2a. Lista de Exercícios SMA 0354 - Cálculo II - Curso Coordenado
atualizada em 22/10/2019

Curvas Parametrizadas: reta tangente, reta normal, limite, comprimento de arco.

Exercício 1 *Faça um esboço do traço da curva parametrizada plana $f(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são dadas a seguir, determinando primeiro uma relação entre x e y por eliminação da variável t. Por exemplo, Para $x(t) = t^2, y(t) = t - 3$ tem-se $x = (y + 3)^2$. Inclua a orientação do traço em seu esboço.*
(*a*) $x(t) = t - 2$, $y(t) = 2t + 3$
(*b*) $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - 1$
(*c*) $x(t) = 4t^2 - 5$, $y(t) = 2t + 3$
(*d*) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-2t}$
(*e*) $x(t) = t^2$, $y(t) = 2\ln t$
(*f*) $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \mathrm{sen} 2t$

Exercício 2 *Faça o esboço do traço de cada curva parametrizada abaixo indicando a sua orientação:*
(*a*) $t \mapsto (\mathrm{sen} t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(*b*) $t \mapsto (\mathrm{sen} 2t, \cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(*c*) $t \mapsto (5\cos t, 2\,\mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(*d*) $t \mapsto (t, t^3)$, $t \in [-3, 3]$.
(*e*) $t \mapsto (t^4, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.
(*f*) $t \mapsto (\cos t, \mathrm{sen} t, 1)$, $t \in [0, \pi/2]$.
(*g*) $t \mapsto (\cos t, \mathrm{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(*h*) $t \mapsto (\cos t, \mathrm{sen} t, \cos t)$, $t \in [0, 4\pi]$.
(*i*) $t \mapsto (2 - t, 3 + t, t)$, $t \in [0, 1]$.
(*j*) $t \mapsto (\cos 2t \cos t, \cos 2t\, \mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(*k*) $t \mapsto ((2 + 2\,\mathrm{sen} t)\cos t, (2 + 2\,\mathrm{sen} t)\,\mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(*l*) $t \mapsto ((2 + 2\cos t)\cos t, (2 + 2\cos t)\,\mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(*m*) $t \mapsto ((2 + 4\cos t)\cos t, (2 + 4\cos t)\,\mathrm{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exercício 3 *Para cada item abaixo, encontre pelo menos duas funções a valores vetoriais $r(t) = (x(t), y(t))$ e $s(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ distintas satisfazendo a equação dada. (Conclui-se, assim, que uma parametrização de uma curva nunca é única.)*
(*a*) $y = x^2 - 5$
(*b*) $y = \sqrt{x}$
(*c*) $x^2 + y^2/4 = 1$
(*d*) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$

Exercício 4 *Em cada item abaixo tem-se curvas contidas em quádricas. Determine uma parametrização para estas curvas:*

(*a*) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ (*b*) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \\ z = y \end{cases}$ (*c*) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 1 \\ 9y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

Exercício 5 *Verifique se existe* $\lim\limits_{t \to t_0} F(t)$ *para:*

(*a*) $F(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \dfrac{t - 1}{t}\right)$, $t_0 = 1$.

(*b*) $F(t) = \left(\dfrac{\mathrm{tg}\ 3t}{t}, \dfrac{e^{2t} - 1}{t}, t^3\right)$, $t_0 = 0$.

(*c*) $F(t) = \left(\dfrac{t^3 - 8}{t^2 - 4}, \dfrac{\cos(\pi/t)}{t - 2}, 2t\right)$, $t_0 = 2$.

(*d*) $F(t) = \left(\dfrac{t}{|t|}, t^4\right)$, $t_0 = 0$.

Exercício 6 *Verifique se a curva parametrizada $r(t)$ é regular no ponto $r(t_0)$. Se for, determine a equação da reta tangente a tal curva no ponto $r(t_0)$. Faça também um esboço:*

(a) $r(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, $t_0 = 0$.

(b) $r(t) = (1 - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t_0 = \pi$.

(c) $r(t) = (t^2, t^2, t^4)$, $t_0 = 0$.

(d) $r(t) = ((2 + 2\cos t)\cos t, (2 + 2\cos t)\operatorname{sen} t)$, $t_0 = \pi$.

Exercício 7 *Determine se as curvas parametrizadas dadas têm reta normal no ponto $r(t_0)$ para t_0 dado abaixo. Se sim, determine-as.*

(a) $r(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, $t_0 = 0$.

(b) $r(t) = (1 - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t_0 = \pi$.

(c) $r(t) = (t^2, t^4)$, $t_0 = 0$.

Exercício 8 *Considere a curva parametrizada $r(t) = (t^2, 2t^2 + 1, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Verifique se tal curva admite reta tangente paralela ao vetor $v = (1, 2, 3)$. Se sim, em qual(quais) ponto(s) da curva isso ocorre?*

Exercício 9 *Considere a curva parametrizada por $x(t) = a \operatorname{sen}\alpha \ \operatorname{sen} t$, $y(t) = b\cos\alpha \ \operatorname{sen} t$, $z(t) = c\cos t$ para $t \geq 0$, onde a, b, c, α são constantes fixadas não nulas.*
(a) *Mostre que a curva C está contida no elipsóide* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
(b) *Mostre que C também está contido num plano que contém o eixo-z.*
(c) *Faça um esboço da curva. Sugestão: pense primeiramente no caso em que $a = b = c$.*

Exercício 10 *Sejam $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, $x\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, $y\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, $z\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{x}\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{y}\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{z}\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Defina*

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad e \quad \tilde{r}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)), \quad t \in]a, b[.$$

