Lista 4 - SMA5717 Análise Funcional - 2^o semestre 2013

Considere X e.v.n. sobre $\mathbb{K}$, exceto se dito o contrário.

1. X tem dimendão finita se, e somente se, $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**}) = \tau_{X^*}$.

2. Prove que se X é reflexivo, então X é Banach.

3. Sejam X e Y e.v.n. isometricamente isomorfos. Prove que se Y é reflexivo, então X é reflexivo.

4. Mostre que todo e.v.n. X de dimensão finita é reflexivo.

5. Se X é reflexivo, então cada subespaço fechado de X também é reflexivo. (caso real feito em aula)

6. X é reflexivo se, e somente se, X^* é reflexivo. (falta a recíproca para o caso complexo: use exercício anterior)

7. Para cada inteiro n positivo, considere $e^n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$: 1 na n-ésima entrada e 0 nas demais.

   a) Prove que $e^n \rightharpoonup 0$ em l_p na topologia fraca $\sigma(l_p, l_{p'})$ $(1 < p \leq \infty)$.

   b) Prove que não existe sequência $\{e^{n_k}\}$ que converge em l_1 com relação a topologia fraca $\sigma(l_1, l_\infty)$.

   c) Construa um exemplo de um espaço de Banach X e uma sequência $\{f_n\}$ em X^* tal que $\|f_n\| = 1$ para todo n e tal que $\{f_n\}$ não possui subsequência que converge em $\sigma(X, X^*)$.

8. Se (X_1, d_1), (X_2, d_2) são espaços métricos separáveis, então $X_1 \times X_2$ com qualquer uma das métricas
$$d_s((x_1, x_2), (\overline{x}_1, \overline{x}_2)) = d_1(x_1, \overline{x}_1) + d_2(x_2, \overline{x}_2),$$
$$d_m((x_1, x_2), (\overline{x}_1, \overline{x}_2)) = \max\{d_1(x_1, \overline{x}_1), d_2(x_2, \overline{x}_2)\}$$
$$d_p((x_1, x_2), (\overline{x}_1, \overline{x}_2)) = \left((d_1(x_1, \overline{x}_1))^p + (d_2(x_2, \overline{x}_2))^p\right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty$$
é separável.

9. Seja H um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que H é uniformemente convexo. Conclua que se $(H, \| \cdot \|)$ é um e.v. real completo (isto é, H é Hilbert), então H é reflexivo.
Dica: Prove que vale a identidade do paralelogramo:
$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2, \quad \forall u, v \in H,$$
onde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

10. Seja X um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ uniformemente convexo. Se $\{x_n\}$ é uma sequência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ e $\limsup ||x_n|| \leq ||x||$, então, $x_n \to x$.