\alpha|\leq k} 1.$$

Uma estimativa para $|L_{\mathcal{P}}|$ é o conteúdo do Teorema 3.2.2 abaixo.

Teorema 3.2.2. *Sejam* $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ *um núcleo positivo definido e* k *um inteiro não negativo. Assuma que* $D_y^\alpha K$ *existe, é contínua, e é* (B_α, β)*-Lipschitz, quando* $|\alpha| = k$*. Seja* $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$ *uma* N*-partição de* S^{m-1}*, escolha pontos* $x^{(j)} \in O_j$*,* $j = 1, 2, \ldots, \overline{N}$ *e considere o núcleo* $L_{\mathcal{P}}$*. Então, existe uma constante* $C(k, m, \beta)$*, de modo que*

$$|L_{\mathcal{P}}(x, y)| \le \frac{C(k, m, \beta)}{N^{k+\beta}} \left(B(x) + B(y)\right), \quad x, y \in S^{m-1}, \tag{3.16}$$

onde $B := \max\{B_\alpha : |\alpha| = k\}$*.*

Prova. É suficiente deduzir a estimativa quando $x, y \in O_j$, para algum j. Fixe $j \in \{1, 2, \ldots, \overline{N}\}$ e escreva $L_{\mathcal{P}} = L_1 + iL_2$. Usando o teorema de Taylor, podemos encontrar θ_1 no segmento unindo x_j e y, e ϕ_1 no segmento unindo x_j e x de modo que

$$\begin{aligned} 2k!|L_1(x, y)| \le &\left| \sum_{|\alpha|=k} \left(D_y^\alpha K_1(x, \theta_1) - D_y^\alpha K_1(x, x^{(j)})\right) (y - x^{(j)})^\alpha \right| \\ &+ \left| \sum_{|\alpha|=k} \left(D_y^\alpha K_1(y, \phi_1) - D_y^\alpha K_1(y, x^{(j)})\right) (x - x^{(j)})^\alpha \right|, \quad x, y \in O_j. \end{aligned}$$

Indo um passo a frente, vemos que

$$\begin{aligned} 2k!|L_1(x, y)| \le &\left| \sum_{|\alpha|=k} \mathrm{Re}\, \left(D_y^\alpha K(x, \theta_1) - D_y^\alpha K(x, x^{(j)})\right) (y - x^{(j)})^\alpha \right| \\ &+ \left| \sum_{|\alpha|=k} \mathrm{Re}\, \left(D_y^\alpha K(y, \phi_1) - D_y^\alpha K(y, x^{(j)})\right) (x - x^{(j)})^\alpha \right|, \quad x, y \in O_j. \end{aligned}$$

A desigualdade triangular e a desigualdade $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|$, $z \in \mathbb{C}$, implicam que

$$\begin{aligned} 2k!|L_1(x, y)| \le &\sum_{|\alpha|=k} \left|D_y^\alpha K(x, \theta_1) - D_y^\alpha K(x, x^{(j)})\right| |(y - x^{(j)})^\alpha| \\ &+ \sum_{|\alpha|=k} \left|D_y^\alpha K(y, \phi_1) - D_y^\alpha K(y, x^{(j)})\right| |(x - x^{(j)})^\alpha|, \quad x, y \in O_j. \end{aligned}$$

Repetindo o processo para L_2, concluímos que

$$\begin{aligned} 2k!|L_2(x, y)| \le &\sum_{|\alpha|=k} \left|D_y^\alpha K(x, \theta_2) - D_y^\alpha K(x, x^{(j)})\right| |(y - x^{(j)})^\alpha| \\ &+ \sum_{|\alpha|=k} \left|D_y^\alpha K(y, \phi_2) - D_y^\alpha K(y, x^{(j)})\right| |(x - x^{(j)})^\alpha|, \quad x, y \in O_j. \end{aligned}$$

com θ_2 e ϕ_2 pertencentes, respectivamente, aos mesmos intervalos que θ_1 e ϕ_1 pertencem. Usando a hipótese, deduzimos que

$$\begin{aligned} 2k!|L_{\mathcal{P}}(x,y)| \leq B(x)\left(\|\theta_1 - x^{(j)}\|^\beta + \|\theta_2 - x^{(j)}\|^\beta\right) \sum_{|\alpha|=k} |(y-x^{(j)})^\alpha| \\ + B(y)\left(\|\phi_1 - x^{(j)}\|^\beta + \|\phi_2 - x^{(j)}\|^\beta\right) \sum_{|\alpha|=k} |(x-x^{(j)})^\alpha|, \quad x,y \in O_j. \end{aligned}$$

Para concluir a prova, precisamos estimar os dois somandos acima. Se $|\alpha| = k$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, então

$$\begin{aligned} |(y-x^{(j)})^\alpha| &= |y_1 - x_1^{(j)}|^{\alpha_1} |y_2 - x_2^{(j)}|^{\alpha_2} \ldots |y_m - x_m^{(j)}|^{\alpha_m} \\ &\leq [\max\{|y_\mu - x_\mu^{(j)}| : \mu = 1, 2, \ldots, m\}]^{|\alpha|} \\ &\leq \|y - x^{(j)}\|^k, \quad y \in O_j. \end{aligned}$$

Como O_j está contido em uma calota esférica de raio $\delta_m/2N$, para algum δ_m, concluímos que $|(y-x^{(j)})^\alpha| \leq \delta_m^k/N^k$, $y \in O_j$. Como θ_1 pertence ao segmento ligando $x^{(j)}$ e y, segue que $\|\theta_1 - x^{(j)}\|^\beta \leq \|y - x^{(j)}\|^\beta \leq \delta_m^\beta/N^\beta$. Procedendo de maneira análoga para limitar as outras quantidades, agora fica claro que a seguinte estimativa é válida

$$2k!|L_{\mathcal{P}}(x,y)| \leq \frac{2\delta_m^{k+\beta}}{N^{k+\beta}} \left(\sum_{|\alpha|=k} 1\right) (B(x) + B(y)), \quad x,y \in O_j. \tag{3.17}$$

Assim,

$$|L_{\mathcal{P}}(x,y)| \leq \frac{C(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}} (B(x) + B(y)), \quad x,y \in O_j, \tag{3.18}$$

onde

$$C(k,m,\beta) := \frac{\delta_m^{k+\beta}}{k!} \sum_{|\alpha|=k} 1. \tag{3.19}$$

A prova do teorema está completa. ■

Para a estimativa dos autovalores de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, usaremos o seguinte bem conhecido resultado ([Kre89, p.465]).

Lema 3.2.3. *O espectro de um operador linear auto-adjunto limitado A em um espaço de $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ está no intervalo fechado determinado pelos números reais* $\inf\{\langle A(x), x\rangle : x \in H; \langle x, x\rangle = 1\}$ *e* $\sup\{\langle A(x), x\rangle : x \in H; \langle x, x\rangle = 1\}$.

A partir de agora, $\|\cdot\|_2$ denotará a norma usual em $L^2(S^{m-1})$.

Teorema 3.2.4. *Sobre as condições do Teorema 3.2.2, considere o operador integral $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ associado a $L_{\mathcal{P}}$. Então, o espectro de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ está no intervalo*

$$[-C_1(k,m,\beta)N^{-k-\beta}, C_1(k,m,\beta)N^{-k-\beta}], \tag{3.20}$$

onde $C_1(k,m,\beta) := 2C(k,m,\beta)\|B\|_2\sigma_{m-1}(S^{m-1})$ e $B := \max\{B_\alpha : |\alpha| = k\}$.

Prova. Em vista do Lema 3.2.3 e do teorema de Fubini, é suficiente estimar a quantidade

$$I := \int_{S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} L_{\mathcal{P}}(x,y) f(x)\, \overline{f(y)}\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \tag{3.21}$$

quando $f \in L^2(S^{m-1})$. Usando o Teorema 3.2.2, temos que

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_{S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} |L_{\mathcal{P}}(x,y)||f(x)||f(y)|\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \\ &\leq \frac{2C(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}} \left[\int_{S^{m-1}} B(x)|f(x)|\, d\sigma_{m-1}(x) \int_{S^{m-1}} |f(y)|\, d\sigma_{m-1}(y) \right] \end{aligned}$$

Como $B \in L^2(S^{m-1})$, depois de uma aplicação da desigualdade de Holder, a desigualdade acima torna-se

$$|I| \leq \frac{2C(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}} \|B\|_2 \|f\|_2^2 \sigma_{m-1}(S^{m-1}) = \frac{C_1(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}} \|f\|_2^2, \tag{3.22}$$

onde $C_1(k,m,\beta) := 2C(k,m,\beta)\|B\|_2\sigma_{m-1}(S^{m-1})$. ■

3.3 Autovalores do operador associado com uma $\mathcal{P}$-decomposição

Nesta seção provaremos estimativas para os autovalores do operador integral $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ associado com a $\mathcal{P}$-decomposição $K_{\mathcal{P}}$ de K, quando K é positivo definido e suficientemente suave e $\mathcal{P}$ é uma N-partição de S^{m-1}.

Começamos com vários resultados técnicos relativos a valores singulares de operadores compactos. Se T é um operador compacto em um espaço de Hilbert, um *valor singular de* T é um autovalor de $(T^*T)^{1/2}$. No que segue, enumeraremos os valores singulares não nulos de T em ordem decrescente, considerando suas multiplicidade: $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \ldots$. Se o posto ρ de $(T^*T)^{1/2}$ é finito, $s_j(T) = 0$, $j \geq \rho + 1$. Os autovalores de T são enumerados em ordem decrescente de acordo com o teorema espectral para operadores compactos, digamos, $|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \ldots$, considerando a multiplicidade.

O seguinte resultado básico faz uma relação entre as sequências $\{s_j(T)\}$ e $\{\lambda_j(T)\}$.

Lema 3.3.1. *Se um operador compacto T em um espaço de Hilbert é ou hermitiano ou normal, então $s_j(T) = |\lambda_j(T)|$, $j = 1, 2, \ldots$.*

Lema 3.3.2. *Sejam T_1 e T_2 operadores compactos em um espaço de Hilbert. As seguintes afirmações são verdadeiras:*
(i) Se $T_2 - T_1$ é um operador de posto no máximo n, então $s_{j+n}(T_1) \leq s_j(T_2)$, $j = 1, 2, \ldots$;
(ii) $\sum_{j=1}^{n} s_j(T_1 + T_2) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(T_1) + \sum_{j=1}^{n} s_j(T_2)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Prova. Corolário 2.1 em [GK69] justifica (i) enquanto o Corolário 3.6 em [GGK00] implica (ii). ■

Lema 3.3.3. *Seja T um operador linear compacto em um espaço de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Se $\{\phi_j : j = 1, 2, \ldots, l\}$ é um sistema ortonormal em H, então*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(T) \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle T(\phi_j), \phi_j\rangle|, \quad n = 1, 2, \ldots, l. \tag{3.23}$$

Prova. Este é o Lema 4.1 [GK69]. ■

O Teorema 3.3.10 abaixo apresenta uma estimativa para os autovalores do operador integral $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$, quando mantemos as hipóteses do Teorema 3.2.2 em K. O resultado é um passo importante para obtermos uma estimativa dos autovalores de $\mathcal{K}$. Antes disso, precisamos de vários resultados técnicos, dois deles sobre operadores nucleares (*trace-class*), uma classe especial de operadores compactos em espaços de Hilbert descritos como segue. Um operador T em um espaço de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é *nuclear* (ou *trace-class*) se $\sum_{v\in\mathcal{B}}\langle (T^*T)^{1/2}v, v\rangle < \infty$ sempre que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de H. Exemplos básicos de operadores nucleares são dados pelo lema a seguir

Lema 3.3.4. *Um operador de posto finito em um espaço de Hilbert é trace-class.*

Prova. Veja o Teorema 18.11-(d) em [Con00]. ■

Todo operador trace-class é compacto. O resultado a seguir trata sobre a recíproca.

Lema 3.3.5. *Seja T um operador compacto em um espaço de Hilbert. Então, T é trace-class se, e somente se, $\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T) < \infty$.*

Prova. Veja [RS80, p. 209]. ■

Retornando ao contexto esférico, o seguinte teorema é crucial.

Teorema 3.3.6. *Seja $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido tal que*

$$\int_{S^{m-1}} K(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x) + \int_{S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} |K(x,y)|^2\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) < \infty. \tag{3.24}$$

Então, os autovalores de $\mathcal{K}$ satisfazem

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) = \int_{S^{m-1}} K(x,x) d\sigma_{m-1}(x). \tag{3.25}$$

Em particular, $\mathcal{K}$ é trace-class.

Prova. A fórmula (3.25) é uma consequência direta do clássico teorema de Mercer para núcleos em espaços de Hausdorff compactos (veja Seção 7 em [Sch00]). O fato $\mathcal{K}$ ser trace-class segue do Lema 3.3.1 e do Lema 3.3.5. ■

É fácil ver que a continuidade de K é suficiente para (3.24) valer.

Nos dois lemas a seguir provamos propriedades espectrais básicas dos operadores integrais gerados por $K_{\mathcal{P}}$ e $L_{\mathcal{P}}$, quando K é positivo definido.

Lema 3.3.7. *Sejam K como no teorema anterior e $\mathcal{P}$ uma partição de S^{m-1}. Então, $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ é trace-class e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}_{\mathcal{P}}) = \int_{S^{m-1}} K(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x). \tag{3.26}$$

Prova. Pelo Teorema 3.1.5, $K_{\mathcal{P}}$ é positivo definido. A definição de $K_{\mathcal{P}}$ implica que

$$\int_{S^{m-1}} K_{\mathcal{P}}(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x) = \int_{S^{m-1}} K(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x) \tag{3.27}$$

e

$$\int_{S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} |K_{\mathcal{P}}(x,y)|^2\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \le \int_{S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} |K(x,y)|^2\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y). \tag{3.28}$$

Assim, o resultado segue do Teorema 3.3.6. ■

Lema 3.3.8. *Sejam K como no teorema anterior e $\mathcal{P}$ uma partição de S^{m-1}. Então, $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ é trace-class e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(\mathcal{L}_{\mathcal{P}})| \le \int_{S^{m-1}} L_{\mathcal{P}}(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x). \tag{3.29}$$

Prova. O Teorema 3.2.1 mostra que $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} - \mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ tem posto finito. Logo, devido ao Lema 3.3.4, ele é um operador trace-class e, obviamente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{L}_{\mathcal{P}} - \mathcal{K}_{\mathcal{P}}) &= \int_{S^{m-1}} (L_{\mathcal{P}}(x,x) - K_{\mathcal{P}}(x,x))\, d\sigma_{m-1}(x) \\ &= \int_{S^{m-1}} L_{\mathcal{P}}(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x) - \int_{S^{m-1}} K(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Sendo uma soma de operadores trace-class, $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ é então trace-class. Recordando o Lema 3.3.7 e usando o Lema 3.3.2-(ii), deduzimos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{L}_{\mathcal{P}}) \le \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{L}_{\mathcal{P}} - \mathcal{K}_{\mathcal{P}}) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\mathcal{K}_{\mathcal{P}}) = \int_{S^{m-1}} L_{\mathcal{P}}(x,x)\, d\sigma_{m-1}(x). \tag{3.30}$$

A desigualdade do lema agora segue do Lema 3.3.1. ■

O Lema 3.3.9 abaixo é uma versão para operador de um resultado bastante conhecido da teoria de matrizes e núcleos positivos definido (veja, por exemplo, [Bax91, Mic86]).

Lema 3.3.9. *Sejam $K_1, K_2 : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ núcleos. Se K_1 é hermitiano, K_2 é positivo definido e $K_2 - K_1$ é degenerado de posto n, então o operador integral $\mathcal{K}_1$ tem no máximo n autovalores negativos.*

Prova. Este é o Lema 1 em [CL88]. ■

Teorema 3.3.10. *Sejam $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido e k um inteiro não negative. Assuma que $D_y^\alpha K$ existe, é contínua, e é (B_α, β)-Lipschitz, sempre que $|\alpha| = k$. Seja $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$ uma N-partição de S^{m-1}, escolha pontos $x^{(j)} \in O_j$, $j = 1, 2, \ldots, \overline{N}$ e considere o núcleo $L_\mathcal{P}$. Então,*

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}_\mathcal{P}) \;\; &\leq \;\; \sum_{j=1}^{\overline{N}} \frac{1}{\sigma_{m-1}(O_j)} \int_{O_j} \int_{O_j} (L_\mathcal{P}(x,x) - L_\mathcal{P}(x,y))\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \\ &\qquad + 2C_k^m \frac{C_1(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}},\end{aligned}$$

onde a constante $C_1(k, m, \beta)$ é a do Teorema 3.2.4.

Prova. O Lema 3.3.9 mostra que $\mathcal{L}_\mathcal{P}$ tem no máximo C_k^m autovalores negativos. Recordando o Teorema 3.2.4 e usando o Lema 3.3.8 concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{S^{m-1}} L_\mathcal{P}(x,x) d\sigma_{m-1}(x) \;\; &\geq \;\; \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu(\mathcal{L}_\mathcal{P})| + 2\sum \{\lambda_\nu(\mathcal{L}_\mathcal{P}) : \lambda_\nu(\mathcal{L}_\mathcal{P}) < 0\} \\ &\geq \;\; \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_\nu(\mathcal{L}_\mathcal{P})| - 2C_k^m \frac{C_1(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}}.\end{aligned}$$

A seguir, quebramos a última soma acima em $\overline{N}$ e estimamos a soma resultante. Devidos aos Lemas 3.3.1 e 3.3.2-(i) e ao fato de $\mathcal{K}_\mathcal{P}$ ser positivo definido, deduzimos que

$$\lambda_{\nu+C_k^m}(\mathcal{K}_\mathcal{P}) = |\lambda_{\nu+C_k^m}(\mathcal{K}_\mathcal{P})| = s_{\nu+C_k^m}(\mathcal{K}_\mathcal{P}) \leq s_\nu(\mathcal{L}_\mathcal{P}) = |\lambda_\nu(\mathcal{L}_\mathcal{P})|, \quad \nu = 1, 2 \ldots. \tag{3.31}$$

Logo,

$$\sum_{\nu=\overline{N}+1}^{\infty} |\lambda_\nu(\mathcal{L}_\mathcal{P})| \geq \sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}_\mathcal{P}). \tag{3.32}$$

Combinando o Lema 3.3.1 e o Lema 3.3.3, obtemos that

$$\sum_{j=1}^{\overline{N}} \int_{S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} L_\mathcal{P}(x,y)\phi_j(x)\overline{\phi_j(y)} d\sigma_{m-1}(x) d\sigma_{m-1}(y) \leq \sum_{j=1}^{\overline{N}} s_j(\mathcal{L}_\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{\overline{N}} |\lambda_j(\mathcal{L}_\mathcal{P})|, \tag{3.33}$$

sempre que $\{\phi_j : j = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$ é um sistema ortonormal de $L_2(S^{m-1})$. Em particular, tomando $\phi_j = (\sigma_{m-1}(O_j))^{-1/2}\chi_{O_j}$, $j = 1, 2, \ldots, \overline{N}$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\overline{N}} \frac{1}{\sigma_{m-1}(O_j)} \int_{O_j}\int_{O_j} L_{\mathcal{P}}(x,y)d\sigma_{m-1}(x)d\sigma_{m-1}(y) \leq \sum_{j=1}^{\overline{N}} |\lambda_j(\mathcal{L}_{\mathcal{P}})|. \tag{3.34}$$

Finalmente, a desigualdade (3.32) nos fornece

$$\sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}_{\mathcal{P}}) \leq \int_{S^{m-1}} L_{\mathcal{P}}(x,x)d\sigma_{m-1}(x) + 2C_k^m \frac{C_1(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}} - \sum_{j=1}^{\overline{N}} |\lambda_j(\mathcal{L}_{\mathcal{P}})|, \tag{3.35}$$

enquanto que (3.34) e um cálculo simples nos permite concluir a desigualdade do enunciado do teorema. ■

3.4 Estimativas para os autovalores de $\mathcal{K}$

A $\mathcal{P}$-decomposição de K coincide com K quando restringimos ambos aos elementos da partição $\mathcal{P}$. Assim, uma questão a ser resolvida é como comparar os autovalores dos operadores integrais correspondentes $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{K}$. Usando o teorema do min-max para operadores compactos auto-adjuntos ([GK69, p.25]) não é difícil ver que $\lambda_1(\mathcal{K}_{\mathcal{P}}) \leq \lambda_1(\mathcal{K})$, mas não é fácil seguir adiante. Se o núcleo K é suave no sentido descrito na seção anterior, os resultados nesta seção mostrarão que uma comparação melhor pode ser feita.

