Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #8

1. Combinando as séries de potências para $\ln(1+x)$ e $\ln(1-x)$ (assumindo-se que isso seja válido) verifique que
$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad |x| < 1.$$
Use esta fórmula para computar $\ln 2$ com 3 casas decimais exatas.

2. Encontre uma expansão em séries de potências para $\int_0^x e^{-t^2}dt$ e determine seu intervalo de convergência.

3. Use séries de potências para encontrar o valor de $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ e de $\int_0^{1/2}(1+x^5)^{-1}dx$ com três casas exatas.

4. Encontre uma série de potências para $\operatorname{arctg} x$.

5. Use séries de potências para calcular $F^{(6)}(0)$, onde $F(x) = e^{-x^2}$.

6. Se $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k x^k/k!$, onde b é uma constante, verifique que $f'(x) = bf(x)$ para todo x no domínio de f.

7. Uma função f satisfaz a equação diferencial $f'(x) = bf(x)$ onde b é uma constante sujeita á condição $f(0) = 1$. Encontre uma série de potências para f e identifique a função f.

8. Se f e g são dadas pelas fórmulas
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
verifique que $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$ e $f''(x) = f(x)$.

9. Se uma função par tem uma série de potências na forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ então $a_k = 0$ para todo k ímpar. Ratifique isso. Estabeleça resultado similar para uma função ímpar.

10. Uma função f é uma série de potências na forma $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, com $|x| < R$, onde $R > 0$. Sabendo-se que $f''(x) + f(x) = 0$, $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$, determine os coeficientes a_k e o domínio de f.

11. Encontre uma representação em série de potências para a função $f(x) = (1-x)^{-3}$ e verifique que a série coincide com a função no intervalo $(-1, 1)$.

12. Use séries de potências para calcular a integral $\int_0^1 (1-e^{-t})t^{-1}dt$ com três casas decimais exatas. Dica: não quebre a integral!

13. Calcule a soma da série
$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$
onde $|x| < 1$, da seguinte maneira: calcule $F'(x)$ usando uma série de potências para $\ln(1+t)$.