**Lista 3 - SMA5717 Análise Funcional - $2^o$ semestre 2013**

1. Sejam $X$ e $Y$ e.v.n. e $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear bijetor. Se $T$ é fechado, então $T^{-1}$ é fechado.

2. Sejam $X$ e $Y$ e.v.n. e $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear fechado. Considere duas sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ em $D(T)$ convergindo para o mesmo limite $x$. Se $\{Tx_n\}$ e $\{Ty_n\}$ são convergente, então ambas convergem para o mesmo limite.

3. Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear bijetor. Se $T$ é limitado, então $T^{-1}$ é fechado e contínuo.

4. Sejam $X$ e $Y$ e.v.n. e $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear. Se $T$ é fechado, então seu núcleo $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$ é subespaço fechado de $X$.

5. (**Extensão fechada**) Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear com gráfico $G(T)$. Mostre que $T$ tem uma extensão $\widetilde{T}$ a qual é um operador linear fechado com gráfico $\overline{G(T)}$ se, e somente se, $\overline{G(T)}$ não contém um elemento da forma $(0, y)$ com $y \neq 0$.

6. Seja $X = l^1$, de modo que $X^* = l^\infty$. Considere o operador linear $T : D(T) \subset X \to X$ definido por

$$D(T) = \{x = \{x_n\} \in X : \{nx_n\} \in X\}, \qquad Tx = \{nx_n\}.$$

   a) Prove que $T$ é densamente definido e fechado.

   b) Determine $D(T^*)$, $T^*$ e $\overline{D(T^*)}$.

7. Sejam $X$ e $Y$ e.v.n. e $T : D(T) \subset X \to Y$ operador linear densamente definido. Considere os subespaços $G = G(A)$ e $W = X \times \{0\}$ de $X \times Y$ e $\mathrm{Im}(T) := \{Tx \in Y : x \in D(T)\}$. Verifique que:

   a) $G \cap W = N(T) \times \{0\}$.

   b) $G + W = X \times \mathrm{Im}(T)$

   c) $G^\perp \cap W^\perp = \{0\} \times N(T^*)$

   d) $G^\perp + W^\perp = \mathrm{Im}(T^*) \times Y^*$

8. Seja $X$ um e.v.n. real. Use a segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach para mostrar que $(X, \sigma(X, X^*))$ é um espaço de Hausdorff.

9. Sejam $X$ um e.v. sobre $\mathbb{K}$ e $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi : X \to \mathbb{K}$ operadores lineares. Então,

$$\bigcap_{j=1}^{n} \phi_j^{-1}(0) \subset \phi^{-1}(0), \quad (i.e.,\ \phi_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \phi(x) = 0)$$

   se, e somente se, $\phi$ é combinação linear de $\phi_1, \ldots, \phi_n$: existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \phi_i$.

10. Sejam $X$ um e.v. sobre $\mathbb{K}$ e $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi : X \to \mathbb{K}$ operadores lineares linearmente independentes. Então,

   a) existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \ldots, n$;

   b) $X = [x_1, \ldots, x_n] \bigoplus \bigcap_{j=1}^{n} \phi_j^{-1}(0)$ algebricamente.

11. Sejam $X$ um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $\tau_X$ a topologia induzida pela norma. Então, $\sigma(X, X^*) = \tau_X$ se, e somente se, $X$ tem dimensão finita. **Dica:** use o exercício anterior.

12. Seja $X$ um conjunto não vazio e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologias em $X$. Mostre que se $\mathcal{T}_2$ é mais fina que $\mathcal{T}_1$, então todo compacto de $(X, \mathcal{T}_2)$ é um compacto de $(X, \mathcal{T}_1)$.

13. Sejam $X$ um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ e $H$ um hiperplano em $X^*$. Se $H$ é fechado na topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$, então $H$ é da forma

$$H = \{f \in X^* : f(x) = \alpha\},$$

para algum $0 \neq x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

14. Seja $X$ um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. A topologia fraca* $\sigma(X^*, X)$ é a topologia em $X^*$ induzida pela topologia produto em $\mathbb{K}^X$.

15. Sejam $X$ um e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. Considere a topologia fraca* em $X^*$. Então, um subconjunto de $X^*$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

16. Prove o Teorema de Banach-Alaoglu usando o exercício anterior.

17. Se $E$ tem dimensão infinita, então toda vizinhança de $\varphi_0 \in E*$ para a topologia $\sigma(E^*, E)$ contém uma reta que passa por $\varphi_0$.

18. Seja $X$ um espaço de Banach e seja $K \subset X$ um subconjunto compacto na topologia forte. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em $K$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Mostre que $x_n \to x$.

    **Dica:** argumente por contradição

19. Seja $X$ um espaço de Banach. Seja $\{\varphi_n\} \subset X^*$ tal que para cada $x \in X$, $\{\varphi_n(x)\}$ é convergente. Mostre que existe $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

20. Suponha $X$ reflexivo (i.e., a aplicação canônica $J : X \to X^{**}$ é sobrejetora). Seja $\{x_n\}$ uma sequência em $X$ tal que para todo $\varphi \in X^*$, $\{\varphi(x_n)\}$ é convergente. Mostre que existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$.

21. Mostre que se $X$ não for reflexivo, então a conclusão do exercício anterior pode ser falsa.