O Lema 3.4.1 abaixo nos permite deduzir duas desigualdades relacionando os autovalores de $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{K}$.

Lema 3.4.1. *Sejam T um operador compacto em um espaço de Hilbert H e $\{P_l : l = 1, 2, \ldots, k\}$ um conjunto de projeções mutuamente ortogonais em H. Se $T_k := \sum_{l=1}^{k} P_l \circ T \circ P_l$, então*

$$\sum_{l=1}^{n} s_l(T_k) \leq \sum_{l=1}^{n} s_l(T), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.36}$$

Prova. Veja [GK69, p.52]. ■

Lema 3.4.2. *Sejam $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido e $\mathcal{P}$ uma partição de S^{m-1}. Então,*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathcal{K}_{\mathcal{P}}) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathcal{K}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.37}$$

e

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}_{\mathcal{P}}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.38}$$

Prova. Do Lema 3.3.7 sabemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}_{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}). \tag{3.39}$$

Logo, para provar o lema, é suficiente provar sua primeira afirmação. Escreva $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$. Claramente, o conjunto $\{P_l : l = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$, onde $P_l(f) = f\chi_{O_l}$, $f \in L^2(S^{m-1})$, é um conjunto de projeções mutuamente ortogonais em $L^2(S^{m-1})$ e $\mathcal{K}_{\mathcal{P}} = \sum_{l=1}^{\overline{N}} P_l \circ \mathcal{K} \circ P_l$. Assim, (3.37) é uma consequência do Lema 3.4.1. ∎

O Teorema 3.4.3 abaixo estabelece uma estimativa para os autovalores do operador integral $\mathcal{K}$, quando positividade definida e suavidade são mantidas

Teorema 3.4.3. *Sejam $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido e k um inteiro não negative. Assuma que $D_y^{\alpha} K$ existe, é contínua, e é (B_α, β)-Lipschitz, sempre que $|\alpha| = k$. Dada uma N-partição $\mathcal{P}$ de S^{m-1}, existe uma constante $C_2(k, m, \beta)$ tal que*

$$\sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}) \leq \frac{C_2(k, m, \beta)}{N^{k+\beta}}. \tag{3.40}$$

Prova. Seja $\mathcal{P} = \{O_j : j = 1, 2, \ldots, \overline{N}\}$ uma N-partição de S^{m-1}, escolha pontos $x^{(j)} \in O_j$, $j = 1, 2, \ldots, \overline{N}$ e considere o núcleo auxiliar $L_{\mathcal{P}}$. Combinando o Lema 3.4.2 e o Teorema 3.3.10, deduzimos a desigualdade

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}) \ \leq \ & \sum_{j=1}^{\overline{N}} \frac{1}{\sigma_{m-1}(O_j)} \int_{O_j} \int_{O_j} \left(L_{\mathcal{P}}(x,x) - L_{\mathcal{P}}(x,y)\right) d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \\ & + 2C_k^m \frac{C_1(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}) \ \leq \ & \sum_{j=1}^{\overline{N}} \frac{1}{\sigma_{m-1}(O_j)} \int_{O_j} \int_{O_j} \left(|L_{\mathcal{P}}(x,x)| + |L_{\mathcal{P}}(x,y)|\right) d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \\ & + 2C_k^m \frac{C_1(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}}, \end{aligned}$$

para concluir a prova, é suficiente estimar convenientemente o lado direto da desigualdade acima. Recordando o Teorema 3.2.2, podemos estimar a soma finita que aparece acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{j=1}^{\overline{N}} \frac{1}{\sigma_{m-1}(O_j)} \int_{O_j}\int_{O_j} \frac{C(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}}(3B(x)+B(y))\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \\ &= 4\frac{C(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}} \sum_{j=1}^{\overline{N}} \frac{1}{\sigma_{m-1}(O_j)} \int_{O_j}\int_{O_j} B(x)\, d\sigma_{m-1}(x)\, d\sigma_{m-1}(y) \\ &= 4\frac{C(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}} \sum_{j=1}^{\overline{N}} \int_{O_j} B(x)\, d\sigma_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}) \leq \frac{C_2(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}}, \tag{3.41}$$

onde

$$C_2(k,m,\beta) := 4C(k,m,\beta)\int_{S^{m-1}} B(x)d\sigma_{m-1}(x) + 2C_k^m C_1(k,m,\beta). \tag{3.42}$$

A prova está completa. ■

3.5 Decaimento dos autovalores de $\mathcal{K}$

Nesta seção deduzimos um decaimento para os autovalores de $\mathcal{K}$, ainda sobre a positividade definida e suavidade K.

O Lema 3.5.1 abaixo é puramente técnico. Ele será usado na prova do resultado principal deste capítulo.

Lema 3.5.1. *Seja $\{a_\nu\}$ uma sequência não crecente de números reais não negativos. Sejam l, q e N_0 inteiros não negativos, p um inteiro positive maior ou igual a 1 e $\gamma \in \mathbb{R}$. Suponha que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $N \geq N_0$, existe $\overline{N} \leq pN^l$ tal que*

$$\sum_{\nu=\overline{N}+q+1}^{\infty} a_\nu \leq \frac{C}{N^\gamma}. \tag{3.43}$$

Então, o conjunto $\{n^{1+\gamma/l} a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ é limitado.

Prova. É fácil ver que

$$\begin{aligned} n^{l+\gamma}a_{2pn^l+q} &= n^l n^\gamma a_{2pn^l+q} \\ &\leq n^\gamma a_{pn^l+q+1} + \cdots + n^\gamma a_{2pn^l+q-1} + n^\gamma a_{2pn^l+q} \\ &\leq \sum_{\nu=pn^l+q+1}^{\infty} n^\gamma a_\nu \\ &\leq \sum_{\nu=\overline{N}+q+1}^{\infty} n^\gamma a_\nu \leq C, \quad n \geq N_0. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{n^{l+\gamma}a_{2pn^l+q} : n = 1, 2, \ldots\}$ é limitado. Para cada inteiro $j \geq q$, podemos encontrar um inteiro não negativo n_j de modo que

$$2pn_j^l + q \leq j \leq 2p(n_j+1)^l + q. \tag{3.44}$$

Em particular,

$$j^{1+\gamma/l}a_j \leq (2p(n_j+1)^l + q)^{1+\gamma/l} a_{2pn_j^l+q}. \tag{3.45}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(p(n+1)^r + q)^\gamma}{p^{\gamma+1}n^{r\gamma}} = \frac{1}{p} < 1, \tag{3.46}$$

existe um inteiro positivo N_1 tal que

$$(2p(n_j+1)^l + q)^{1+\gamma/l} < (2p)^{2+\gamma/l} n_j^{l+\gamma}, \quad j \geq N_1. \tag{3.47}$$

Portanto,

$$j^{1+\gamma/l}a_j \leq (2p)^{2+\gamma/l} n_j^{l+\gamma} a_{2pn_j^l+q} \leq (2p)^{2+\gamma/l} \sup_{n\in\mathbb{N}}\{n^{l+\gamma}a_{2pn_j^l+q}\}, \quad j \geq N_1. \tag{3.48}$$

O lema segue. ■

Finalmente, estamos prontos para fornecer a

Prova do Teorema 3.0.1. Seja $N \geq 1$. Devido ao Teorema 3.1.4, podemos escolher uma (ϕ_m, N)-partição de S^{m-1} de cardinalidade $\overline{N} = (4N+1)(2N)^{m-2}$. Usando o Teorema 3.4.3, podemos encontrar uma constante $C_2(k, m, \beta)$ tal que

$$\sum_{\nu=\overline{N}+C_k^m+1}^{\infty} \lambda_\nu(\mathcal{K}) \leq \frac{C_2(k,m,\beta)}{N^{k+\beta}}. \tag{3.49}$$

Como a constante $C_2(k, m, \beta)$ não depende de N e $\overline{N} \leq 2^{m+2}N^{m-1}$, o Lema 3.5.1 implica que a sequência

$$\{n^{1+(k+\beta)/(m-1)}\lambda_n(\mathcal{K}) : n = 1, 2, \ldots\} \tag{3.50}$$

é limitada. ■

3.6 Exemplos

Nesta seção apresentaremos exemplos de núcleos satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.0.1. Um deles indicará que o decaimento descrito no Teorema 3.0.1 é provavelmente ótimo.

3.6.1 Um exemplo

Esta subseção contém um exemplo de um operador integral cujos autovalores possuem o decaimento descrito no Teorema 3.0.1.

Lema 3.6.1. *Se $\beta \in (0,1)$, então a sequência $\{(n-1)^{\beta-1}\sum_{j=1}^{n} j^{-\beta} : n = 2,3,\ldots\}$ é limitada.*

Prova. É fácil ver que

$$\sum_{j=1}^{n} j^{-\beta} < 1 + \int_1^n x^{-\beta}dx = 1 + \frac{1}{1-\beta} + \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad n = 2,3,\ldots. \tag{3.51}$$

Assim,

$$(n-1)^{\beta-1}\sum_{j=1}^{n} j^{-\beta} \leq \left(\frac{2-\beta}{1-\beta}\right)(n-1)^{\beta-1} + \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-\beta}, \quad n = 2,3,\ldots \tag{3.52}$$

e o resultado segue. ■

Lema 3.6.2. *Se $\beta \in (0,1)$, então a sequência $\{n^{\beta}\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-\beta-1}\}$ é limitada.*

Prova. Similar à prova do Lemma 3.6.1. ■

Teorema 3.6.3. *Sejam k um inteiro não negativo e $\beta \in (0,1)$. O núcleo $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ dado por*

$$K(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta-k-1} e^{ij(y-x)\cdot l}, \quad x,y \in S^{m-1}, \tag{3.53}$$

onde $l := (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^m$, satisfaz as hipóteses do Teorema 3.0.1.

Prova. Claro que a série definindo K é absoluta e uniformemente convergente. A positividade definida de K segue da igualdade

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} K(x_\mu, x_\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta-k-1} \sum_{\mu=1}^{n} \left|c_\mu e^{ijx_\mu}\right|^2. \tag{3.54}$$

Agora, seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ com $|\alpha| = k$. É fácil ver que

$$D_y^\alpha K(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta-k-1} D_y^\alpha e^{ij(y-x)\cdot l} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta-k-1} \left(\prod_{\mu=1}^{m} (ij)^{\alpha_\mu} \right) e^{ij(y-x)\cdot l}, \quad x, y \in S^{m-1}.$$

Como a última série acima é absoluta e uniformemente convergente, $D_y^\alpha K$ coincide com a série e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Para verificar que $D_y^\alpha K$ é (B_α, β)-Lipschitz para algum B_α, estimamos o lado direito de

$$D_y^\alpha K(w,x) - D_y^\alpha K(w,y) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta-k-1} \left(e^{ij(x-w)\cdot l} - e^{ij(y-w)\cdot l} \right) \prod_{\mu=1}^{m} (ij)^{\alpha_\mu}, \quad x, y, w \in S^{m-1}.$$

Para fazer isto, assumimos $x \neq y$ e quebramos a soma em algum inteiro n escolhido de modo que $n^{-1} < ||x-y|| \leq 2(n-1)^{-1}$. Se

$$S_1 := \sum_{j=1}^{n} j^{-\beta-k-1} \left(e^{ij(x-w)\cdot l} - e^{ij(y-w)\cdot l} \right) \prod_{\mu=1}^{m} (ij)^{\alpha_\mu}, \tag{3.55}$$

é fácil ver que

$$|S_1| \leq \sum_{j=1}^{n} j^{-\beta-k-1} \left| e^{-ijw\cdot l} \right| \left| e^{ijx\cdot l} - e^{ijy\cdot l} \right| \prod_{\mu=1}^{m} |(ij)^{\alpha_\mu}| = \sum_{j=1}^{n} j^{-\beta-1} \left(2 - 2\cos j(x-y)\cdot l \right)^{1/2}.$$

Logo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos que

$$|S_1| \leq \sum_{j=1}^{n} j^{-\beta} \left| (x-y)\cdot l \right| \leq \sum_{j=1}^{n} j^{-\beta} \|l\| \|x-y\| = (m+1)^{1/2} \|x-y\| \sum_{j=1}^{n} j^{-\beta}. \tag{3.56}$$

Finalmente, recordando nossa escolha de n e usando o Lema 3.6.1, podemos encontrar uma constante C tal que

$$|S_1| \leq C(m+1)^{1/2} ||x-y|| (n-1)^{1-\beta} \leq 2^{1-\beta} C (m+1)^{1/2} ||x-y||^\beta. \tag{3.57}$$

Se

$$S_2 := \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-\beta-k-1} \left(e^{ij(x-w)\cdot l} - e^{ij(y-w)\cdot l} \right) \prod_{\mu=1}^{m} (ij)^{\alpha_\mu}, \tag{3.58}$$

então

$$|S_2| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-\beta-1} \left(\left| e^{ijx\cdot l} \right| + \left| e^{ijy\cdot l} \right| \right) \leq 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-\beta-1}. \tag{3.59}$$

Devido ao Lema 3.6.2, podemos encontrar uma constante C_1 de modo que

$$|S_2| \leq 2C_1 \frac{1}{n^\beta} \leq 2C_1 ||x-y||^\beta. \tag{3.60}$$

Assim,

$$\left|D_y^\alpha K(w,x) - D_y^\alpha K(w,y)\right| \leq |S_1| + |S_2| \leq 2\left(2^{-\beta} C m^{1/2} + C_1\right) ||x-y||^\beta. \tag{3.61}$$

Segue que $D_y^\alpha K$ é (B_α, β)-Lipschitz, onde $B_\alpha(w) = 2(2^{-\beta} C m^{1/2} + C_1)$. A prova está completa. ■

3.6.2 Outro exemplo

Nesta subseção. exibiremos uma sequência de operadores integrais de posto finito cujos núcleos satisfazem as hipóteses do Teorema 3.0.1. O número de autovalores cresce com o posto do operador. O exemplo indica que o decaimento então descrito é provavelmente ótimo.

Usaremos um dado conjunto completo $\{Y_{\mu,\nu} : \nu = 1, 2, \ldots, N(m,\mu); \mu = 0, 1, \ldots\}$ de harmônicos esféricos (veja [Mül98]) em m variáveis. Assim,

$$N(m,\mu) := \frac{2\mu + m - 2}{\mu + m - 2} \frac{(\mu + m - 2)!}{\mu!(m-2)!} \tag{3.62}$$

é a dimensão do espaço $\mathcal{H}_\mu^m$ dos harmônicos esféricos de grau μ em m variáveis e

$$\int_{S^{m-1}} Y_{\mu,\nu}(x)\overline{Y_{\mu',\nu'}(x)} d\sigma_{m-1}(x) = \delta_{\mu,\mu'}\delta_{\nu,\nu'}. \tag{3.63}$$

Consideremos os núcleos dados por

$$K_p(x,y) = (1 + x \cdot y)^p, \quad x, y \in S^{m-1}, \tag{3.64}$$

onde p é um inteiro não negativo. Eles são positivos definidos devido ao teorema do produto de Schur ([HJ90, p. 455]). Para um inteiro não negativo fixado e um multi-índice α tal que $|\alpha| = k$,

$$D_y^\alpha K_p(x,y) = p(p-1)\cdots(p-k+1)(1 + x \cdot y)^{p-k} x^\alpha, \quad x, y \in S^{m-1}, \quad p \geq k. \tag{3.65}$$

Logo, para $x, y, w \in S^{m-1}$,

$$|D_y^\alpha K_p(w,x) - D_y^\alpha K_p(w,y)| = p(p-1)\cdots(p-k+1)\left|(1 + w \cdot x)^{p-k} - (1 + w \cdot y)^{p-k}\right|.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio a $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = (1 + \cos t)^{p-k}$, temos que

$$\left|(1 + w \cdot x)^{p-k} - (1 + w \cdot y)^{p-k}\right| \leq (p-k)2^{p-k-1}|d_m(w,x) - d_m(w,y)|, \quad x, y, w \in S^{m-1},$$

onde d_m representa a usual distância geodésica em S^{m-1}. Por outro lado, se $\beta \in (0,1]$ está fixado, é rápido ver que existe uma constante positiva $c = c(\beta)$ tal que $d_m(x,y) \leq c\|x-y\|^\beta$, $x, y \in S^{m-1}$. Assim,

$$|D_y^\alpha K(w,x) - D_y^\alpha K(w,y)| \leq c\left(p(p-1)\cdots(p-k)2^{p-k-1}\right)\|x-y\|^\beta, \quad x,y,w \in S^{m-1},$$

ou seja, K_p é (B_α, β)-Lipschitz, onde

$$B_\alpha(w) = c\, p(p-1)\cdots(p-k)2^{p-k-1}, \quad w \in S^{m-1}. \tag{3.66}$$

Agora é claro que as hipóteses do Teorema 3.0.1 são satisfeitas.

Para finalizar, enunciamos o último resultado e justificamos a informação adicional listada em seu enunciado.

Teorema 3.6.4. *A sequência $\{K_p\}$ introduzida acima satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) Cada K_p satisfaz as hipóteses do Teorema 3.0.1;
(ii) K_p é degenerado de posto $N(m,0) + N(m,1) + \cdots + N(m,p)$;
(iii) A sequência

$$\left\{\sup_n \{n^{1+(k+\beta)/(m-1)}\lambda_n(\mathcal{K}) : n = 1,2,\ldots,p\}\right\} \tag{3.67}$$

decresce para 0 quando $p \to \infty$.

Prova. Apenas (iii) requer uma prova. Usando a conhecida fórmula de Funk-Hecke ([Gro96, p.98]), não é difícil ver que os únicos autovalores não nulos de $\mathcal{K}_p$ são dados por

$$\lambda_j(\mathcal{K}_p) = \frac{p!2^{p+m-2}}{(p-j+1)!}\frac{\Gamma(p+(m-1)/2)\Gamma(m/2)}{\pi^{1/2}\Gamma(p+j+m-2)}, \quad j = 1,2,\ldots,p. \tag{3.68}$$

Cada $\lambda_j(\mathcal{K}_p)$ ocorre com multiplicidade $N(m,j)$ e as correspondentes autofunções são os elementos básicos de $\mathcal{H}_j^m$. De acordo com cálculos apresentados em [BH01, MNY06], as seguintes estimativas valem

$$\frac{A(p,m)}{(j+p+m-2)^{2p+m-3/2}} < \lambda_j(\mathcal{K}_p) < \frac{B(p,m)}{(j+p+m-2)^{p+m-3/2}}, \quad j = 1,2,\ldots,p, \tag{3.69}$$

onde

$$A(p,m) := \frac{e^p p!}{2\pi^{3/2}}(2e)^{p+m-2}e^{-1/6}p^{-p-1/2}\Gamma(p+(m-1)/2)\Gamma(m/2) \tag{3.70}$$

e $B(p,m) := (2\pi)^{1/2}e^{1/6}p^{p+1/2}A(p,m)$. Considerando as multiplicidades, para limitar a sequência no enunciado do teorema, é suficiente encontrar um limitante inferior para o conjunto

$$\Gamma_p := \left\{\lambda_j(\mathcal{K})\left(N(m,0) + N(m,1) + \cdots + N(m,j-1)\right)^{1+(k+\beta)/(m-1)},\ j = 1,2,\ldots,p\right\}.$$

Entretanto, o número $N(m,0)+N(m,1)+\cdots+N(m,j-1)$ coincide com a dimensão

$$d_j^m = \frac{(m+j-2)!}{(m-1)!(j-1)!} + \frac{(m+j-3)!}{(m-1)!(j-2)!} \tag{3.71}$$

do espaço de todos polinômios esféricos de grau no máximo $j-1$ em m variáveis. Como $d_j^m \geq 2(j-1)^{m-1}/(m-1)!$, então um limite inferior para o conjunto Γ_p é

$$\min\left\{\lambda_1(\mathcal{K}_p), A(p,m)\left(\frac{2}{(m-1)!}\right)^{1+(k+\beta)/(m-1)} \frac{1}{(2p+m-3)^{2p+m-3/2}}\right\}. \tag{3.72}$$

Como esta quantidade se aproxima de 0 quando $p \to \infty$, segue (iii). ■

3.7 Outros trabalhos relacionados

Finalizamos este capítulo descrevendo sucintamente resultados de dois outros artigos, os quais estão relacionados com o assunto apresentado aqui.

Em [CMP12], analisamos alguns aspectos da teoria de Mercer quando o operador integral atua em $L^2(X,\mu)$, onde X é um espaço topológico primeiro enumerável e μ é uma medida não degenerada. Obtivemos resultados alinhados ao Teorema de Mercer e, sob uma condição de positividade definida do núcleo gerador do operador, também deduzimos representações em série para o núcleo, nuclearidade do operador e uma fórmula de integração para calcular o traço do operador, dentre outros. Dessa forma, melhoramos significativamente resultados similares encontrados na literatura, onde X é metrizável e compacto e μ é finita.

Em [dCMP12], investigamos a nuclearidade de operadores integrais em $L^2(X,\mu)$ quando X é um espaço de Hausdorff localmente compacto segundo enumerável e μ é uma medida de Borel localmente finita, não degenerada e σ-finita. Este conjunto de hipóteses inclui outros casos provados na literatura, por exemplo, quando X é um espaço métrico compacto e μ é uma medida finita especial. Nossos resultados podem ser aplicados às esferas, ao toro e a outros subconjuntos relevantes de $\mathbb{R}^m$.

Os trabalhos citados acima fizeram parte da tese de doutorado de M. H. Castro, do qual a candidata foi co-orientadora.

Capítulo 4

Núcleos positivos definidos: diferenciabilidade

Neste capítulo descreveremos os resultados do artigo [MOP09]. Aqui trataremos sobre diferenciabilidade de núcleos positivos definidos em dois contextos. Primeiro consideraremos núcleos

$$K : O \times O \to \mathbb{C},$$

lembrando que O é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Neste caso, o principal resultado que estabeleceremos diz que quando K é positivo definido, certas derivadas de K ainda serão positivas definidas, a saber aquelas de mesma ordem em ambas variáveis. Este resultado bem como outros resultados técnicos sobre diferenciabilidade de núcleos positivos definidos estão contidos na Seção 4.1. Em uma segunda etapa, consideraremos núcleos positivos definidos

$$K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}.$$

É bem conhecido que Schoenberg [Sch42] caracterizou tais núcleos como sendo aqueles da forma

$$K(x, y) = \varphi(d_m(x, y)) \tag{4.1}$$

onde d_m é a distância geodésica em S^{m-1} e a função $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ é da forma

$$\varphi(t) = \sum_{k \in L(\varphi)} b_k P_k^{(m-2)/2}(\cos t), \tag{4.2}$$

onde $L(\varphi)$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}_+$, $b_k > 0$, $k \in L(\varphi)$, $\sum_{k \in L(\varphi)} b_k < \infty$ e $P_k^{(m-2)/2}$ é o polinômio de Gegenbauer de grau k associado com $(m-2)/2$. Na literatura é mais comum encontrar dito que a função φ é *positiva definida em* S^{m-1}.

Os núcleos estritamente positivos definidos em $S^{m-1} \times S^{m-1}$ foram caracterizados em [CMS03b] como sendo aqueles tais que $L(\varphi)$ contém infinitamente muitos inteiros pares e infinitamente muitos inteiros ímpares. Em particular, quando $L(\varphi) = \mathbb{Z}_+$, o núcleo K é estritamente positivo definido em $S^{m-1}\times S^{m-1}$. Para simplificar a notação, consideraremos apenas o caso $L(\varphi)=\mathbb{Z}_+$. Porém todos os resultados obtidos podem ser adaptados para outras escolhas do conjunto $L(\varphi)$.

Aplicando o Teorema da Adição ([Mül98]) em (4.2), vemos que o núcleo K é estritamente positivo definido e da forma

$$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{j=1}^{N_k} Y_{kj}(x)\overline{Y_{kj}(y)}, \quad x,y\in S^{m-1}, \tag{4.3}$$

onde $c_k>0$, $k=0,1,\ldots$, e $\{Y_{kj}: j=1,\ldots,N_k\}$ é uma base para o espaço dos polinômios harmônicos esféricos de grau k em m dimensões.

Dados multi-índices α e β, os resultados contidos na Seção 4.2, estabelecerão uma relação entre a $D^{\alpha,\beta}_{x,y}K$ e o núcleo dado pela expansão

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{j=1}^{N_k} D^{\alpha} Y_{kj}(x) D^{\beta}\overline{Y_{kj}(y)}, \quad x,y\in S^{m-1}. \tag{4.4}$$

Um problema similar, mas no contexto unidimensional, foi considerado em [Kad67].

4.1 Diferenciabilidade em abertos de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$

O principal resultado desta seção diz, de um modo geral, que certas derivadas de um núcleo positivo definido suave ainda são núcleos positivos definidos (Teorema 4.1.7). Para apresentar sua prova, introduziremos algumas notações e demonstraremos resultados preliminares.

Dados um núcleo $K: O\times O\to\mathbb{C}$ e $(x,y)\in O\times O$, consideramos os operadores diferença:

$$\Delta_{x_i,h}K(x,y) := K(x+he_i,y)-K(x,y), \quad i=1,\ldots,m, \tag{4.5}$$

$$\Delta_{y_j,h}K(x,y) := K(x,y+he_j)-K(x,y), \quad j=1,\ldots,m. \tag{4.6}$$

O conjunto $\{e_1,\ldots,e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$. O incremento h pode assumir qualquer valor desde que os argumentos permaneçam no domínio O. Claramente, este é o caso quando h está perto de 0. Para h suficientemente pequeno, é fácil ver que os símbolos comutam, isto é, $\Delta_{x_i,h}\circ\Delta_{y_j,h}=\Delta_{y_j,h}\circ\Delta_{x_i,h}$. Finalmente, se k é um inteiro positivo, escrevemos $\Delta^k_{x_i,h}=\Delta_{x_i,h}\circ\cdots\circ\Delta_{x_i,h}$ (k vezes). Para simplificar a notação, o símbolo de composição será escrito como um produto.

O Teorema 4.1.1 abaixo estabelece uma fórmula para calcular derivadas de um núcleo diferenciável $K: O\times O\to\mathbb{C}$. Ele é a versão multi-dimensional de um resultado em [BP06].

Teorema 4.1.1. *Se $K \in C^{2n}(O \times O)$ and $(x,y) \in O \times O$ then*

$$D^{\alpha,\beta}_{x,y} K(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{|\alpha+\beta|}} \prod_{i=1}^{m} \Delta^{\alpha_i}_{x_i,h} \prod_{j=1}^{m} \Delta^{\beta_j}_{y_j,h} K(x,y), \quad |\alpha|, |\beta| \leq n. \tag{4.7}$$

Prova. Sejam $K \in C^{2n}(O \times O)$, $(x,y) \in O \times O$ e α e β multi-índices tais que $|\alpha|, |\beta| \leq n$. Se $\alpha = \beta = 0$, nada precisa ser provado. Se ou $\alpha = 0$ e $|\beta| = 1$ ou $|\alpha| = 1$ e $\beta = 0$, então as fórmulas correspondem ao cálculo usual de derivadas parciais. Consideremos o caso $|\alpha| = |\beta| = 1$. Assumimos que a i-ésima componente de α e a j-ésima componente de β são iguais a 1. Primeiro observe que

$$\Delta_{x_i,h}\Delta_{y_j,h} K(x,y) = K(x + he_i, y + he_j) - K(x + he_i, y) - K(x, y + he_j) + K(x,y), \tag{4.8}$$

de modo que

$$\Delta_{x_i,h}\Delta_{y_j,h} K(x,y) = F(h) - F(0), \tag{4.9}$$

onde

$$F(t) := K(x + te_i, y + he_j) - K(x + te_i, y), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio a F, encontramos $\theta_h \in [0,h]$ tal que

$$\Delta_{x_i,h}\Delta_{y_j,h} K(x,y) = F'(\theta_h)h = h\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} K(x + \theta_h e_i, y + he_j) - \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} K(x + \theta_h e_i, y)\right). \tag{4.11}$$

Outra aplicação do mesmo teorema, agora com respeito à segunda variável de K, nos fornece

$$\Delta_{x_i,h}\Delta_{y_j,h} K(x,y) = h^2 D^{\alpha,\beta}_{x,y} K(x + \theta_h e_i, y + \phi_h e_j), \tag{4.12}$$

onde $\phi_h \in [0,h]$. Logo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \Delta_{x_i,h}\Delta_{y_j,h} K(x,y) = D^{\alpha,\beta}_{x,y} K(x,y). \tag{4.13}$$

No caso geral, pelo Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\prod_{i=1}^{m} \Delta^{\alpha_i}_{x_i,h} \prod_{j=1}^{m} \Delta^{\beta_j}_{y_j,h} K(x,y) = h^{|\alpha+\beta|} D^{\alpha,\beta}_{x,y} f\left(x + \sum_{\alpha_i \neq 0} \sum_{\mu=1}^{\alpha_i} \theta^i_\mu e_i, y + \sum_{\beta_j \neq 0} \sum_{\nu=1}^{\beta_j} \phi^j_\nu e_j\right), \tag{4.14}$$

onde $\theta^i_\mu, \phi^j_\nu \in [0,h]$, $\mu = 1, \ldots, \alpha_i$, $\nu = 1, \ldots, \beta_j$, $i,j = 1, \ldots, m$. Pela continuidade das derivadas, obtemos

$$\lim_{h\to 0} D^{\alpha,\beta}_{x,y} f\left(x + \sum_{\alpha_i \neq 0} \sum_{\mu=1}^{\alpha_i} \theta^i_\mu e_i, y + \sum_{\beta_j \neq 0} \sum_{\nu=1}^{\beta_j} \phi^j_\nu e_j\right) = D^{\alpha,\beta}_{x,y} K(x,y), \tag{4.15}$$

o que completa a prova do teorema. ■

O lema a seguir é a Proposition 2.1 em [BP06]. Ele estabelece a não negatividade definida de certas combinações lineares de blocos de uma matriz não negativa definida.

Lema 4.1.2. *Sejam l e n inteiros positivos e $\lambda := \{\lambda_0, \ldots, \lambda_l\} \subset \mathbb{C}$. Seja A uma matriz de ordem $n(l+1)$ tendo uma decomposição em bloco $A = (A_{\mu,\nu})$, onde cada $A_{\mu,\nu}$ tem ordem n. Se A é não negativa definida então o mesmo é verdadeiro para $A_\lambda := \sum_{\mu,\nu=0}^{l} \lambda_\mu \overline{\lambda_\nu} A_{\mu,\nu}$.*

Uma versão para núcleo do Lema 4.1.2 pode ser enunciada como segue.

Teorema 4.1.3. *Sejam X e Y conjuntos não vazios. Seja $K : X \times X \to \mathbb{C}$ um núcleo e considere as $l+1$ funções $g_\mu : Y \to X$, $\mu = 0, \ldots, l$. Seja $\lambda := \{\lambda_0, \ldots, \lambda_l\} \subset \mathbb{C}$ e defina*

$$F_\lambda(x, y) := \sum_{\mu,\nu=0}^{l} \lambda_\mu \overline{\lambda_\nu} K(g_\mu(x), g_\nu(y)), \quad x, y \in Y. \tag{4.16}$$

Se K é positivo definido em $X \times X$, então F_λ é positivo definido em $Y \times Y$.

Prova. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ pontos em Y. Considere a matriz A de ordem $n(l+1)$ tendo a decomposição em bloco na forma $A = (A_{\mu,\nu})$, onde

$$A_{\mu,\nu} = (K(g_\mu(x_i), g_\nu(x_j))), \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad \mu, \nu = 0, \ldots, l. \tag{4.17}$$

Então

$$(F_\lambda(x_i, x_j)) = \sum_{\mu,\nu=0}^{l} \lambda_\mu \overline{\lambda_\nu} A_{\mu,\nu} \tag{4.18}$$

e o Lema 4.1.2 é aplicável. ■

Observação 4.1.4. *Sobre as condições do Lema 4.1.2, é fácil verificar que A_λ é positiva definida quando $\sum_{\mu=0}^{l} |\lambda_\mu| > 0$ e A é positiva definida. Assim, mantendo a notação do Teorema 4.1.3, se K é estritamente positivo definido, $\sum_{\mu=0}^{l} |\lambda_\mu| > 0$, e cada g_μ é injetora, então F_λ é estritamente positivo definido.*

Exemplo 4.1.5. *X é um intervalo aberto e K é um núcleo positivo definido qualquer em $X \times X$. As funções $g_\mu : Y \to X$ são dadas por*

$$g_\mu(x) = x + h\mu, \quad \mu = 0, \ldots, l, \quad x \in Y, \tag{4.19}$$

onde $h \in \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$ são escolhidos de modo que a imagem de cada g_μ seja um subconjunto de X.

Exemplo 4.1.6. *(Extensão do Exemplo 4.1.5 à várias variáveis). X é um conjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^m$ K é um núcleo positivo definido qualquer em $X \times X$. As funções g_μ são dadas por*

$$g_\mu(x) = x + \mu h e_j, \quad \mu = 0, \ldots, l, \quad x \in Y. \tag{4.20}$$

Novamente, o número h e o domínio $Y \subset \mathbb{R}^m$ são escolhidos de modo que a imagem de cada g_μ seja um subconjunto de X.

O Teorema 4.1.7 mostra que para núcleos positivos definidos suficientemente suaves, as derivadas $D^{\alpha,\beta}_{x,y}K$, quando $\alpha = \beta$, são também positivas definidas. Um resultado similar no caso $\alpha \neq \beta$ não é verdadeiro, como a prova do teorema deixa claro.

Teorema 4.1.7. *Se $K \in C^{2n}(O \times O)$ é um núcleo positivo definido, então $D^{\alpha,\alpha}K$ é um núcleo positivo definido de classe $C^{2(n-|\alpha|)}(O \times O)$, sempre que $|\alpha| \leq n$.*

Prova. No caso $n = 0$ não há nada a ser provado. Assim, assumimos $n \geq 1$ e fixamos um multi-índice α de modo que $|\alpha| \leq n$. Devido ao Teorema 4.1.1, sabemos que

$$D^{\alpha,\alpha}K(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{|2\alpha|}} \prod_{i=1}^{m} \Delta^{\alpha_i}_{x_i,h} \prod_{j=1}^{m} \Delta^{\alpha_j}_{y_j,h} K(x,y). \tag{4.21}$$

Para mostrar a positividade definida de $D^{\alpha,\alpha}K$, sejam $x_1, \ldots, x_l$ pontos em O e $c_1, \ldots, c_l$ números complexos. Então,

$$\sum_{r,s=1}^{l} c_r\overline{c_s} D^{\alpha,\alpha}K(x_r,x_s) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2|\alpha|}} \sum_{r,s=1}^{l} c_r\overline{c_s} \prod_{i=1}^{m} \Delta^{\alpha_i}_{x_i,h} \prod_{j=1}^{m} \Delta^{\alpha_j}_{y_j,h} K(x_r,x_s). \tag{4.22}$$

Assim,

$$\Delta^{\alpha_j}_{y_j,h} K(x_r,x_s) = \sum_{\nu_j=0}^{\alpha_j} (-1)^{\nu_j+\varepsilon_j} \binom{\alpha_j}{\nu_j} K(x_r, x_s + h\nu_j e_j), \tag{4.23}$$

onde

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha_j \text{ is even,} \\ 1, & \text{if } \alpha_j \text{ is odd.} \end{cases} \tag{4.24}$$

Portanto,

$$\prod_{j=1}^{m} \Delta^{\alpha_j}_{y_j,h} K(x_r,x_s) = \sum_{\nu_1=0}^{\alpha_1} (-1)^{\nu_1+\varepsilon_1} \binom{\alpha_1}{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{\alpha_m} (-1)^{\nu_m+\varepsilon_m} \binom{\alpha_m}{\nu_m} K(x_r, x_s + h\sum_{j=1}^{m} \nu_j e_j).$$

Aplicando $\Delta^{\alpha_i}_{x_i,h}$ na expressão resultante, obtemos a fórmula

$$\prod_{i=1}^{m} \Delta^{\alpha_i}_{x_i,h} \prod_{j=1}^{m} \Delta^{\alpha_j}_{y_j,h} K(x_r,x_s) = \sum_{\mu_1,\nu_1=0}^{\alpha_1} c^{\alpha_1}_{\mu_1\nu_1} \cdots \sum_{\mu_m,\nu_m=0}^{\alpha_m} c^{\alpha_m}_{\mu_m\nu_m} K(x_r + h\sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i, x_s + h\sum_{i=1}^{m} \nu_i e_i),$$

onde

$$c^{\alpha_j}_{\mu_j\nu_j} := (-1)^{\mu_j+\nu_j+2\varepsilon_j} \binom{\alpha_j}{\mu_j} \binom{\alpha_j}{\nu_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.25}$$

Usando o Teorema 4.1.3 m vezes, concluímos que a forma quadrática gerada pelo lado direito da equação acima é não negativa definida. Assim, o limite em (4.22) é claramente não negativo. ■

4.2 Diferenciando um núcleo SPD em $S^{m-1} \times S^{m-1}$

Esta seção estabelecerá a relação entre as derivadas de um núcleo positivo definido da forma (4.3) e a série das derivadas termo a termo da forma (4.4). De fato, a fim de obter generalidade, consideraremos núcleos da forma

$$K(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Y_k(x)\overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^{m-1}, \tag{4.26}$$

satisfazendo as seguintes condições: $a_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$, cada Y_k é uma função complexa definida em S^{m-1}, a família $\{Y_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ é $L^2(S^{m-1})$-ortonormal, e a série é absoluta e uniformemente convergente para $x, y \in S^{m-1}$. A ortonormalidade requerida significa que

$$\int_{S^{m-1}} Y_k(x)\overline{Y_l(x)}\, d\sigma_{m-1}(x) = \delta_{kl}, \tag{4.27}$$

onde σ_{m-1} é a medida de Lebesgue usual em S^{m-1}. Lembre que tais núcleos caracterizam os núcleos contínuos positivos definidos como já dito no início do Capítulo 3.

