Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #2

1. Indique quais das sequências $\{a_n\}$ abaixo convergem. Quando convergentes, calcule o limite.

$$\frac{8}{n} \qquad \frac{1}{2n+1} \qquad \frac{(-1)^n}{3} \qquad \frac{n+51}{n}$$

$$\frac{n+2}{n^2} \qquad \frac{n+1}{10\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{\pi}\cos n\pi \qquad \frac{\sqrt{n}}{n+10}$$

$$\frac{n^4+n^3-10}{2n^4+n^2-1} \qquad \ln\frac{2n+1}{n} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\left(\frac{2n+7}{n}\right)\right) \qquad \frac{3n^2+7n+10}{n+100}$$

$$\frac{n^3-4n^5}{7n^5+1} \qquad \frac{n}{(\sqrt{3n}+4)^2} \qquad \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) \qquad \frac{2^n}{3^n+4}$$

$$0,66...6 \quad (n \text{ dígitos } 6) \qquad \frac{3^n-2^n}{4^n} \qquad \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+5} \qquad n^2-(-1)^n 3n$$

2. Use algum teorema visto em classe para comprovar que as sequências abaixo são convergentes (por favor, não tente calcular o limite).

$$a_n = \frac{2.4.6.\ldots(2n-2)(2n)}{3.5.7.\ldots(2n-1)(2n+1)} \qquad\qquad b_n = 51 - \frac{2^n}{n!}$$

3. Seja $\{a_n\}$ uma sequência com as seguintes características: a_1 é um número arbitrário e $a_n = ka_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, onde k é uma constante não dependendo de n. Encontre explicitamente a_2, a_3 e a_4. Agora encontre uma fórmula para a_n e verifique que $\{a_n\}$ converge para 0 quando $|k| < 1$.

4. Uma sequência $\{a_n\}$ de números positivos é determinada pela propriedade seguinte: $a_{n+1} = 2^{-1}(a_n + k/a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, onde k é uma constante positiva. Comprove que se esta sequência tem limite então ele vale $\sqrt{k}$. Se $a_1 = 2$ e $k = 5$, encontre a_2 e a_3 com precisão de 4 casas decimais.

5. Seja s_n o comprimento do lado de um polígono regular de 2^n lados, inscrito em um círculo de raio 1. Verifique que

$$s_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Começando com o lado de um quadrado ($s_2 = \sqrt{2}$), escreva fórmulas para s_3 e s_4. A sequência $\{2^n s_n\}$ converge?

6. Encontre $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}a_n^{-1}$ onde $a_n = n!n^{-n}$. O que isto implica a respeito do limite da sequência $\{a_n\}$?

7. Encontre o limite de cada uma das sequências abaixo:

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \qquad b_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{(1+n)(2+n)} \qquad c_n = \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{2n^4+n-1}$$