Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #6

1. Encontre a soma das séries abaixo com 3 casas de precisão.

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^6}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{2(n-1)}}+\cdots \qquad 1-\frac{1}{2(1!)^2}+\frac{1}{2^2(2!)^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}[(n-1)!]^2}+\cdots$$

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{[2(n-1)]!}+\cdots \qquad 1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{15^2}-\frac{1}{35^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{[4(n-1)^2-1]^2}+\cdots$$

2. Nos itens abaixo verifique se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+3k+4} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{\sqrt{k^2+100}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}(k+7)} \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} k}{k(k-1)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k(k+1)(k+2)}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{k^4+1} \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k \ln k}{k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3.5.7.\cdots(2k+1)}{2.4.6\cdots(2k)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(3k\pi)}{k} \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\ln\sqrt[k]{k}}{k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\operatorname{sen}(k)^{-1}}{k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1.3.5\cdots(2k-1)}{3.6.9\cdots(3k)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1.4.7\cdots(3k-2)}{(3k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k(k+1)(\ln 2)^k \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(1-\frac{1}{3k}\right)^k$$

3. Nós sabemos que a série alternada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}$ é condicionalmente convergente. Verifique que as séries formadas pelos termos positivos e pelos termos negativos desta série são divergentes. Agora tente verificar que este procedimento ainda vale para qualquer série condicionalmente convergente.

4. Use o resultado do exercício anterior para verificar que os termos de uma série condicionalmente divergente podem ser rearranjados de modo que a série resultante converge para qualquer número previamente fixado.

5. Se
$$A = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$
então
$$\frac{A}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$$
Logo,
$$A+\frac{A}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$
No entanto, o lado direito da expressão acima é um re-arranjamento da série original, ou seja, $A+A/2=A$, isto é, $A=0$. Por outro lado,
$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots$$
ou seja, $A>0$. Onde está o equívoco na argumentação acima?