Os principais resultados desta seção são os Teoremas 4.2.8 e 4.2.10, os quais fornecem condições para que a série da derivada dos termos da série em (4.26) convirja uniformemente para a derivada do núcleo K.

Vários lemas técnicos são nessários para obtermos os principais resultados. Alguns são versões de resultados mais gerais adaptados à nossa proposta enquanto outros são novos. O primeiro lema é uma consequência do contexto adotado na Introdução (p. 12) juntamente com regras usuais de derivação.

Lema 4.2.1. *Sejam α e β multi-índices. Seja $K : S^{m-1} \times S^{m-1} \to \mathbb{C}$ um núcleo tal que $D^{\alpha,\beta}_{x,y}K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Então, $D^{\alpha',\beta'}\widetilde{K}$ existe e é contínua em $\mathbb{R}^m_* \times \mathbb{R}^m_*$ quando $|\alpha'| \leq |\alpha|$ e $|\beta'| \leq |\beta|$.*

Daqui em diante o núcleo K tem a forma (4.26). Note que os coeficientes de Fourier em (4.26) satisfazem a fórmula

$$a_k Y_k(x) = \int_{S^{m-1}} K(x,y) Y_k(y)\, d\sigma_{m-1}(y), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad x \in S^{m-1}. \tag{4.28}$$

O próximo resultado diz que diferenciabilidade do núcleo implica a mesma ordem de diferenciabilidade dos elementos da sequência $\{Y_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Teorema 4.2.2. *Sejam α um multi-índice e k um inteiro não negativo. Se $D^{\alpha,0}K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, então $D^{\alpha}Y_k$ existe e é contínua em S^{m-1}.*

Prova. A extensão radial de Y_k é

$$\widetilde{Y}_k(x) = \frac{1}{a_k}\int_{S^{m-1}} K(x/\|x\|, y) Y_k(y)\, d\sigma_{m-1}(y), \quad x \in \mathbb{R}^m_*. \tag{4.29}$$

Devido ao Lema 4.2.1, a existência e continuidade de $D^{\alpha,0}K$ nos permite diferenciar sobre o sinal de integral, obtendo

$$D^\alpha \widetilde{Y}_k(x) = \frac{1}{a_k}\int_{S^{m-1}} D^{\alpha,0}K(x/\|x\|, y)Y_k(y)\, d\sigma_{m-1}(y), \quad x \in \mathbb{R}^m_* \tag{4.30}$$

Restringindo a S^{m-1},

$$D^\alpha Y_k(x) = \frac{1}{a_k}\int_{S^{m-1}} D^{\alpha,0}K(x, y)Y_k(y)\, d\sigma_{m-1}(y), \quad x \in S^{m-1}. \tag{4.31}$$

A afirmação do teorema segue. ■

A seguir mostraremos que a diferenciabilidade do núcleo obriga a série obtida a partir da definição do núcleo, pela substituição de cada função Y_k pela correspondente derivada, ser uniformemente convergente quando ou x ou y está fixado (Teorema 4.2.4).

Teorema 4.2.3. *Sejam α um multi-índice e $x \in S^{m-1}$. Se $D^{\alpha,\alpha}K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, então a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k|D^\alpha Y_k(x)|^2$ é convergente.*

Prova. Suponhamos que $D^{\alpha,\alpha}K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Fixe um inteiro não negativo l e considere

$$K_l(x, y) := K(x, y) - \sum_{k=0}^{l} a_k Y_k(x)\overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^{m-1}. \tag{4.32}$$

Como cada Y_k é contínuo, K_l é contínuo por ser uma diferença de núcleos contínuos. Por outro lado, como

$$K_l(x, y) = \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k Y_k(x)\overline{Y_k(y)}, \quad x, y \in S^{m-1}, \tag{4.33}$$

K_l é positivo definido em $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Recordando o Lema 4.2.1 e o Teorema 4.2.2, podemos aplicar o Teorema 4.1.7 para concluir que $D^{\alpha,\alpha}_{x,y}K_l(x, y)$ é positivo definido em $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Em particular, $D^{\alpha,\alpha}K_l(x, x) \geq 0$, $x \in S^{m-1}$. Usando (4.32), temos

$$D^{\alpha,\alpha}_{x,y}K_l(x, y) = D^{\alpha,\alpha}_{x,y}K(x, y) - \sum_{k=0}^{l} a_k D^{\alpha,\alpha}_{x,y}\left(Y_k(x)\overline{Y_k(y)}\right), \quad x, y \in S^{m-1}. \tag{4.34}$$

Assim,

$$D^{\alpha,\alpha}K(x, x) - \sum_{k=0}^{l} a_k D^\alpha Y_k(x)\overline{D^\alpha Y_k(x)} \geq 0, \quad x \in S^{m-1}, \tag{4.35}$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{l} a_k|D^\alpha Y_k(x)|^2 \leq D^{\alpha,\alpha}K(x, x), \quad x \in S^{m-1}. \tag{4.36}$$

Logo, cada sequência $\{\sum_{k=0}^{l} a_k |D^\alpha Y_k(x)|^2\}$ é não decrescente e limitada, portanto, convergente. ■

Teorema 4.2.4. *Seja α um multi-índice não nulo. Se $D_{x,y}^{\alpha,\alpha} K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, então $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k(y)}$ é uniformemente convergente em S^{m-1}, quando ou x ou y está fixado e sempre que $|\mu|, |\nu| \leq |\alpha|$.*

Prova. Provaremos o teorema no caso em que x está fixado. O outro caso é similar. Sejam μ e ν como descritos no enunciado. Para inteiros não negativos p e q, $p \leq q$, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para escrever

$$\left| \sum_{k=p}^{q} a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k(y)} \right|^2 \leq \sum_{k=p}^{q} a_k \left| D^\mu Y_k(x) \right|^2 \sum_{k=p}^{q} a_k \left| D^\nu Y_k(y) \right|^2, \quad y \in S^{m-1}. \tag{4.37}$$

Recordando a prova do Teorema 4.2.3, se $D_{x,y}^{\alpha,\alpha} K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^{q} a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k}(y) \right|^2 &\leq \sum_{k=p}^{q} a_k \left| D^\mu Y_k(x) \right|^2 \sum_{k=0}^{q} a_k \left| D^\nu Y_k(y) \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=p}^{q} a_k \left| D^\mu Y_k(x) \right|^2 D^{\nu,\nu} K(y,y) \\ &\leq \max_{y \in S^{m-1}} \{D^{\nu,\nu} K(y,y)\} \sum_{k=p}^{q} a_k \left| D^\mu Y_k(x) \right|^2, \quad y \in S^{m-1}. \end{aligned}$$

A série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left| D^\mu Y_k(x) \right|^2$ é convergente pelo Teorema 4.2.3. Portanto, o critério de Cauchy para convergência uniforme ([Rud76, p.147]) pode ser usado para completar a prova. ■

O próximo lema é o último passo necessário para obtermos a convergência pontual da série de derivadas considerada no teorema anterior. Sua prova será omitida.

Lema 4.2.5. *Seja $\{h_n\}$ uma sequência de funções definidas em $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Se a sequência converge uniformemente em uma variável quando a outra está fixada, então a sequência converge potualmente em $S^{m-1} \times S^{m-1}$.*

Teorema 4.2.6. *Seja α um multi-índice não nulo. Se $D_{x,y}^{\alpha,\alpha} K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, então $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k(y)}$, $|\mu|, |\nu| \leq |\alpha|$, é pontualmente convergente em $S^{m-1} \times S^{m-1}$.*

Prova. É uma consequência do Lema 4.2.5 e do Teorema 4.2.4. ■

Um argumento envolvendo integração será usado para mostrar que a série no teorema anterior não é apenas convergente mas uniformemente convergente para $D_{x,y}^{\mu,\nu} K$. O argumento em si é o conteúdo do seguinte resultado técnico da teoria da medida.

Lema 4.2.7. *Seja $g : \mathbb{R}^m_* \times \mathbb{R}^m_* \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Assuma que*

$$\int_R \int_S g(x,y)\,dx\,dy = 0, \tag{4.38}$$

onde R e S são retângulos m-dimensionais de $\mathbb{R}^m_*$, tendo lados paralelos aos eixos coordenados. Então, $g = 0$ quase sempre.

Teorema 4.2.8. *Seja α um multi-índice não nulo. Se $D^{\alpha,\alpha}_{x,y}K$ existe e é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, então $\sum_{k=0}^\infty a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k(y)}$ converge uniformemente para $D^{\mu,\nu}_{x,y}K(x,y)$ em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, sempre que $|\mu|, |\nu| \leq |\alpha|$.*

Prova. A prova começa com o caso $|\mu| = 1$ e $|\nu| = 0$, isto é, o caso onde $\mu = e_j$, para algum $j \in \{1, \ldots, m\}$. Seja $F(x,y)$ o limite pontual de $\sum_{k=0}^\infty a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k(y)}$. Então,

$$\widetilde{F}(x,y) = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{Y}_k(x) \overline{\widetilde{Y}_k}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^m_*, \tag{4.39}$$

enquanto

$$D^{\mu,\nu}_{x,y} \widetilde{K}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{K}(x,y), \quad x, y \in \mathbb{R}^m_*. \tag{4.40}$$

Para mostrar que $F(x,y) = D^{\mu,\nu}_{x,y}K(x,y)$, mostraremos que ambas extensões acima coincidem. Para isto, consideremos $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ em $\mathbb{R}^m_*$ e calculemos a integral

$$J_{\mu,\nu} := \int_{[\varepsilon_1,a_1]\times\cdots\times[\varepsilon_m,a_m]} \int_{[\delta_1,b_1]\times\cdots\times[\delta_m,b_m]} [D^{\mu,\nu}_{x,y}\widetilde{K}(x,y) - \widetilde{F}(x,y)]\,dy\,dx, \tag{4.41}$$

onde os números reais ε_i, δ_i, $i = 1, \ldots, m$ são escolhidos de modo que ou $\varepsilon_i a_i > 0$ para algum i ou $\delta_j b_j > 0$ para algum j. Este procedimento garante que a origem está fora dos retângulos que aparecem nas integrais abaixo. Temos que

$$\begin{aligned} J_{\mu,\nu} &= \int_{[\varepsilon_1,a_1]\times\cdots\times[\varepsilon_m,a_m]} \int_{[\delta_1,b_1]\times\cdots\times[\delta_m,b_m]} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{K}(x,y) - \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{Y}_k(x)\overline{\widetilde{Y}_k}(y)\right] dy\,dx \\ &= \int_{\varepsilon_1}^{a_1} \cdots \int_{\varepsilon_m}^{a_m} \int_{\delta_1}^{b_1} \cdots \int_{\delta_m}^{b_m} J^j_{\mu,\nu}(x,y)\,dy_m \ldots\ldots dy_1\,dx_m \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_1, \end{aligned}$$

onde

$$J^j_{\mu,\nu}(x,y) := \int_{\varepsilon_j}^{a_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{K}(x,y)\,dx_j - \int_{\varepsilon_j}^{a_j} \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{\partial}{\partial x_j}\widetilde{Y}_k(x)\overline{\widetilde{Y}_k}(y)\,dx_j. \tag{4.42}$$

O símbolo $\widehat{dx_j}$ significa que o elemento dx_j está sendo omitido. Chamamos de I o último somando na expressão definindo $J^j_{\mu,\nu}$. Mantendo y fixo e usando o Teorema 4.2.4, podemos re-escrever I na forma

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\int_{\varepsilon_j}^{a_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{Y}_k(x)\, dx_j \right) \widetilde{\overline{Y_k}}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\widetilde{Y}_k(x_a) - \widetilde{Y}_k(x_\varepsilon) \right) \widetilde{\overline{Y_k}}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\widetilde{Y}_k(x_a)\widetilde{\overline{Y_k}}(y) - \widetilde{Y}_k(x_\varepsilon)\widetilde{\overline{Y_k}}(y) \right), \end{aligned}$$

onde $x_a = (x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ e $x_\varepsilon = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \varepsilon_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)$. Segue que

$$J^j_{\mu,\nu} = \widetilde{K}(x_a, y) - \widetilde{K}(x_\varepsilon, y) - \widetilde{K}(x_a, y) + \widetilde{K}(x_\varepsilon, y). \tag{4.43}$$

Agora é claro que $J^j_{\mu,\nu} = 0$ e então $J_{\mu,\nu} = 0$. Devido ao Lema 4.2.7, concluímos que $D^{\mu,\nu}_{x,y}\widetilde{K} - \widetilde{F} = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^m_* \times \mathbb{R}^m_*$. Segue que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^m_*$, as funções $D^{\mu,\nu}_{x,y}\widetilde{K}(x,\cdot)$ e $\widetilde{F}(x,\cdot)$ coincidem q.s.. Mas, como elas são contínuas quando uma das variáveis está fixada, elas coincidem em todos pontos. Agora é claro que, para cada $y \in \mathbb{R}^m_*$, as funções $D^{\mu,\nu}_{x,y}\widetilde{K}(\cdot, y)$ e $\widetilde{F}(\cdot, y)$ coincidem quase sempre. O mesmo raciocínio usado acima nos permite concluir que $D^{\mu,\nu}_{x,y}\widetilde{K}$ e $\widetilde{F}$ coincidem em todos pontos. A igualdade desejada segue por restrição. O resto da prova segue por indução, um esboço é como segue. Assuma que provamos a igualdade

$$D^{\mu,\nu}_{x,y}\widetilde{K}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^\mu \widetilde{Y}_k(x) D^\nu \widetilde{\overline{Y_k}}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^m_* \tag{4.44}$$

para algum μ, ν com $|\mu|, |\nu| < |\alpha|$. Seja $\gamma = e_i$ para algum $i \in \{1, \ldots, m\}$ e assuma que $|\mu + \gamma| \leq |\alpha|$. Então, lembrando o contexto dos resultados anteriores, e usando a hipótese de indução, deduzimos que

$$\begin{aligned} D^{\mu+\gamma,\nu}_{x,y}\widetilde{K}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\mu,\nu}_{x,y}\widetilde{K}(x,y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial}{\partial x_i} D^\mu \widetilde{Y}_k(x) D^\nu \widetilde{\overline{Y_k}}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^{\mu+\gamma} \widetilde{Y}_k(x) D^\nu \widetilde{\overline{Y_k}}(y). \end{aligned}$$

Analogamente, se $\delta = e_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $|\nu + \delta| \leq |\alpha|$, podemos provar que

$$D^{\mu,\nu+\delta}_{x,y}\widetilde{K}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^\mu \widetilde{Y}_k(x) D^{\nu+\delta} \widetilde{\overline{Y_k}}(y). \tag{4.45}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} D^{\mu+\gamma,\nu+\delta}_{x,y}\widetilde{K}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\mu,\nu+\delta}_{x,y}\widetilde{K}(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^{\mu}\widetilde{Y_k}(x) D^{\nu+\delta}\overline{\widetilde{Y_k}}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\mu}\widetilde{Y_k}(x) D^{\nu+\delta}\overline{\widetilde{Y_k}}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^{\mu+\gamma}\widetilde{Y_k}(x) D^{\nu+\delta}\overline{\widetilde{Y_k}}(y), \end{aligned}$$

sempre que $|\mu+\gamma|, |\nu+\delta| \leq |\alpha|$. Para finalizar a prova e obter a convergência uniforme anunciada, precisamos considerar a sequência de somas parciais da série

$$D^{\mu,\mu}_{x,y}K(x,x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^{\mu}Y_k(x) D^{\mu}\overline{Y_k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left|D^{\mu}Y_k(x)\right|^2, \quad x \in S^{m-1}, \tag{4.46}$$

quando $|\mu| \leq |\alpha|$. Ela é uma sequência não decrescente de funções contínuas, agora convergindo para uma função contínua. Como S^{m-1} é compacto, o Teorema de Dini é aplicável. A convergência é então uniforme em S^{m-1}. A desigualdade (4.2) juntamente com o critério de Cauchy para convergência uniforme implicam a convergência uniforme de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^{\mu}Y_k(x) D^{\nu}\overline{Y_k}(y)$ em $S^{m-1}\times S^{m-1}$, quando $|\mu|, |\nu| \leq |\alpha|$. ■

Lema 4.2.9. *Sejam α um multi-índice não nulo e $\{g_k\}$ uma sequência de funções definidas em S^{m-1}, convergindo pontualmente para uma função g. Assuma que cada $D^{\alpha}g_k$ existe e é contínua em S^{m-1}. Se $\{D^{\alpha}g_k\}$ converge uniformemente em S^{m-1}, então $D^{\alpha}g$ existe e $\{D^{\alpha}g_k\}$ converge pontualmente para $D^{\alpha}g$.*

Prova. Provaremos o lema no caso $\alpha = e_j$, para algum j. O resto seguirá por indução como na prova do Teorema 4.2.6. Fixe $x \in \mathbb{R}^m_*$. Mantendo a notação usada no Teorema 4.2.6, primeiro usamos o Teorema Fundamental do Cálculo para escrever

$$\widetilde{g}_k(x) = \widetilde{g}_k(x_a) + \int_{a_j}^{x_j} D^{\alpha}\widetilde{g}_k(x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1},\ldots,x_m)dt. \tag{4.47}$$

Se $\{D^{\alpha}g_k\}$ tem um limite uniforme h, então fazendo $k\to\infty$ na igualdade acima obtemos

$$\widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(x_a) + \int_{a_j}^{x_j} \widetilde{h}(x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1},\ldots,x_m)dt. \tag{4.48}$$

