Lista 5 - SMA5717 Análise Funcional - 2^o semestre 2013

1. Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^p(X)$. Se $f \in L^p(X)$ é tal que $||f_n - f||_p \to 0$, então existem uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ e uma função $h \in L^p(X)$ tais que

   a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.s. em X

   b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k, q.s. em X.

2. **Desigualdade de Hölder para** $0 < p < 1$:
   Sejam $0 < p < 1$ e $q = \dfrac{p}{p-1} < 0$. Se $f \in L^p(X)$ e
   $$0 < \int_X |g(x)|^q dx < \infty,$$
   então
   $$\int_X |f(x)g(x)|dx \geq \left\{\int_X |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_X |g(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

3. **Desigualdade de Minkowski para** $0 < p < 1$:
   Se $0 < p < 1$ e $f, g \in L^p(X)$, então
   $$\| \, |f| + |g| \, \|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $1 < p \leq 2$ e q é seu expoente conjugado, então
   $$\left|\frac{a+b}{2}\right|^q + \left|\frac{a-b}{2}\right|^q \leq \left(\frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}\,|b|^p\right)^{q-1}.$$

5. **Desigualdade de Clarkson para** $1 < p \leq 2$:
   Sejam $1 < p \leq 2$ e q seu expoente conjugado. Se $f, g \in L^p(X)$, então
   $$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\,\|g\|_p^p\right)^{q-1}.$$

6. Prove que o espaço L^p é uniformemente convexo para $1 < p \leq 2$.

7. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : X \to \mathbb{R}^n$. Prove que:

   a) Se $f \in L^1(X)$, $\mu(X) < \infty$ e
   $$\int_X f u \, d\mu = 0, \quad u \in C_c(X), \tag{$*$}$$
   então $f = 0$ q.s. em X.

   b) Se $f\chi_K \in L^1(X)$, para todo compacto $K \subset X$ (ou seja, $f \in L^1_{loc}(X)$) e f satisfaz $(*)$, então $f = 0$ q.s. em X.

8. Prove que $L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, é separável para qualquer conjunto mensurável $X \subset \mathbb{R}^n$.

9. Seja (X, M, μ) um espaço de medida tal que $\mu(X) < \infty$. Prove que se $p_0 \leq p_1$, então $L^{p_1}(X) \subset L^{p_0}(X)$. Ainda mais,
   $$||f||_{p_0} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} ||f||_{p_1}.$$

10. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Identifique os resultados que justificam as afirmações:

    a) A bola $B_{L^\infty(X)}[0,1]$ é compacta na topologia fraca* $\sigma(L^\infty(X), L^1(X))$.

    b) Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(X)$, então existe subsequência que converge em $L^\infty(X)$ na topologia fraca* $\sigma(L^\infty(X), L^1(X))$.

11. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Mostre que $L^1(X) \subsetneq (L^\infty(X))^*$.
    Sugestão: Suponha $0 \in X$ e defina $h_0(f) = f(0)$, para $f \in C_c(X)$. Use o Teorema de Hahn-Banach para encontrar uma extensão linear contínua $h : L^\infty(X) \to \mathbb{R}$ de h_0. Prove que não existe $g \in L^1(X)$ tal que $h(f) = \int fg$, $f \in L^\infty(X)$ (suponha que exista e aplique o exercício 7).

12. Sejam (X, M, μ) um espaço de medida σ-finito e $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Prove que

    a) Se $f \in L^p(X)$, então

$$||f||_p = \max_{||g||_q=1} \left| \int fgd\mu \right| = \max_{||g||_q=1} \int |fg|d\mu.$$

Sugestão: Considere $g = f|f|^{p-2}||f||_p^{-p/q}$, se $f \neq 0$ e $g = 0$ se $f = 0$.

    b) Se $f \notin L^p(X)$, então

$$\sup_{||g||_q=1} \int |fg|d\mu = \infty.$$

Sugestão: Considere $f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq n, x \in X_n, \\ n, & |f(x)| > n, x \in X_n, \\ 0, & x \notin X_n \end{cases}$ onde $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n$ onde $X_n \subset X_{n+1}$ e $\mu(X_n) < \infty$.

13. Proposição 4.19 e Corolário 4.23, Brezis - Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations