

Lista de Exercícios - Cálculo 1 - SMA0354

Questão 1 Determine o domínio e faça um esboço:

a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$

b) $f(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2 + z^2)^{-1/2}$

Questão 2 Faça o mapa de contorno de:

a) $f(x, y) = \sqrt{y + x}$

b) $f(x, y) = (100 - 25x^2 - 4y^2)^{1/2}$

Questão 3 Calcule (se existir):

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3 x - y^3}{x^2 + y^6 - 2x + 1}$

Questão 4 Determine conjunto dos pontos nos quais a função $f(x, y) = x \sin(x) + y$ é diferenciável.

Questão 5 Sejam $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 (todas derivadas parciais até segunda ordem contínuas) em \mathbb{R}^2 e $g(u, v) = f(2u + v, u - 2v)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Questão 6 Seja $g(x, y) = x - y^2$, determine $\nabla g(3, -1)$. Encontre a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 2$ no ponto $(3, -1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

Questão 7 Considere uma placa delgada de metal situada no primeiro quadrante do plano xy . Suponha que a temperatura em cada ponto (x, y) da placa é dada pela função $T(x, y) = xy$.

a) Uma formiga inicialmente no ponto $(1, 4)$, anda sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é essa trajetória (dê a equação e faça um esboço), e qual é a temperatura correspondente??

b) Qual a direção e sentido que a formiga deverá tomar caso deseje caminhar, saindo da sua posição inicial, para a direção de maior aquecimento?

c) Qual a taxa de aquecimento na direção do item b)?

Questão 8 Determine os pontos do elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $3x - y + 3z = 1$.

Questão 9 Resolva de duas formas diferentes: PRIMEIRO utilizando curvas de nível, DEPOIS utilizando multiplicadores de Lagrange:

Determine o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máximo.

Questão 10 Considere $f(x, y) = e^{x+5y}$ em $D = \{(x, y) : x + 5y < 1\}$.

a) Calcule $P_2^{0,0}(0.001, 0.001)$.

b) Use a calculadora para obter o valor de $f(0.001, 0.001)$.

c) Encontre uma estimativa para $|f(x, y) - P_2^{0,0}(x, y)|$, quando $(x, y) \in D$.

d) Avalie o erro cometido na aproximação $f(0.001, 0.001) \cong P_2^{0,0}(0.001, 0.001)$.

e) Interprete seu resultado do item d) com os dos itens a) e b).

$$P_2^{0,0} = \text{polinômio de Taylor de } f \text{ de ordem 2 em torno de } (0, 0).$$