Agora é claro que $D^{\alpha}\widetilde{g}(x) = \widetilde{h}(x)$, e o resto segue por restrição a S^{m-1}. ■

Teorema 4.2.10. *Seja α um multi-índice não nulo para o qual as derivadas $D^\alpha Y_k$, $k = 0, 1, \ldots$, existem e são contínuas em S^{m-1}. Sejam μ e ν multi-índices tais que $|\mu|, |\nu| \leq |\alpha|$. Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k}(y)$ converge uniformemente em $S^{m-1} \times S^{m-1}$, então $D_{x,y}^{\mu,\nu} K(x,y)$ existe, é contínua e coincide com a série.*

Prova. É suficiente considerar o caso $\mu = e_j$ e $\nu = (0, 0, \ldots, 0)$, para algum j. Seja $g_{\mu,\nu}(x,y)$ a soma da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^\mu Y_k(x) D^\nu \overline{Y_k}(y)$. Como $S^{m-1} \times S^{m-1}$ é compacto e a série definindo $g_{\mu,\nu}$ é uniformemente convergente, $g_{\mu,\nu}$ é contínua em $S^{m-1} \times S^{m-1}$. Mantendo a notação usada no teorema anterior, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon_j}^{a_j} \widetilde{g}_{\mu,\nu}(x,y)\, dx_j &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\varepsilon_j}^{a_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \widetilde{Y}_k(x)\, dx_j \widetilde{\overline{Y_k}}(y) \\
&= \widetilde{K}(x_a, y) - \widetilde{K}(x_\varepsilon, y).
\end{aligned}
$$

Devido ao Lema 4.2.9, $\widetilde{K}(x_a, y)$ é diferenciável com relação a a_j. Assim, diferenciando a relação anterior com respeito a a_j obtemos

$$
\widetilde{g}_{\mu,\nu}(x_a, y) = \frac{\partial}{\partial a_j} \widetilde{K}(x_a, y). \tag{4.49}
$$

O resto segue por restrição a S^{m-1}. Para complementar a prova usa-se um argumento indutivo similar ao usado no Teorema 4.2.8. ∎

Capítulo 5

Funções real-analíticas no disco unitário complexo: expansões uniformemente convergente via polinômios no disco

Neste capítulo descrevemos os resultados do artigo [MPO11]. O principal resultado aqui fornece um método para obter explicitamente expansões em termos dos polinômios no disco, que são uniformemente convergentes, para funções real-analíticas definidas no disco unitário complexo $B[0,1] := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Os polinômios no disco aparecem muito frequentemente em problemas onde uma dada função complexa definida em $B[0,1]$ precisa ser expandida com relação à um conjunto ortonormal de funções sobre $B[0,1]$. Seu uso em aplicações pode ser ratificado em geometria e ondas óptica para sistemas com aberturas circulares, como descrito em [Wün05]. Também, os polinômios no disco estão relacionados com núcleos positivos definidos em $\Omega_{2q} \times \Omega_{2q}$, onde q é um inteiro maior ou igual a 2 e Ω_{2q} é a esfera unitária do espaço complexo $\mathbb{C}^q$ ([Per00]).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 5.1 apresentamos algumas definições e notações fazendo uma breve introdução ao assunto, enunciamos resultados básicos, a fim de tornar a prova do principal resultado mais clara, e enunciamos o resultado principal (Teorema 5.1.2). Na Seção 5.2, provamos o Teorema 5.1.2 e apresentamos uma versão desse resultado para as funções zonais definidas em Ω_{2q}. Exemplos envolvendo núcleo positivo definido em $\Omega_{2q} \times \Omega_{2q}$ e o núcleo de Bergman para a bola aberta $B(0,1) := \{x \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ são apresentados no final da seção. Na Seção 5.3, aplicaremos o Teorema 5.1.2 para deduzir uma expansão via polinômios no disco para o núcleo de Poisson-Szegö para a bola unitária de $\mathbb{C}^q$.

5.1 Enunciado do principal resultado

Sejam m, n e α inteiros não negativos e $P_n^{(\alpha,m-n)}$ o usual polinômio de Jacobi de grau n associado com o par $(\alpha, m-n)$ e normalizado de modo que $P_n^{(\alpha,m-n)}(1) = 1$. O *polinômio no disco* de grau m em $z \in B[0,1] := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e grau n em $\overline{z}$, associado com o parâmetro α, é o polinômio $R_{m,n}^{\alpha}$ definido pela fórmula

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = \begin{cases} P_n^{(\alpha,m-n)}(2z\overline{z}-1)z^{m-n} & \text{se } m \geq n \\ P_m^{(\alpha,n-m)}(2z\overline{z}-1)\overline{z}^{n-m} & \text{se } m \leq n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Se escrevemos $z = x+iy$, então $R_{m,n}^{\alpha}(z)$ é um polinômio de grau $m+n$ em ambas variáveis x e y. Em coordenadas polares, a definição acima torna-se

$$R_{m,n}^{\alpha}(z) = r^{|m-n|}e^{i(m-n)\theta}P_{m\wedge n}^{(\alpha,|m-n|)}(2r^2-1), \quad z = re^{i\theta} = x+iy, \tag{5.2}$$

As referências [Koo72a, Koo72b] possuem um belo desenvolvimento sobre esses polinômios. Outras referências relevantes são a tese de Boyd [Boy70], o artigo de Wünche [Wün05] e referências contidas nele. Em [Wün05], polinômios no disco são chamados de *polinômios de Zernicke generalizados.*

O conjunto $\{R_{m,n}^{\alpha}\}$ é um sistema ortogonal completo em $L^2(B[0,1], m_\alpha)$, no qual

$$dm_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}(1-x^2-y^2)^\alpha dxdy, \quad z = z+iy \in B[0,1], \tag{5.3}$$

isto é,

$$\int_{B[0,1]} R_{m,n}^{\alpha}(z)R_{k,l}^{\alpha}(\overline{z})dm_\alpha(z) = \frac{\delta_{m,k}\delta_{n,l}}{h_{m,n}^{\alpha}}, \tag{5.4}$$

as constantes $h_{m,n}^{\alpha}$ sendo dadas por

$$h_{m,n}^{\alpha} = \frac{m+n+\alpha+1}{\alpha+1}\begin{pmatrix} \alpha+m \\ \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+n \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

De agora em diante, escreveremos $\alpha = q-2$, onde q é um inteiro maior ou igual a 2. Esta notação torna mais fácil estabelecer a conhecida relação entre os polinômios no disco e a análise na esfera unitária Ω_{2q} de $\mathbb{C}^q$, como pode ser ratificado em [Koo72a].

A fim de descrever o principal resultado deste trabalho, é conveniente recordar uma versão complexa do Teorema de Taylor ([Kra01, p. 67]).

Lema 5.1.1. *Se φ é uma função de classe C^{k+1} em uma vizinhança $\mathcal{O}$ de 0 em $\mathbb{C}$, então*

$$\varphi(z) = \sum_{m+n\leq k} \frac{D_z^m D_{\overline{z}}^n \varphi(0)}{m!n!} z^m \overline{z}^n + o(|z|^k), \quad z \in \mathcal{O}. \tag{5.6}$$

Se uma função φ é de classe C^∞ numa vizinhança $\mathcal{O}$ de 0 em $\mathbb{C}$, o lema anterior implica que podemos associar a ela a série de Taylor em torno de 0:

$$T_{\varphi,0}(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{D_z^m D_{\overline{z}}^n \varphi(0)}{m!n!} z^m \overline{z}^n, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.7}$$

A série de Taylor não precisa convergir para φ em todos os pontos de $\mathcal{O}$, o que motiva nossa próxima definição. Diremos que uma função φ é *real-analítica* em um subconjunto A de $\mathbb{C}$ se sua série de Taylor em torno de 0 existe e coincide com ela em todos os pontos de A.

Podemos agora enunciar o principal resultado.

Teorema 5.1.2. *Seja φ uma função real-analítica em $B[0,1]$. Se a série de Taylor de φ em torno de 0 é absolutamente convergente em $z = 1$, então φ admite uma expansão absoluta e uniformemente convergente na forma*

$$\varphi(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} d_{q,m,n} R_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in B[0,1], \tag{5.8}$$

onde

$$d_{q,m,n} = \frac{(m+q-2)!(n+q-2)!(m+n+q-1)}{(q-2)!m!n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_z^{m+j} D_{\overline{z}}^{n+j} \varphi(0)}{j!(m+n+j+q-1)!}. \tag{5.9}$$

Este teorema pode ser interpretado como uma extensão aos complexos de um resultado originalmente provado em [BDS08].

5.2 Prova do resultado principal e exemplos

A prova do Teorema 5.1.2 é baseada em um resultado que descreve os coeficientes na expansão de um monômio nas variáveis z e $\overline{z}$ com relação aos polinômios no disco e em rearranjos de séries.

O Lema 5.2.1 abaixo foi provado em [Boy70]. Uma prova mais recente apresentada em [Wün05] descreve os coeficientes da forma citada aqui.

Lema 5.2.1. *Se m e n são inteiros não negativos, então*

$$z^m \overline{z}^n = \sum_{j=0}^{m \wedge n} c_{q,m,n}^j R_{m-j,n-j}^{q-2}(z), \quad z \in B[0,1], \tag{5.10}$$

onde

$$c_{q,m,n}^j := \frac{m!n!(m-j+q-2)!(n-j+q-2)!(m+n-2j+q-1)}{(q-2)!j!(m-j)!(n-j)!(m+n-j+q-1)!}, \quad j = 0, \ldots, m \wedge n.$$

Se introduzimos o símbolo de Pochhammer

$$(m)_n = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)} \tag{5.11}$$

na fórmula definindo $c^j_{q,m,n}$, facilmente vemos que

$$c^j_{q,m,n} = \frac{m!n!}{(q-2)!}\frac{(m-j+1)_{q-2}(n-j+1)_{q-2}}{j!(m+n-2j+q-2)!(m+n-2j+q)_j}, \quad j = 0, \ldots, m \wedge n. \tag{5.12}$$

Em particular, temos

$$c^j_{q,m+j,n+j} = \frac{(m+1)_{q-2}(n+1)_{q-2}}{(q-2)!(m+n+q-2)!}\frac{(m+j)!(n+j)!}{j!(m+n+q)_j}, \quad m, n, j = 0, 1, \ldots. \tag{5.13}$$

Os polinômios no disco foram definidos de forma que $R^{q-2}_{m,n}(1) = 1$ para todo m e n. Dessa maneira, é fácil ver que as constantes $c^j_{q,m,n}$ que aparecem no lema anterior satisfazem

$$\sum_{j=0}^{m\wedge n} c^j_{q,m,n} = 1. \tag{5.14}$$

Agora estamos prontos para apresentar a

Prova do Teorema 5.1.2. Substituindo a fórmula (5.10) na expansão de Taylor

$$\varphi(z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{D^k_z D^l_{\overline{z}}\varphi(0)}{k!\,l!} z^k \overline{z}^l, \quad z \in B[0,1], \tag{5.15}$$

de φ em torno de 0, deduzimos que

$$\varphi(z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{D^k_z D^l_{\overline{z}}\varphi(0)}{k!\,l!} \sum_{j=0}^{k\wedge l} c^j_{q,k,l} R^{q-2}_{k-j,l-j}(z), \quad z \in B[0,1]. \tag{5.16}$$

Como a normalização para os polinômios de Jacobi que estamos usando aqui implica que $|R_{k,l}(z)| \leq 1$, para todo k e l, podemos deduzir a estimativa

$$\begin{aligned}
\left| \frac{D^k_z D^l_{\overline{z}}\varphi(0)}{k!\,l!} \sum_{j=0}^{k\wedge l} c^j_{q,k,l} R^{q-2}_{k-j,l-j}(z) \right| &\leq \frac{|D^k_z D^l_{\overline{z}}\varphi(0)|}{k!\,l!} \sum_{j=0}^{k\wedge l} c^j_{q,k,l} |R^{q-2}_{k-j,l-j}(z)| \\
&\leq \frac{|D^k_z D^l_{\overline{z}}\varphi(0)|}{k!\,l!} \sum_{j=0}^{k\wedge l} c^j_{q,k,l} \\
&= \frac{|D^k_z D^l_{\overline{z}}\varphi(0)|}{k!\,l!}.
\end{aligned}$$

Se a série de Taylor de φ em torno de 0 é absolutamente convergente em $z = 1$, então a série $\sum_{k,l=0}^{\infty} |D_z^k D_{\overline{z}}^l \varphi(0)|/k!\, l!$ converge e o M-Teste de Weierstrass implica a convergência absoluta e uniforme da série em (5.16). Agora, podemos mudar a ordem da soma e então obtemos

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k,l=j}^{\infty} \frac{D_z^k D_{\overline{z}}^l \varphi(0)}{k!\, l!} c_{q,k,l}^j R_{k-j,l-j}^{q-2}(z), \quad z \in B[0,1]. \tag{5.17}$$

Finalmente, fazendo $m = k - j$ e $n = l - j$, podemos escrever a igualdade anterior na forma

$$\varphi(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_z^{m+j} D_{\overline{z}}^{n+j} \varphi(0)}{(m+j)!(n+j)!} c_{q,m+j,n+j}^j \right) R_{m,n}^{q-2}(z), \quad z \in B[0,1]. \tag{5.18}$$

Esta é a mesma fórmula do enunciado do teorema. ■

Observação 5.2.2. *Se a função φ no Teorema 5.1.2 é real-analítica no disco fechado centrado em 0 de raio $r < 1$, a conclusão do teorema ainda vale no disco $|z| \leq r$, desde que a série de Taylor de φ seja absolutamente convergente em $z = r$.*

A seguir, re-escrevemos o Teorema 5.1.2 para funções zonais em Ω_{2q}. Recordamos que se $\zeta \in \Omega_{2q}$, uma função $f : \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$ é *ζ-zonal* quando existe uma função $\varphi : B[0,1] \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(\eta) = \varphi(\langle \eta, \zeta \rangle), \quad \eta \in \Omega_{2q}, \tag{5.19}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{C}^q$. A função φ é usualmente chamada de *função mãe* de f.

Teorema 5.2.3. *Seja f uma função ζ-zonal. Se a função mãe φ de f satisfaz as hipóteses do Teorema 5.1.2, então f admite uma expansão absolutamente e uniformemente convergente na forma*

$$f(\eta) = \sum_{m+n=0}^{\infty} d_{q,m,n} R_{m,n}^{q-2}(\langle \eta, \zeta \rangle), \quad \eta \in \Omega_{2q}, \tag{5.20}$$

onde os coeficientes $d_{q,m,n}$ são dados por (5.9).

A seguir apresentamos um exemplo emprestado de [Men97].

Exemplo 5.2.4. *Seja $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\varphi(z) = e^{z+\overline{z}}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.21}$$

A série de Taylor de φ em torno de 0 é

$$T_{\varphi,0}(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{z^m \overline{z}^n}{m!n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5.22}$$

Para ratificar a convergência, consideramos o resto R_k da série de Taylor, i.e.,

$$R_k(z) = \sum_{m+n=k+1} \frac{D_z^m D_{\overline{z}}^n \varphi(\xi)}{m!n!} z^m \overline{z}^n = \sum_{m+n=k+1} \frac{e^{\xi+\overline{\xi}}}{m!n!} z^m \overline{z}^n, \quad z \in B[0,1], \tag{5.23}$$

onde ξ é um ponto no segmento ligando 0 e z. Como $|\xi| \leq |z| \leq 1$, então $|e^{\xi+\overline{\xi}}| \leq e^2$ e

$$\begin{aligned} e^{-2}|R_k(z)| &\leq \sum_{m+n=k+1} \frac{1}{m!n!} \\ &\leq \begin{cases} \dfrac{k+2}{k+1} \dfrac{2}{((k-1)/2)!((k+1)/2)!}, & k \text{ ímpar} \\ \dfrac{2}{(k/2)!(k/2)!}, & k \text{ par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{k\to\infty} |R_k(z)| = 0$, $z \in B[0,1]$, e podemos escrever

$$e^{z+\overline{z}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} z^m \overline{z}^n, \quad z \in B[0,1]. \tag{5.24}$$

Como a série acima converge absolutamente quando $z = 1$, aplicamos o Teorema 5.1.2 para concluir que

$$e^{z+\overline{z}} = \sum_{m+n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^j_{q,m+j,n+j}}{(m+j)!(n+j)!} \right) R^{q-2}_{m,n}(z), \quad z \in B[0,1], \tag{5.25}$$

isto é,

$$e^{z+\overline{z}} = \sum_{m+n=0}^{\infty} \frac{(m+1)_{q-2}(n+1)_{q-2}}{(q-2)!(m+n+q-2)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(m+n+q-1)_j} \right) R^{q-2}_{m,n}(z), \quad z \in B[0,1], \tag{5.26}$$

com convergência absoluta e uniforme da série.

O núcleo bi-zonal $K : \Omega_{2q} \times \Omega_{2q} \to \mathbb{C}$, gerado pela função em (5.26),

$$K(\eta, \zeta) := \varphi(\langle \eta, \zeta \rangle)$$

pertence a uma das classes descritas em [Men97]. Em particular, ele fornece um exemplo de um núcleo estritamente positivo definido em $\Omega_{2q} \times \Omega_{2q}$ ([Per00]).

Exemplo 5.2.5. *Como é bem conhecido, o núcleo de Bergman em $B(0,1)$ é o núcleo de reprodução do espaço de Hilbert $\mathcal{A}^2(B(0,1))$ de funções holomorfas em $B(0,1)$ as quais* *são quadrado integrável com relação à medida volume ([Kra01, Ohs02]). Ele tem uma expansão na forma*

$$K_B(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\overline{w}^n, \quad z,w \in B(0,1), \tag{5.27}$$

a qual é uniformemente convergente em subconjuntos compactos de $B(0,1) \times B(0,1)$*. Estamos interessados em uma expansão via polinômios no disco para* $\psi(z) = K_B(z,\overline{z})$, $z \in B[0,r]$, $r < 1$*. Claramente, a função* ψ *satisfaz as condições da Observação 5.2.2, de modo que*

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n+j+1}{(n+j)!(n+j)!}c^j_{q,n+j,n+j}\right)R^{q-2}_{n,n}(z), \quad z \in B[0,r]. \tag{5.28}$$

Recordando (5.13)*, obtemos a fórmula*

$$K_B(z,\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)_q^2}{(q-2)!(2n+q-2)!}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n+j+1}{j!(2n+q)_j}\right)R^{q-2}_{n,n}(z), \quad z \in B[0,r], \tag{5.29}$$

com convergência absoluta e uniforme.

