Lista 6 - SMA5717 Análise Funcional - 2^o semestre 2013

1. Seja H um espaço de Banach real com norma $|\cdot|$ satisfazendo a lei do paralelogramo. Então H é um espaço de Hilbert com produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que $\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ coincide com a norma dada em H.
Sugestão: Defina $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}[|x+y|^2 - |x-y|^2]$.

2. Verifique que a norma do sup no espaço das funções contínuas $C([a,b],,\mathbb{R}$ não provém de um produto interno.

3. Seja H um espaço com produto interno. Se $u\perp v$ então $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

4. Sejam H um espaço com produto interno e M um subespaço vetorial de H. Prove que $y \in M^\perp$ se, e somente se $||y-x|| \geq ||y||$, para todo $x \in M$.

5. Seja Ω um espaço mensurável tal que existe um subconjunto mensurável $A \subset \Omega$ com $0 < |A| < |\Omega|$. Mostre que $L^p(\Omega)$ não é um espaço de Hilbert para $p \neq 2$. Mostre que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

6. Seja $\{e_n\}$ uma base Hilbertiana de H. Então, para todo $u \in H$, temos
$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k\rangle e_k, \qquad \text{e} \quad ||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, e_k\rangle|^2.$$
Reciprocamente, dada qualquer sequência $\{\alpha_n\}$ em l_2, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k, e_k$ converge a algum elemento $u \in H$ tal que $\langle u, e_k\rangle = \alpha_k$, para todo k, e $||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$.

7. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Mostre que H é isometricamente isomorfo a ℓ_2.

8. Seja H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um subconjunto convexo e fechado. Seja $f \in H$ e $u = P_K f$. Mostre que
$$\|v-u\|^2 \leq \|v-f\|^2 - \|u-f\|^2, \quad \forall\, v \in K.$$
Deduza que $\|v-u\| \leq \|v-f\|$, para todo $v \in K$. Interprete geometricamente.

9. Seja X um e.v.n.. Defina
$$Tu = \begin{cases} u, & \text{se} \quad \|u\| \leq 1; \\ u/\|u\|, & \text{se} \quad \|u\| > 1. \end{cases}$$
Prove que $\|Tu - Tv\| \leq 2\|u-v\|$ para todos $u, v \in X$. Mostre que em geral a constante 2 não pode ser melhorada. O que pode ser dito se X é um espaço de Hilbert?

10. Seja H um espaço de Hilbert. Considere $K \subset H$ um cone convexo com vértice 0, isto é, $0 \in K$ e
$$\lambda u + \mu v \in K, \quad \forall\, \lambda, \mu > 0, \quad \forall\, u, v \in K.$$
Assuma K fechado. Dado $f \in H$, mostre que $u = P_K f$ é caracterizado pela propriedade:
$$u \in K, \quad \langle f-u, v\rangle \leq 0, \,\forall\, v \in K, \;\; \text{e} \;\; \langle f-u, u\rangle = 0.$$

11. Sejam X e Y espaços de Banach reais. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tem *posto finito* quando $\dim T(X) < \infty$. Prove que:

    a) Todo operador contínuo de imagem finita é compacto.

    b) Seja $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ uma sequência de operadores de imagem finita e seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se $||T_n - T||_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$, então $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

12. Sejam X, Y e Z espaços de Banach reais. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{K}(Y, Z)$ (resp. $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$], então $S \circ T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

13. Sejam X e Y espaços de Banach reais. Prove que $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ se, e somente se, $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$.

14. Sejam H espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H, H)$ um operador auto-adjunto e

$$m = \inf_{||u||=1} \langle Tu, u \rangle; \qquad M = \sup_{||u||=1} \langle Tu, u \rangle.$$

    Prove que:

    a) $||T|| = \sup_{||u||=1} |\langle Tu, u \rangle|$.

    b) $||T|| = \max\{|m|, |M|\}$.