5.3 A expansão para o núcleo de Poisson-Szegö

Nesta seção aplicaremos o Teorema 5.1.2 para deduzir uma expansão para o núcleo de Poisson-Szegö $\mathcal{P}_q$ ([Kra01, Ste72]). Se $B^q[0,1]$ é a bola unitária fechada centrada em 0 em $\mathbb{C}^q$, $B^q(0,1)$ é seu interior e Δ é o operador de the Laplace-Beltrami associado à métrica de Bergman em $B^q(0,1)$, então $\mathcal{P}_q$ está relacionado com a solução do bem posto problema de Dirichlet de encontrar uma função contínua u em $B^q[0,1]$ tal que $\Delta(u) = 0$ em $B^q(0,1)$ e $u|_{\Omega_{2q}} = f$, onde f é uma dada função contínua em Ω_{2q}. A solução é precisamente

$$u(z) = \int_{\Omega_{2q}} \mathcal{P}_q(z,\zeta)f(\zeta)d\zeta, \quad z \in B^q(0,1), \tag{5.30}$$

enquanto que uma fórmula fechada para $\mathcal{P}_q$ é ([Kra01, p. 57])

$$\mathcal{P}_q(z,\zeta) := \frac{1}{w_{2q}}\frac{(1-|z|^2)^q}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2q}}, \quad (z,\zeta) \in B^q(0,1) \times \Omega_{2q}, \tag{5.31}$$

onde w_{2q} é a medida de superfície de Ω_{2q}. Escrevendo $z = r\eta$, $r \in [0,1)$, podemos re-escrever (5.31) na forma

$$\mathcal{P}_q(r\eta,\zeta) = \frac{1}{w_{2q}}\frac{(1-r^2)^q}{(1-r\langle\eta,\zeta\rangle)^q(1-r\overline{\langle\eta,\zeta\rangle})^q}, \quad \eta,\zeta \in \Omega_{2q}. \tag{5.32}$$

Assim, $\mathcal{P}_q(r\eta,\zeta) = \varphi_q^r(\eta\cdot\zeta)$, onde

$$\varphi_q^r(z) := \frac{1}{w_{2q}}\frac{(1-r^2)^q}{(1-rz)^q(1-r\overline{z})^q}, \quad z\in B[0,1]. \tag{5.33}$$

Para obter a série de Taylor de $\varphi_q^r(z)$, começamos recordando uma consequência clássica de série geométrica. Para isso, precisamos primeiro definir a classe $\mathrm{Hom}_q(m,n)$: uma função f em Ω_{2q} pertence à esta classe se ela é a restrição a Ω_{2q} de um polinômio nas variáveis $z,\overline{z}\in B^q[0,1]$ o qual é homogêneo de grau m em z e homogêneo de grau n em $\overline{z}$.

Lema 5.3.1. *A seguinte fórmula vale*

$$\frac{1}{(1-z)^q(1-w)^q} = \sum_{m,n=0}^{\infty} M(q,m,n)z^m w^n, \quad z,w\in B(0,1), \tag{5.34}$$

onde $M(q,m,n)$ é a dimensão de $Hom_q(m,n)$.

Prova. Está essencialmente feita em [Koo72a], incluindo a descrição dos coeficientes. ■

Uma aplicação do Lema 5.3.1 leva-nos à expansão

$$\varphi_q^r(z) = \frac{(1-r^2)^q}{\omega_{2q}}\sum_{m,n=0}^{\infty} r^{m+n}M(q,m,n)z^m\overline{z}^n, \quad z\in B[0,1]. \tag{5.35}$$

Como a série é obviamente convergente quando $z=1$, segue que φ_q^r é real-analítica em $B[0,1]$. Observamos que a série de Taylor de $\varphi_q^r(z)$ também pode ser encontrada por diferenciação direta de (5.33) com relação a z e $\overline{z}$. Entretanto, manipulação do resto é necessária para mostrar que a série de Taylor converge para $\varphi_q^r(z)$ enquanto que o argumento acima já nos fornece isso.

Uma aplicação do Teorema 5.1.2 fornece a seguinte expansão para a função φ_q^r.

Teorema 5.3.2. *A função φ_q^r tem uma representação absoluta e uniformemente convergente via polinômios no disco na forma*

$$\varphi_q^r(z) = \frac{(1-r^2)^q}{(q-2)!(m+n+q-2)!\omega_{2q}}\sum_{m,n=0}^{\infty} r^{m+n}(m+1)_{q-2}(n+1)_{q-2} \times\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{M(q,m+j,n+j)}{j!(m+n+q)_j}r^{2j}\right)R_{m,n}^{q-2}(z),$$

Uma consequência imediata é:

Corolário 5.3.3. *O núcleo de Poisson-Szegö admite uma expansão via polinômios no disco na forma*

$$\mathcal{P}_q(r\eta,\zeta) = \frac{(1-r^2)^q}{(q-2)!(m+n+q-2)!\omega_{2q}} \sum_{m,n=0}^{\infty} r^{m+n}(m+1)_{q-2}(n+1)_{q-2} \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M(q,m+j,n+j)}{j!(m+n+q)_j} r^{2j} \right) R_{m,n}^{q-2}(\langle \eta,\zeta\rangle),$$

a qual é absoluta e uniformemente convergente quando $\eta,\zeta \in \Omega_{2q}$.

Para encerrar a seção comparamos nosso resultado com a expansão provada por Folland em [Fol75]. Seu principal teorema afirma que

$$\mathcal{P}_q(r\eta,\zeta) = \frac{1}{\omega_{2q}} \sum_{m,n=0}^{\infty} S_q^{m,n}(r) N(q,m,n) R_{m,n}^{q-2}(\langle \eta,\zeta\rangle), \tag{5.36}$$

com convergência absoluta e uniforme da série para $z = r\eta \in B[0,1]$ e $0 \le r \le \rho$, para cada $\rho < 1$. Nesta expressão, $N(q,m,n) := M(q,m,n) - M(q,m-1,n-1)$ para $m,n \neq 0$, $N(q,m,0) = M(q,m,0)$, $N(q,0,n) = M(q,0,n)$ e

$$S_q^{m,n}(r) = \frac{F(m,n,m+n+q,r^2)}{F(m,n,m+n+q,1)}, \tag{5.37}$$

onde $F(a,b,c,t)$ é a função hipergeométrica de t associada a (a,b,c) ([WG89]) definida por

$$F(a,b,c,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} \frac{t^k}{k!}, \tag{5.38}$$

enquanto

$$F(m,n,m+n+q,1) = \lim_{t\to 1^-} F(m,n,m+n+q,t) = \frac{\Gamma(m+n+q)\Gamma(q)}{\Gamma(n+q)\Gamma(m+q)}. \tag{5.39}$$

Observamos que $N(q,m,n)$ é a dimensão do espaço consistindo de todas funções em Ω_{2q} as quais são restrições a Ω_{2q} de harmônicos sólidos do tipo (m,n). A referência [Koo72a] contém mais detalhes sobre esse assunto.

Finalmente, agora é claro que a seguinte fórmula de representação vale para $S_q^{m,n}$.

Teorema 5.3.4. *Se m e n são inteiros não negativos e $r \in [0,1]$, então*

$$S_q^{m,n}(r) = \frac{(1-r^2)^q r^{m+n}}{(q-2)!(m+n+q-2)!N(q,m,n)}(m+1)_{q-2}(n+1)_{q-2} \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M(q,m+j,n+j)}{j!(m+n+q)_j} r^{2j} \right).$$

Capítulo 6

Funções positivas definidas: diferenciabilidade e analiticidade

Neste capítulo descreveremos os resultados do trabalho [MPP13]. O objetivo deste trabalho é obter alguns resultados sobre derivadas de funções positivas definidas em $\mathbb{R}^m$, explorando propriedades conhecidas de núcleos positivos definidos. Especificamente, dada uma função positiva definida f definida em $\mathbb{R}^m$, usaremos o núcleo associado $K(x, y) = f(x-y)$.

A ferramenta principal para provar os principais resultados deste capítulo é uma desigualdade que estima as derivadas de uma função positiva definida suave em termos de suas derivadas de ordem par na origem. Esta estimativa é uma consequência de resultados conhecidos sobre núcleos positivos definidos, um deles contido em [MOP09].

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 6.1, enunciamos os principais resultados. Na Seção 6.2, fornecemos uma condição suficiente sobre as derivadas de ordem par na origem para uma função positiva definida ser constante em $\mathbb{R}^m$ e damos um exemplo que mostra que nenhum resultado similar vale se consideramos derivadas de ordem ímpar. A Seção 6.3 contém a prova de um resultado sobre real-analiticidade de funções positivas definidas, o qual afirma que uma função positiva definida é real-analítica sobre uma hipótese similar à clássica caracterização para uma função geral de classe C^∞, mas envolvendo apenas derivadas de ordem par e na origem. Na Seção 6.4, uma estimativa para os conjuntos de convergência da série de Taylor de uma função positiva definida é fornecida e esta nos permite explicitar um conjunto em $\mathbb{C}^m$ onde a função pode ser estendida holomorficamente.

6.1 Enunciado dos principais resultados

Nesta seção enunciaremos os principais resultados de [MPP13], juntamente com algumas observações que relacionam nossos resultados com os da literatura existente.

Além das propriedades já citadas na introdução do Capítulo 1, uma outra propriedade notável de funções positivas definidas está relacionada à sua suavidade:

Proposição 6.1.1. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida. Se f é de classe C^{2n} para algum inteiro n não negativo (resp. C^∞), em alguma vizinhança da origem, então $f \in C^{2n}(\mathbb{R}^m)$ (resp. $C^\infty(\mathbb{R}^m)$).*

Esta propriedade é uma consequência do Teorema de Bochner, que diz que uma função positiva definida é caracterizada pela transformada de Fourier de uma medida positiva finita. Sua prova pode ser encontrada, por exemplo, em [Don69, p.186] ou [Wen05, p.77].

A desigualdade (1.4) implica que se $f(0) = 0$, então f é identicamente nula. Nosso primeiro resultado estende essa propriedade mostrando que se uma função positiva definida tem certas derivadas de ordem par nulas na origem então ela é constante:

Teorema 6.1.2. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida de classe C^{2n} em alguma vizinhança da origem, para algum inteiro positivo n. Assuma que $D^{2le_j}f(0) = 0$, para algum $l \in \{1, \dots, n\}$ e todo $j = 1, \dots, m$. Então, f é constante em $\mathbb{R}^m$.*

No caso $m = 1$ este teorema coincide com o Teorema 3.1 em [BP11]. Observamos que, surpreendentemente, nem todas derivadas de ordem $2l$ aparecem no enunciado, mas apenas as derivadas de ordem $2l$ com relação às mesma variável x_j, $j = 1, \dots, m$. Este teorema está provado na Seção 6.2.

Na Seção 6.3, fornecemos uma condição que garante real-analiticidade de uma função positiva definida. Para garantir que uma função geral de classe C^∞ seja real-analítica usualmente precisamos estimar todas suas derivadas em algum conjunto aberto (veja Lema 6.3.1); entretanto, no caso de funções positivas definidas, verifica-se que real-analiticidade pode ser garantida pela condição abaixo, que envolve apenas certas derivadas de ordem par (aquelas com multi-índice da forma $2\alpha :\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^m$) e apenas na origem:

Hipótese $\mathbf{H_{ra}}$: existem constantes positivas d e R tais que

$$|D^{2\alpha}f(0)| \le d\frac{(2\alpha)!}{R^{|2\alpha|}}, \tag{6.1}$$

para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Teorema 6.1.3. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida de classe C^∞ em alguma vizinhança da origem, satisfazendo a Hipótese H_{ra}. Então, f é real-analítica em $\mathbb{R}^m$.*

Novamente, este teorema se reduz ao Teorema 4.3-(i) em [BP11] quando $m = 1$.

Finalmente, na Seção 6.4, estendemos o Teorema 4.3-(ii) em [BP11], no qual é dada uma faixa maximal em $\mathbb{C}$, onde uma função positiva definida real-analítica f (de uma variável real) pode ser estendida holomorficamente. Nosso resultado está detalhado na Proposição 6.4.4; um enunciado simplificado é o seguinte:

Teorema 6.1.4. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida de classe C^∞ em alguma vizinhança da origem, satisfazendo a Hipótese H_{ra}. Então, f pode ser estendida holomorficamente ao conjunto*

$$\{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |\mathcal{I}m(z_j)| < R,\ j = 1, 2, \dots, m\}. \tag{6.2}$$

A ferramenta fundamental para provar todos os resultados acima é uma propriedade similar a (1.4), mas envolvendo derivadas de f, e está contida na Proposição 6.2.2 na Seção 6.2. De um modo geral, ela diz que as derivadas de uma função positiva definida suave podem ser estimadas em termos de suas derivadas de ordem par na origem. A estimativa é uma consequência de resultados conhecidos sobre núcleos positivos definidos em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ (veja o Teorema 4.1.7 e a Proposição 6.2.1).

6.2 Diferenciabilidade

A proposta desta seção é transpor o principal resultado da Seção 4.1 e um resultado de [FM12] sobre núcleos positivos definidos, para o caso de funções positivas definidas, e então provar o Teorema 6.1.2. Tais resultados estendem a $\mathbb{R}^m$ um resultado de [BP06]. Especificamente, faremos uso do Teorema 4.1.7 e da seguinte proposição, cuja prova faz uso de técnicas de análise funcional clássica, após escrever o núcleo como uma expansão de Mercer:

Proposição 6.2.1. ([FM12]) *Se $K \in C^{2n}(O \times O)$ é um núcleo positivo definido, então a seguinte desigualdade vale:*

$$|D^{\alpha,\beta}_{x,y} K(x,y)|^2 \leq D^{\alpha,\alpha}_{x,y} K(x,x) D^{\beta,\beta}_{x,y} K(y,y), \quad x,y \in O\,, \tag{6.3}$$

sempre que $|\alpha|, |\beta| \leq n$.

Para o caso de uma função positiva definida, obtemos o seguinte resultado, explorando também a Proposição 6.1.1.

Proposição 6.2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida. Assuma que f é de classe C^{2n} em alguma vizinhança da origem, para algum inteiro positivo n. Então,*

(i) cada função

$$f_\alpha := (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} f, \quad |\alpha| \leq n, \tag{6.4}$$

é positiva definida de classe $C^{2(n-|\alpha|)}(\mathbb{R}^m)$;

(ii) a seguinte desigualdade vale:

$$|D^{\alpha+\beta} f(x)|^2 \leq (-1)^{|\alpha+\beta|} D^{2\alpha} f(0)\, D^{2\beta} f(0), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{6.5}$$

sempre que $|\alpha|, |\beta| \leq n$.

Prova. Pela Proposição 6.1.1, $f \in C^{2n}(\mathbb{R}^m)$ e então $K(x,y) := f(x-y)$ é um núcleo positivo definido de classe $C^{2n}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$. Usando a regra da cadeia é fácil ver que

$$D^{\alpha,\beta}_{x,y} K(x,y) = D^{0,\beta}_{x,y}[(D^\alpha f)(x-y)] = (-1)^{|\beta|} D^{\alpha+\beta} f(x-y), \quad x,y \in \mathbb{R}^m. \tag{6.6}$$

Em particular, para $|\alpha| \leq n$,

$$(-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} f(x-y) = D^{\alpha,\alpha}_{x,y} K(x,y), \quad x, y \in \mathbb{R}^m. \tag{6.7}$$

Como $D^{\alpha,\alpha}_{x,y} K$ é um núcleo positivo definido de classe $C^{2(n-|\alpha|)}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ (pelo Teorema 4.1.7), a equação (6.7) implica que f_α é uma função positiva definida em $\mathbb{R}^m$. Finalmente, de (6.3) e (6.6), segue que

$$\begin{aligned} |D^{\alpha+\beta} f(x)|^2 &= |D^{\alpha,\beta}_{x,y} K(x,0)|^2 \\ &\leq D^{\alpha,\alpha}_{x,y} K(x,x) D^{\beta,\beta}_{x,y} K(0,0) \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} D^{2\alpha} f(0) D^{2\beta} f(0), \quad x \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

sempre que $|\alpha|, |\beta| \leq n$. ■

Observe que o lado direito em (6.5) é não negativo pois ambas as funções $(-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} f$ and $(-1)^{|\beta|} D^{2\beta} f$ são positivas definidas e portanto são não negativas na origem. Pela mesma razão, a Hipótese H_{ra} pode ser escrita como

$$0 \leq (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} f(0) \leq d \frac{(2\alpha)!}{R^{|2\alpha|}}.$$

Finalmente, observe que a afirmação (ii) na proposição acima é verdadeira também para $n = 0$, quando se reduz à conhecida relação (1.4).

Estamos agora prontos para fornecer a

Prova do Teorema 6.1.2. Fixe $j \in \{1, \ldots, m\}$ e suponha que $D^{2le_j} f(0) = 0$. Mostraremos que $D^{2e_j} f(0) = 0$.
Se $l = 1$, não há o que ser provado. Assim, assumimos $l > 1$ e definimos a sequência não crescente $\{k_p\}$ de números pares fazendo $k_1 = 2l$ e

$$k_{p+1} = \begin{cases} k_p/2 & \text{se } k_p/2 \text{ é par} \\ k_p/2 + 1 & \text{se } k_p/2 \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Observe que existe um índice $p(l)$ dependendo de l tal que $k_p = 2$, para todo $p \geq p(l)$. Agora, provaremos, por indução, que

$$D^{k_p e_j} f(0) = 0, \text{ para todo inteiro positivo } p. \tag{6.8}$$

Para $p = 1$, temos $k_1 e_j = 2le_j$ e então (6.8) é verdadeiro pela hipótese. Suponha agora que $D^{k_p e_j} f(0) = 0$ para algum inteiro positivo p. Usando a Proposição 6.2.2-(ii), com $\alpha = 0$ e $\beta = (k_p/2)e_j$, obtemos

$$|D^{(k_p/2)e_j} f(x)|^2 \leq (-1)^{k_p/2} f(0) D^{k_p e_j} f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{6.9}$$

Assim,

$$D^{(k_p/2)e_j}f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m \tag{6.10}$$

e como consequência

$$D^{((k_p/2)+1)e_j}f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{6.11}$$

Logo,

$$D^{k_{p+1}e_j}f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{6.12}$$

em particular, $D^{k_{p+1}e_j}f(0) = 0$. Portanto, $D^{k_p e_j}f(0) = 0$ para todo $p = 1, 2, \ldots$. Agora, quando $p = p(l)$, temos $k_{p(l)}e_j = 2e_j$.

Para finalizar a prova, aplicamos novamente a Proposição 6.2.2-(ii), agora com $\alpha = e_j$ e $\beta = 0$:

$$|D^{e_j}f(x)|^2 \le -f(0)D^{2e_j}f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{6.13}$$

Portanto, $D^{e_j}f \equiv 0$, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, implicando que f é constante em $\mathbb{R}^m$. ■

Observação 6.2.3. *Nenhum análogo ao Teorema 6.1.2 vale para derivadas de ordem ímpar, na verdade, a função positiva definida dada na equação* (1.7)*:*

$$f(x) = \exp(-||x||^2), \quad x \in \mathbb{R}^m, \tag{6.14}$$

é um exemplo simples onde $D^{(2l+1)e_j}f(0) = 0$*, para cada* $j = 1, 2, \ldots, m$ *e* $l = 0, 1, \ldots$*, mas* f *não é constante.*

6.3 Real-analiticidade

Nesta seção damos uma breve introdução às funções real-analíticas, seguindo [BM48, Hof75, Kra01], e provamos o Teorema 6.1.3.

O conceito de real-analíticidade está relacionado à série de potências. Uma série de potências de várias variáveis centrada em $y \in \mathbb{R}^m$ é uma série da forma

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_\alpha (x - y)^\alpha\,, \tag{6.15}$$

onde $\{a_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^m\} \subseteq \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}^m$.
Consideraremos a série de potências (6.15) apenas em subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ onde ela converge absolutamente:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} |a_\alpha (x - y)^\alpha| < \infty; \tag{6.16}$$

sobre esta condição, (6.15) é invariante com respeito à rearranjamentos, e assim seus termos podem ser somados em qualquer ordem sem afetar o resultado (para uma discussão sobre como a teoria de série de potências pode ser afetada pela forma como é definida sua

convergência, quando apenas convergência conditional é assumida, veja [AW72]).
Seja f uma função complexa definida em um conjunto aberto $O \subseteq \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é uma função *real-analítica* se para cada $y \in O$ existem uma vizinhança V_y de y e uma série da forma (6.15), absoluta e uniformemente convergente em V_y, tais que

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_\alpha^y (x-y)^\alpha , \quad x \in V_y; \tag{6.17}$$

aqui os coeficientes a_α^y dependem de y (veja [Kra01, p. 100]). Um resultado bem conhecido que fornece uma caracterização para um função de classe C^∞ ser real-analítica é:

Lema 6.3.1. ([KP02, p. 34]) *Seja f uma função em $C^\infty(O)$ para algum conjunto aberto $O \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é real-analítica em O se, e somente se, para cada $y \in O$, existem uma bola aberta U, com $y \in U \subset O$, e constantes positivas M e r tais que*

$$|D^\alpha f(x)| \leq M \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}}, \quad x \in U, \tag{6.18}$$

para todos multi-índices $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$.

Provaremos agora o Teorema 6.1.3, o qual afirma que, no caso de funções positivas definidas, real-analiticidade pode ser garantida por uma estimativa similar a (6.18), mas envolvendo apenas as derivadas com multi-índice tendo todas entradas pares, e apenas na origem: Hipótese H_{ra}.

É interessante notar que, para funções gerais, uma estimativa sobre as derivadas em um único ponto não é suficiente para garantir analiticidade: um exemplo clássico é dado por

$$g(x) = \begin{cases} 1 - e^{-1/||x||^2} & se\ x \neq 0\,, \\ 1 & se\ x = 0\,, \end{cases}$$

o qual tem todas as derivadas na origem iguais a zero, mas não é analítica em qualquer vizinhança da origem. Como uma consequência, g não pode ser positiva definida em $\mathbb{R}^m$, apesar de satisfazer (1.2-1.4) e ter gráfico qualitativamente similar a (6.14). Na verdade, se g fosse positiva definida, então o Teorema 6.1.2 implicaria que ela é constante.

Prova do Teorema 6.1.3. Como f é de classe C^∞ em alguma vizinhança da origem, pela Proposição 6.1.1, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Mostraremos que existem $M, r > 0$ para os quais (6.18) vale para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todos multi-índices α.
Fixe $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ e considere γ e β multi-índices tais que

$$\alpha = \gamma + \beta, \tag{6.19}$$

onde $|\gamma| = |\beta|$ se $|\alpha|$ é par e $|\gamma| = |\beta| + 1$ se $|\alpha|$ é ímpar.
Usando a Proposição 6.2.2-(ii) obtemos

$$|D^\alpha f(x)|^2 = |D^{\gamma+\beta} f(x)|^2 \leq |D^{2\gamma} f(0)||D^{2\beta} f(0)|, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{6.20}$$

Então, (2.1) e (6.1) implicam que

$$|D^\alpha f(x)|^2 \leq d^2 \frac{(2\gamma)!}{R^{|2\gamma|}} \frac{(2\beta)!}{R^{|2\beta|}} \leq d^2 \frac{|2\gamma|!}{R^{|2\gamma|}} \frac{|2\beta|!}{R^{|2\beta|}} = \frac{d^2}{R^{2|\alpha|}} |2\gamma|!|2\beta|!, \quad x \in \mathbb{R}^m . \tag{6.21}$$

Agora, temos

$$\begin{cases} |2\gamma| = |2\beta| = |\alpha| & \text{se } |\alpha| \text{ é par,} \\ |2\gamma| = |\alpha| + 1, \quad |2\beta| = |\alpha| - 1 & \text{se } |\alpha| \text{ é ímpar;} \end{cases}$$

o que implica

$$|2\gamma|!|2\beta|! = \begin{cases} (|\alpha|!)^2 & \text{se } |\alpha| \text{ é par,} \\ (|\alpha|!)^2 \frac{|\alpha|+1}{|\alpha|} & \text{se } |\alpha| \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

e então $|2\gamma|!|2\beta|! \leq 2(|\alpha|!)^2$. Assim, (6.21) torna-se

$$|D^\alpha f(x)|^2 \leq 2d^2 \frac{(|\alpha|!)^2}{R^{2|\alpha|}}, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{6.22}$$

Usando (2.1),

$$|D^\alpha f(x)| \leq \sqrt{2}\, d \frac{|\alpha|!}{R^{|\alpha|}} \leq \sqrt{2}\, d\, m^{|\alpha|} \frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}} = \sqrt{2}\, d \frac{\alpha!}{(R/m)^{|\alpha|}}, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{6.23}$$

Escrevendo $r = R/m$ e $M = \sqrt{2}\, d$, a estimativa (6.18) está provada para todo multi-índice α. Portanto, o Lema 6.3.1 implica que f é real-analítica em $\mathbb{R}^m$. ■

6.4 Extensão holomorfa

Nesta seção caracterizamos um conjunto em $\mathbb{C}^m$ onde, sobre a Hipótese H_{ra}, uma função positiva definida de classe C^∞ pode ser estendida holomorficamente. Este conjunto está relacionado com o domínio de convergência da série de Taylor da função.

Começamos fixando algumas definições e notações e enunciano alguns resultados básicos sobre série de potências e funções holomorfas, a fim de deixar as provas dos principais resultados mais claras.

A noção de domínio de convergência para uma série de potências de várias variáveis como (6.15) não é tão simples quanto no caso de uma variável, real ou complexa (veja [Hof75, Kra01, Nis01, Sha92]).

Podemos considerar um tipo especial de conjunto de convergência (veja [Hof75]), descrito por um raio de convergência escalar r_y o qual é definido por

$$r_y := \sup \left\{ t \geq 0 : \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} |a_\alpha (x-y)^\alpha| < \infty,\ x \in P(y,t) \right\}, \tag{6.24}$$

onde $P(y,t)$ é o retângulo aberto simétrico

$$P(y,t) := \{x \in \mathbb{R}^m : |x_j - y_j| < t,\ j = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{6.25}$$

Entretanto, dada a série (6.15), podemos considerar uma função das variáveis complexas $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, definida por uma série com os mesmos coeficientes como (6.15), centrada em $w = (y_1 + 0i, \ldots, y_m + 0i) \in \mathbb{C}^m$:

$$F_y(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m} a_\alpha (z - w)^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^m. \tag{6.26}$$

Pelo Lema de Abel ([Kra01, p. 101]), esta série converge para a função holomorfa F_y no retângulo complexo simétrico

$$P_{\mathbb{C}}(w, r_y) := \{z \in \mathbb{C}^m : |z_j - w_j| < r_y,\ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Mais geralmente, podemos considerar um polidisco da forma

$$U(w,r) := \{z \in \mathbb{C}^m : |z_j - w_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, m\}, \tag{6.27}$$

onde $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m$, o qual é chamado um *polidisco de convergência* da série em (6.26) se a série converge (para alguma reordenação) nele, mas em qualquer polidisco $U(w, r')$ com $r'_j \geq r_j$, $j = 1, \ldots, m$, e pelo menos uma dessas desigualdades estrita, existem pontos nos quais (6.26) não converge. Os raios r_i deste polidisco são chamados *raios conjugados de convergência* e satisfazem o seguinte análogo multidimensional da fórmula de Cauchy-Hadamard ([Nis01, Sha92]):

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\max_{|\alpha|=n} \{|a_\alpha| r^\alpha\}} = 1. \tag{6.28}$$

De fato, o seguinte resultado vale:

Lema 6.4.1. *Se r satisfaz* (6.28) *para a série de potências* (6.26)*, então a série converge em $U(w,r)$ mas não converge em todo ponto de $U(w,\rho r)$ se $\rho > 1$. Na verdade, ela não converge em qualquer $z \in \mathbb{C}^m$ tal que $|z_j - w_j| = c r_j$, $j = 1, \ldots, m$, e $c > 1$.*

Prova. Sem perda de generalidade assumimos $w = 0$.

Seja $0 < t < c < 1$; pela definição de $\limsup$, existe um inteiro positivo n_0 tal que

$$\sqrt[n]{|a_\alpha| r^\alpha} \leq \sqrt[n]{\max_{|\alpha|=n} \{|a_\alpha| r^\alpha\}} \leq \frac{1}{c}, \quad \forall\, \alpha :\ |\alpha| = n \geq n_0. \tag{6.29}$$

Logo, se $z \in U(0, tr)$,

$$|a_\alpha z^\alpha| = |a_\alpha| r^\alpha \left| \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{z_j}{r_j}\right)^{\alpha_j} \right| < \frac{1}{c^n} t^{|\alpha|} = \left(\frac{t}{c}\right)^n, \quad \forall\, \alpha :\ |\alpha| = n \geq n_0.$$

Como a série de potências $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m}(t/c)^{|\alpha|}$ converge (veja [Hof75, p. 193]), concluímos que $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m} a_\alpha z^\alpha$ converge absolutamente em $U(0,tr)$, para todo $t<1$, então em $U(0,r)$ também.

Agora, se $\rho>1$, seja c tal que $\rho>c>1$. Pela definição de lim sup,

$$\sqrt[|\alpha|]{|a_\alpha|r^\alpha}\geq\frac{1}{c} \tag{6.30}$$

para infinitamente muitos multi-índices α.
Se $\widetilde{z}\in U(0,\rho r)$ é tal que $|\widetilde{z}_j|=cr_j$, $j=1,\ldots,m$, então

$$|a_\alpha\widetilde{z}^\alpha|=|a_\alpha|r^\alpha\left|\prod_{j=1}^m\left(\frac{\widetilde{z}_j}{r_j}\right)^{\alpha_j}\right|=|a_\alpha|r^\alpha c^{|\alpha|}\geq 1 \tag{6.31}$$

para infinitamente muitos multi-índices α. Assim, a série $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m} a_\alpha\widetilde{z}^\alpha$ não pode convergir (para qualquer reordenação de seus termos). ∎

Finalmente, o *domínio de convergência* $\mathbb{D}_y$ de (6.26) é definido como o interior do conjunto dos pontos $z\in\mathbb{C}^m$ nos quais esta série converge para alguma ordem de seus termos, e ele pode ser coberto por polidiscos de convergência (veja também [GF76, KP02]).

Se uma função f é de classe C^∞ em um conjunto aberto $O\subseteq\mathbb{R}^m$, então para cada $y\in O$ podemos definir sua *série de Taylor* centrada em y como

$$T_{f,y}(x)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m}^{\infty}\frac{D^\alpha f(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha,\quad x\in\mathbb{R}^m. \tag{6.32}$$

Se f é também real-analítica, então para cada $y\in O$, sua série de Taylor centrada em y converge absolutamente para f em alguma vizinhança V_y de y. Neste caso, a *extensão holomorfa* de f é a função F de variáveis complexas $z\in\mathbb{C}^m$ a qual satisfaz

$$F(z)=F_y(z):=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m}\frac{D^\alpha f(y)}{\alpha!}(z-w)^\alpha,\quad z\in\mathbb{D}_y,\ w=y+i0,\ y\in\mathbb{R}^m, \tag{6.33}$$

onde $\mathbb{D}_y$ é o domínio de convergência da série no lado direito; esta definição está bem formulada pois, quando $z\in\mathbb{D}_y\cap\mathbb{D}_{y'}$, temos $F_y(z)=F_{y'}(z)$ pelo Teorema 5 em [BM48, p. 34].

A proposta desta seção é estimar o subconjunto de $\mathbb{C}^m$ no qual nossa função positiva definida f pode ser estendida holomorficamente. Precisaremos obter raios de convergência para a série de Taylor de f, para isto, definimos o seguinte conjunto de raios normalizados:

$$\Re:=\left\{r=(r_1,\ldots,r_m)\in\mathbb{R}^m\colon r_j\geq 0\ ,\ j=1,\ldots,m,\text{ and }\max_{j=1,\ldots,m}r_j=1\right\}. \tag{6.34}$$

Primeiro, provamos o seguinte lema.

Lema 6.4.2. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida de classe C^∞ em alguma vizinhança da origem, satisfazendo a Hipótese H_{ra}.*
Dado $r \in \Re$, defina

$$l_r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\max_{|\alpha|=n}\left\{\frac{|D^{2\alpha}f(0)|}{(2\alpha)!}r^{2\alpha}\right\}}. \tag{6.35}$$

Então

$$l_r \leq \frac{1}{R}, \tag{6.36}$$

$$h_r(y) := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\max_{|\alpha|=k}\left\{\frac{|D^{\alpha}f(y)|}{\alpha!}r^{\alpha}\right\}} \leq l_r\,, \quad y \in \mathbb{R}^m\,, \tag{6.37}$$

$$h_r(0) = l_r\,. \tag{6.38}$$

Prova. Sejam n um inteiro positivo e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ com $|\alpha| = n$. Usando (6.1) obtemos

$$\frac{|D^{2\alpha}f(0)|}{(2\alpha)!} \leq \frac{d}{R^{2|\alpha|}} = \frac{d}{R^{2n}}\,. \tag{6.39}$$

Assim,

$$\max_{|\alpha|=n}\left\{\frac{|D^{2\alpha}f(0)|}{(2\alpha)!}r^{2\alpha}\right\} \leq \frac{d}{R^{2n}}\,. \tag{6.40}$$

Portanto,

$$l_r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\max_{|\alpha|=n}\left\{\frac{|D^{2\alpha}f(0)|}{(2\alpha)!}r^{2\alpha}\right\}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{d}{R^{2n}}} = \frac{1}{R} < \infty\,. \tag{6.41}$$

Agora provamos (6.37). Para isso, fixe $y \in \mathbb{R}^m$ e escreva $\alpha \in \mathbb{Z}_+^m$ como

$$\alpha = \gamma + \beta,$$

onde γ e β são escolhidos de modo que

$$\begin{cases} |\gamma| = \lceil |\alpha|/2 \rceil, & 2\gamma_j \leq \alpha_j + 1, \ j = 1, \ldots, m\,, \\ |\beta| = \lfloor |\alpha|/2 \rfloor, & 2\beta_j \leq \alpha_j + 1, \ j = 1, \ldots, m\,; \end{cases} \tag{6.42}$$

aqui $\lfloor x \rfloor$ (resp. $\lceil x \rceil$) é definido como o maior inteiro $z \leq x$ (resp. o menor inteiro $z \geq x$). As condições (6.42) sempre podem ser satisfeitas considerando-se $\beta_j = \gamma_j = \alpha_j/2$ quando α_j é par e alternando $\beta_j = \gamma_j - 1 = \lfloor \alpha_j/2 \rfloor$ e $\gamma_j = \beta_j - 1 = \lfloor \alpha_j/2 \rfloor$ para aqueles índices j para os quais α_j é ímpar.
Usando a Proposição 6.2.2-(ii) e a relação $r^\alpha = r^\gamma r^\beta$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{|D^\alpha f(y)|}{\alpha!}r^\alpha &\leq \frac{\sqrt{|D^{2\gamma}f(0)|}\sqrt{|D^{2\beta}f(0)|}}{\alpha!}r^\alpha \\ &= \sqrt{\frac{|D^{2\gamma}f(0)|}{\alpha!}r^{2\gamma}}\sqrt{\frac{|D^{2\beta}f(0)|}{\alpha!}r^{2\beta}}. \end{aligned}$$

Agora, por (6.42) e como $(2\gamma)! \leq (\alpha + \underline{1})! = \alpha! \prod_{j=1}^{m}(\alpha_j + 1) \leq \alpha!(|\alpha| + 1)^m$ (e o mesmo vale para β), temos

$$\frac{|D^\alpha f(y)|}{\alpha!} r^\alpha \leq \sqrt{\frac{|D^{2\gamma} f(0)|}{(2\gamma)!} r^{2\gamma}} \sqrt{\frac{|D^{2\beta} f(0)|}{(2\beta)!} r^{2\beta}} (|\alpha| + 1)^m.$$

Como uma consequência,

$$\max_{|\alpha|=n} \left\{ \frac{|D^\alpha f(y)|}{\alpha!} r^\alpha \right\} \leq \sqrt{\max_{|\gamma|=\lceil n/2 \rceil} \left\{ \frac{|D^{2\gamma} f(0)|}{(2\gamma)!} r^{2\gamma} \right\}} \sqrt{\max_{|\beta|=\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \frac{|D^{2\beta} f(0)|}{(2\beta)!} r^{2\beta} \right\}} (n+1)^m.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{\max_{|\alpha|=n} \left\{ \frac{|D^\alpha f(y)|}{\alpha!} r^\alpha \right\}} \leq \\ &\qquad \leq \sqrt[2n]{\max_{|\gamma|=\lceil n/2 \rceil} \left\{ \frac{|D^{2\gamma} f(0)|}{(2\gamma)!} r^{2\gamma} \right\}} \sqrt[2n]{\max_{|\beta|=\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \frac{|D^{2\beta} f(0)|}{(2\beta)!} r^{2\beta} \right\}} \sqrt[n]{(n+1)^m}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Agora,

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\max_{|\gamma|=\lceil n/2 \rceil} \left\{ \frac{|D^{2\gamma} f(0)|}{(2\gamma)!} r^{2\gamma} \right\}} = \\ &\qquad = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[2\lceil n/2 \rceil]{\max_{|\gamma|=\lceil n/2 \rceil} \left\{ \frac{|D^{2\gamma} f(0)|}{(2\gamma)!} r^{2\gamma} \right\}} \right)^{\frac{2\lceil n/2 \rceil}{2n}} = \sqrt{l_r} \end{aligned} \tag{6.44}$$

e, da mesma forma,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\max_{|\beta|=\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \frac{|D^{2\beta} f(0)|}{(2\beta)!} r^{2\beta} \right\}} = \sqrt{l_r}\,.$$

Além disso, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^m} = 1$, então, tomando o $\limsup$ em (6.43), obtemos

$$h_r(y) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\max_{|\alpha|=n} \left\{ \frac{|D^\alpha f(y)|}{\alpha!} r^\alpha \right\}} \leq l_r. \tag{6.45}$$

Concluímos provando (6.38): nas sequências em (6.35) e (6.37) podemos comparar os termos com $k = 2n$ quando $y = 0$, e obtemos

$$\sqrt[2n]{\max_{|\alpha|=n} \left\{ \frac{|D^{2\alpha} f(0)|}{(2\alpha)!} r^{2\alpha} \right\}} \leq \sqrt[2n]{\max_{|\alpha|=2n} \left\{ \frac{|D^\alpha f(0)|}{\alpha!} r^\alpha \right\}};$$

pois no lado direito aparecem todos os termos do lado esquerdo, juntamente com outros termos. Então, restringindo a uma subsequência,

$$h_r(0) \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\max_{|\alpha|=2n}\left\{\frac{|D^\alpha f(0)|}{\alpha!}r^\alpha\right\}} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\max_{|\alpha|=n}\left\{\frac{|D^{2\alpha} f(0)|}{(2\alpha)!}r^{2\alpha}\right\}} = l_r\,. \quad (6.46)$$

Isto conclui a prova do lema. ∎

Observe que l_r e R dependem apenas das derivadas de ordem par de f na origem, então, como uma consequência do Lema 6.4.2, obtemos uma estimativa para os polidiscos de convergência da série de Taylor centrada em qualquer $y \in \mathbb{R}^m$, que depende apenas dessas derivadas:

Corolário 6.4.3. *Dada f como no Lema 6.4.2, para todo $r \in \Re$ e $y \in \mathbb{R}^m$, a série em* (6.33) *converge em $U(y+i0, r/h_r(y))$, mas existem pontos onde ela não converge em $U(y+i0, \rho r/h_r(y))$ se $\rho > 1$ (resp., converge em $U(y+i0, tr)$ para todo $t > 0$ no caso especial $h_r(y) = 0$).*
Em particular, ela converge nos dois conjuntos

$$U(y+i0, r/l_r) \supseteq U(y+i0, Rr).$$

Finalmente, a série converge nos três retângulos simétricos complexos

$$P_{\mathbb{C}}(y+i0, 1/h_{\widehat{r}}(y)) \supseteq P_{\mathbb{C}}(y+i0, 1/l_{\widehat{r}}) \supseteq P_{\mathbb{C}}(y+i0, R)\,,$$

onde $\widehat{r} := (1, \ldots, 1)$.

Prova. Por (6.37),

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\max_{|\alpha|=k}\left\{\frac{|D^\alpha f(y)|}{\alpha!}\left(\frac{r}{h_r(y)}\right)^\alpha\right\}} = 1, \quad y \in \mathbb{R}^m\,; \qquad (6.47)$$

então nossa primeira afirmação segue do Lema 6.4.1 quando $h_r(y) \neq 0$. Se $h_r(y) = 0$ um argumento similar aquele da primeira parte da prova do Lema 6.4.1 prova que a série converge em $U(y+0i, tr)$ para qualquer $t > 0$: de fato, se $0 < t < c$ então (6.29) vale e então temos convergência em $U(y+0i, tr)$.

A convergência em $U(y+i0, r/l_r)$ e em $U(y+i0, Rr)$ segue imediatamente, pois $h_r(y) \leq l_r \leq 1/R$.

A última afirmação segue observando que $U(y+i0, \widehat{r}) = P_{\mathbb{C}}(y+i0, 1)$.

∎

Podemos agora enunciar o principal resultado desta seção, o qual especifica um conjunto onde uma função positiva definida real-analítica pode ser estendida holomorficamente. O Teorema 6.1.4 segue imediatamente.

Proposição 6.4.4. *Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ uma função positiva definida de classe C^∞ em alguma vizinhança da origem, satisfazendo a Hipótese H_{ra}. Então, f pode ser estendida holomorficamente a união de polidiscos:*

$$H := \bigcup_{y\in\mathbb{R}^m} \bigcup_{r\in\Re} U\left(y + i0,\, r/h_r(y)\right). \tag{6.48}$$

Em particular, um subconjunto de H o qual depende apenas das derivadas de f de ordem par na origem é a seguinte vizinhança de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{C}^m$:

$$\bigcup_{r\in\Re} \left\{z \in \mathbb{C}^m : |\mathcal{I}m(z_j)| < r_j/l_r,\ j = 1, 2, \ldots, m\right\}. \tag{6.49}$$

Finalmente, (6.49) *é maximal no sentido que f não pode ser estendida holomorficamente a*

$$\bigcup_{r\in\Re} \{z \in \mathbb{C}^m : |\mathcal{I}m(z_j)| < \rho_r r_j,\ j = 1, 2, \ldots, m\} \tag{6.50}$$

se $\rho_r > 1/l_r$ para algum $r \in \Re$.

Prova da Proposição 6.4.4 e do Teorema 6.1.4. Pelo Teorema 6.1.3, f é real-analítica em $\mathbb{R}^m$. Assim, podemos definir sua extensão holomorfa como em (6.33).

Pelo Corolário 6.4.3, para um $y \in \mathbb{R}^m$ fixado, a série no lado direito de (6.33) converge, para um dado $r \in \Re$, no conjunto $U\left(y + i0,\, r/h_r(y)\right)$. Então seu domínio de convergência é $\bigcup_{r\in\Re} U\left(y + i0,\, r/h_r(y)\right)$. Na verdade, todos polidiscos de convergência aparecem na união.

A função f pode então ao conjunto H definido em (6.48): a união dos domínios de convergência desta série.

Como $U(y + i0,\, r/l_r) \subseteq U\left(y + i0,\, r/h_r(y)\right)$, um subconjunto de H é

$$\bigcup_{y\in\mathbb{R}^m} \bigcup_{r\in\Re} U(y + i0,\, r/l_r), \tag{6.51}$$

o qual é o mesmo que (6.49).
Entretanto, como $h_r(0) = l_r$, f não pode ser estendida ao conjunto (6.50) se todos $\rho_r > 1/l_r$.

Finalmente, se consideramos apenas $\widehat{r} \in \Re$ como no Corolário 6.4.3, e usamos $l_{\widehat{r}} \leq 1/R$, obtemos o conjunto simétrico (6.2).

∎

Bibliografia

[AW72] J. M. Ash and G. V. Welland, *Convergence, uniqueness, and summability of multiple trigonometric series*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 401–436.

[Bax91] B. J. C. Baxter, *Conditionally positive functions and p-norm distance matrices*, Constr. Approx. **7** (1991), no. 4, 427–440.

[BCR84] C. Berg, J. P. R. Christensen, and P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 100, Springer-Verlag, New York, 1984, Theory of positive definite and related functions.

[BDS08] A. Bezubik, A. Dąbrowska, and A. Strasburger, *On spherical expansions of zonal functions on Euclidean spheres*, Arch. Math. (Basel) **90** (2008), no. 1, 70–81.

[BFS02] G. Brown, Dai Feng, and S. Y. Sheng, *Kolmogorov width of classes of smooth functions on the sphere* $\mathbb{S}^{d-1}$, J. Complexity **18** (2002), no. 4, 1001–1023.

[BH01] B. J. C. Baxter and S. Hubbert, *Radial basis functions for the sphere*, Recent progress in multivariate approximation (Witten-Bommerholz, 2000), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 137, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 33–47.

[BM48] S. Bochner and W. T. Martin, *Several Complex Variables*, Princeton Mathematical Series, vol. 10, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948.

[Boc41] S. Bochner, *Hilbert distances and positive definite functions*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 647–656.

[Boy70] J. N. Boyd, *Orthogonal polynomials on the disc*, Thesis, 1970, University of Virginia.

[BP06] J. Buescu and A. C. Paixão, *Positive definite matrices and differentiable reproducing kernel inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), no. 1, 279–292.

[BP11] J. Buescu and A. C. Paixão, *On differentiability and analyticity of positive definite functions*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), no. 1, 336–341.

[CH99] C.-H. Chang and C.-W. Ha, *On eigenvalues of differentiable positive definite kernels*, Integral Equations Operator Theory **33** (1999), no. 1, 1–7.

[Che95] E. W. Cheney, *Approximation using positive definite functions*, Approximation theory VIII, Vol. 1 (College Station, TX, 1995), Ser. Approx. Decompos., vol. 6, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, pp. 145–168.

[CK90] F. Cobos and T. Kühn, *Eigenvalues of integral operators with positive definite kernels satisfying integrated Hölder conditions over metric compacta*, J. Approx. Theory **63** (1990), no. 1, 39–55.

[CL88] J. A. Cochran and M. A. Lukas, *Differentiable positive definite kernels and Lipschitz continuity*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **104** (1988), no. 2, 361–369.

[CL09] W. Cheney and W. Light, *A course in approximation theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 101, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, Reprint of the 2000 original.

[CM12] M. H. Castro and V. A. Menegatto, *Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere*, Math. Comp. **81** (2012), no. 280, 2303–2317.

[CMP12] M. H. Castro, V. A. Menegatto, and A. P. Peron, *Integral operators generated by Mercer-like kernels on topological spaces*, Colloq. Math. **126** (2012), no. 1, 125–138.

[CMS03a] D. Chen, V. A. Menegatto, and X. Sun, *A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 9, 2733–2740 (electronic).

[CMS03b] D. Chen, V. A. Menegatto, and X. Sun, *A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 9, 2733–2740 (electronic).

[Con00] J. B. Conway, *A course in operator theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[CS98a] E. W. Cheney and X. Sun, *Interpolation on spheres by positive definite functions*, Approximation theory, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 212, Dekker, New York, 1998, pp. 141–156.

[CS98b] E. W. Cheney and X. Sun, *Interpolation on spheres by positive definite functions*, Approximation theory, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 212, Dekker, New York, 1998, pp. 141–156.

[dCMP12] M. H. de Castro, V. A. Menegatto, and A. P. Peron, *Traceability of positive integral operators in the absence of a metric*, Banach J. Math. Anal. **6** (2012), no. 2, 98–112.

[Don69] Jr. Donoghue, W. F., *Distribuitions and fourier transforms*, Pure and Applied Mathematics, vol. 32, Academic Press, New York, 1969.

[FM12] J. C. Ferreira and V. A. Menegatto, *Reproducing properties of differentiable Mercer-like kernels*, Math. Nachr. **285** (2012), no. 8-9, 959–973.

[FMP08] J. C. Ferreira, V. A. Menegatto, and A. P. Peron, *Integral operators on the sphere generated by positive definite smooth kernels*, J. Complexity **24** (2008), no. 5-6, 632–647.

[Fol75] G. B. Folland, *Spherical harmonic expansion of the Poisson-Szegő kernel for the ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975), 401–408.

[FS98] G. E. Fasshauer and L. L. Schumaker, *Scattered data fitting on the sphere*, Mathematical methods for curves and surfaces, II (Lillehammer, 1997), Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998, pp. 117–166.

[GF76] H. Grauert and K. Fritzsche, *Several complex variables*, Springer-Verlag, New York, 1976, Translated from the German, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 38.

[GGK00] I. Gohberg, S. Goldberg, and N. Krupnik, *Traces and determinants of linear operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 116, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[GK69] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[Gne99] T. Gneiting, *On the derivatives of radial positive definite functions*, J. Math. Anal. Appl. **236** (1999), no. 1, 86–93.

[Gne12] T. Gneiting, *Strictly and non-strictlly positive definite functions on spheres*, arXiv:1111.7077v4 (2012).

[Gro96] H. Groemer, *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 61, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[HJ90] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, Corrected reprint of the 1985 original.

[Hof75] K. Hoffman, *Analysis in Euclidean space*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[JM14] T. Jordão and V. A. Menegatto, *Weighted Fourier–Laplace transforms in reproducing kernel Hilbert spaces on the sphere*, J. Math. Anal. Appl. **411** (2014), no. 2, 732–741.

[Joh82] F. John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Kad67] T. T. Kadota, *Term-by-term differentiability of Mercer's expansion*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 69–72.

[Koo72a] T. H. Koornwinder, *The addition formula for jacobi polynomials ii. the laplace type integral representation and the product formula*, Math. Centrum Amsterdam, 1972, Report TW133.

[Koo72b] T. H. Koornwinder, *The addition formula for jacobi polynomials iii. completion of the proof*, Math. Centrum Amsterdam, 1972, Report TW135.

[KP02] S. G. Krantz and H. R. Parks, *A primer of real analytic functions*, second ed., Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[Kra01] S. G. Krantz, *Function theory of several complex variables*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001, Reprint of the 1992 edition.

[Kre89] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.

[Küh87] T. Kühn, *Eigenvalues of integral operators with smooth positive definite kernels*, Arch. Math. (Basel) **49** (1987), no. 6, 525–534.

[Kus00] A. Kushpel, *Optimal approximation on* $\mathbf{S}^d$, J. Complexity **16** (2000), no. 2, 424–458.

[LS05] F. Lu and H. Sun, *Positive definite dot product kernels in learning theory*, Adv. Comput. Math. **22** (2005), no. 2, 181–198.

[Men95] V. A. Menegatto, *Strictly positive definite kernels on the circle*, Rocky Mountain J. Math. **25** (1995), no. 3, 1149–1163.

[Men97] V. A. Menegatto, *Interpolation on the complex Hilbert sphere using positive definite and conditionally negative definite kernels*, Acta Math. Hungar. **75** (1997), no. 3, 215–225.

[Men99] V. A. Menegatto, *Strict positive definiteness on spheres*, Analysis (Munich) **19** (1999), no. 3, 217–233.

[Men14] V. A. Menegatto, *Differentiability of bizonal positive definite kernels on complex spheres*, J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), no. 1, 189–199.

[Mer09] J. Mercer, *Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser., **A 209** (1909), 415–446.

[Mic86] C. A. Micchelli, *Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions*, Constr. Approx. **2** (1986), no. 1, 11–22.

[MNY06] H. Q. Minh, P. Niyogi, and Y. Yao, *Mercer's theorem, feature maps, and smoothing*, Learning theory, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4005, Springer, Berlin, 2006, pp. 154–168.

[MOP06a] V. A. Menegatto, C. P. Oliveira, and A. P. Peron, *Conditionally positive definite dot product kernels*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006), no. 1, 223–241.

[MOP06b] V. A. Menegatto, C. P. Oliveira, and A. P. Peron, *Strictly positive definite kernels on subsets of the complex plane*, Comput. Math. Appl. **51** (2006), no. 8, 1233–1250.

[MOP09] V. A. Menegatto, C. P. Oliveira, and A. P. Peron, *Differentiable positive definite kernels on spheres*, J. Appl. Anal. **15** (2009), no. 1, 101–117.

[MP01a] V. A. Menegatto and A. P. Peron, *A complex approach to strict positive definiteness on spheres*, Integral Transform. Spec. Funct. **11** (2001), no. 4, 377–396.

[MP01b] V. A. Menegatto and A. P. Peron, *Positive definite kernels on complex spheres*, J. Math. Anal. Appl. **254** (2001), no. 1, 219–232.

[MP02] V. A. Menegatto and A. P. Peron, *Strict positive definiteness on spheres via disk polynomials*, Int. J. Math. Math. Sci. **31** (2002), no. 12, 715–724.

[MPO11] V. A. Menegatto, A. P. Peron, and C. P. Oliveira, *On the construction of uniformly convergent disk polynomial expansions*, Collect. Math. **62** (2011), no. 2, 151–159.

[MPP13] E. Massa, A. P. Peron, and A. C. Piantella, *Positive definite functions: diferenciability and analyticity*, submitted to publication (2013).

[Mül98] C. Müller, *Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces*, Applied Mathematical Sciences, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Mus08] O. R. Musin, *Multivariate positive definite functions on spheres*, arXiv:math/0701083v2 (2008).

[Mus10] O. R. Musin, *Positive definite functions in distance geometry*, European Congress of Mathematics, Eur. Math. Soc., Zürich, 2010, pp. 115–134.

[Nar98] F. J. Narcowich, *Recent developments in approximation via positive definite functions*, Approximation theory IX, Vol. 2 (Nashville, TN, 1998), Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1998, pp. 221–242.

[Nis01] T. Nishino, *Function theory in several complex variables*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 193, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated from the 1996 Japanese original by Norman Levenberg and Hiroshi Yamaguchi.

[Ohs02] T. Ohsawa, *Analysis of several complex variables*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 211, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, Translated from the Japanese by Shu Gilbert Nakamura, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[Per00] A. P. Peron, *Funções positivas definidas para interpolação em esferas complexas*, Tese, 2000, ICMC, Universidade de São Paulo.

[Pin04a] A. Pinkus, *Strictly Hermitian positive definite functions*, J. Anal. Math. **94** (2004), 293–318.

[Pin04b] A. Pinkus, *Strictly positive definite functions on a real inner product space*, Adv. Comput. Math. **20** (2004), no. 4, 263–271.

[PP08] O. Ponomarenko and Y. Perun, *Multivariate random fields on some homogeneous spaces*, Theory Stoch. Process. **14** (2008), no. 3-4, 104–113.

[Rei99] M. Reimer, *Spherical polynomial approximations: a survey*, Advances in multivariate approximation (Witten-Bommerholz, 1998), Math. Res., vol. 107, Wiley-VCH, Berlin, 1999, pp. 231–252.

[Rei00] M. Reimer, *Hyperinterpolation on the sphere at the minimal projection order*, J. Approx. Theory **104** (2000), no. 2, 272–286.

[RS80] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I*, second ed., Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980, Functional analysis.

[RS96] A. Ron and X. Sun, *Strictly positive definite functions on spheres in Euclidean spaces*, Math. Comp. **65** (1996), no. 216, 1513–1530.

[Rud76] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[Sch38] I. J. Schoenberg, *Metric spaces and completely monotone functions*, Ann. of Math. (2) **39** (1938), no. 4, 811–841.

[Sch42] I. J. Schoenberg, *Positive definite functions on spheres*, Duke Math. J. **9** (1942), 96–108.

[Sch97] M. Schreiner, *On a new condition for strictly positive definite functions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 2, 531–539.

[Sch00] R. Schaback, *A unified theory of radial basis functions. Native Hilbert spaces for radial basis functions. II*, J. Comput. Appl. Math. **121** (2000), no. 1-2, 165–177, Numerical analysis in the 20th century, Vol. I, Approximation theory.

[Sha92] B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, Functions of several variables, Translated from the third (1985) Russian edition by J. S. Joel.

[Ste72] E. M. Stein, *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972, Mathematical Notes, No. 11.

[Ste76] J. Stewart, *Positive definite functions and generalizations, an historical survey*, Rocky Mountain J. Math. **6** (1976), no. 3, 409–434.

[SV00] S. G. Samko and B. G. Vakulov, *On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere*, Fract. Calc. Appl. Anal. **3** (2000), no. 4, 401–433.

[Sze59] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 23. Revised ed, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1959.

[Wen05] H. Wendland, *Scattered data approximation*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, vol. 17, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[WG89] Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special functions*, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989, Translated from the Chinese by Guo and X. J. Xia.

[Wün05] A. Wünsche, *Generalized Zernike or disc polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **174** (2005), no. 1, 135–163.

[Zho08] Ding-Xuan Zhou, *Derivative reproducing properties for kernel methods in learning theory*, J. Comput. Appl. Math. **220** (2008), no. 1-2, 456–463.

[Zie13] J. Ziegel, *Convolution roots and differentiability of isotropic positive definite functions on spheres*, Proceedings of the American Mathematical Society, in press (2013).