(a) *Escreva as expressões de*
(a1) $f(t)r(t)$, $t \in]a, b[$.
(a2) $r(t) \cdot \tilde{r}(t)$, $t \in]a, b[$, *onde $\cdot$ simboliza produto escalar de vetores.*
(a3) $r(t) \times \tilde{r}(t)$, $t \in]a, b[$, *onde $\times$ simboliza produto vetorial de vetores.*
(b) *Mostre que* $\dfrac{d}{dt}[f(t)r(t)] = f'(t)r(t) + f(t)r'(t)$.
(c) *Mostre que* $\dfrac{d}{dt}[r(t) \cdot \tilde{r}(t)] = r'(t) \cdot \tilde{r}(t) + r(t) \cdot \tilde{r}'(t)$.
(d) *Mostre que* $\dfrac{d}{dt}[r(t) \times \tilde{r}(t)] = r'(t) \times \tilde{r}(t) + r(t) \times \tilde{r}'(t)$.

Exercício 11 *Verifique que se uma curva plana representa o deslocamento de uma partícula e se esta partícula tem vetor velocidade perpendicular ao seu vetor posição, então ela se move sobre uma circunferência centrada na origem.*

Exercício 12 *Seja $r(t) = (f(t), g(t))$ função vetorial duas vezes diferenciável. Se ela fornece a posição de uma partícula no instante t e se para todo t o módulo da velocidade da partícula é constante, conclua que o vetor aceleração da curva é ortogonal ao vetor velocidade para todo t. Lembrando que $r'(t)$ é o vetor velocidade e $r''(t)$ o vetor aceleração.*

Exercício 13 *Suponha que o vetor acelaração de uma partícula seja dado por* $a(t) = (e^t, (t-1)^4)$. *Se no instante* $t = 0$ *a partícula encontrava-se no ponto* $(1,1)$ *com velocidade* $v = (1,2)$ *onde ela estará em* $t = 20$*?*

Exercício 14 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ *curva parametrizada com derivada contínua em* $[a,b]$. *Sendo o comprimento desta curva dado por*

$$\int_a^b ||f'(t)||\ dt,$$

determine o comprimento da curva parametrizada dada em cada um dos itens abaixo:

$(a)\ \begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = 3t^2, 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$ $(b)\ \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t\,\text{sen}t \\ z(t) = t\cos t, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ $(c)\ \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4\,\text{sen}3t \\ z(t) = 4\cos 3t, 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

$(d)\ \begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = 4t \\ z(t) = 3 + 2t^2, 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$

(e) $\gamma(t) = (e^t, e^t\,\text{sen}t, e^t\cos t)$, $0 \leq t \leq 1$

(f) $\gamma(t) = (3t^2, t^3, 6t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Funções de Várias Variáveis

Exercício 15 *Descreva o domínio e a imagem de* f*:*

(a) $f(x,y) = 2x - y^2$ (b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y} - 1}{x + y - 1}$

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{x - z}{x^2 + y^2}$ (e) $f(x,y,z) = \ln(x + y + z + 1)$.

Exercício 16 *Para as funções* f *cujas leis são dadas abaixo, verifique se são limitadas em seu domínio de definição. Caso* f *não seja limitada, verifique por qual sequência de pontos ela cresce (ou decresce) arbitrariamente:*

(a) $f(x,y) = \text{sen}\dfrac{1}{xy}$ (b) $f(x,y) = x/(\sqrt{x^2 + y^2})$ (c) $f(x,y) = \ln(x + y)$

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ (e) $f(x,y,z) = \cos(\dfrac{xyz^9}{\sqrt{x - y}})$ (f) $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + z^4}$

(g) $f(x,y) = \dfrac{x^8}{x^8 + y^8}$ (h) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{x^8 + y^8}$ (i) $f(x,y) = \dfrac{x^5y^3}{x^8 + y^8}$

(j) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^4}$ (k) $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2 + y^4}$ (l) $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2 + y^4}$

(m) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ (n) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$

Curvas de níveis e gráficos

Exercício 17 *Esboce os gráficos das funções abaixo. Reconheça todos os gráficos, exceto um, como superfícies dadas por (ou contidas em) quádricas, identificando-as:*

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$ (b) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 3$ (c) $f(x,y) = 3$

(d) $f(x,y) = -x - 3y + 3$ (e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$

(g) $f(x,y) = x + 2$ (h) $f(x,y) = e^x + 2$

Exercício 18 *Em cada item, esboce no mesmo plano coordenado as curvas de nível* $f(x,y) = c$ *para* $c \in \{-1, 0, 4\}$*:*

(a) $f(x,y) = xy$ (b) $f(x,y) = \ln(xy)$ (c) $f(x,y) = 4 - (x-1)^2 - (y+3)^2$

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2/2}$ (f) $f(x,y) = e^x/(2y)$.

Exercício 19 *Descreva a superfície de nível* $f(x,y,z) = c$ *para* $c \in \{-1, 0, 4\}$*:*
(a) $f(x,y,z) = e^x/(2y)$ *(b)* $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Exercício 20 *Ache a equação do conjunto de nível de* f *que passe pelo ponto* P *dado:*
(a) $f(x,y) = y\arctan x,\ P = (1,4)$ *(b)* $f(x,y,z) = z^2y + x,\ P = (1,4,-2)$
(c) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1+t^2},\ P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Exercício 21 *(a) Encontre alguma função (especificando seu domínio, contradomínio e sua lei), que tenha a reta de equação* $y = 3x - 4$ *como uma curva de nível.*
(b) O mesmo para a curva dada pela equação $y = 3/x^2$*.*

Exercício 22 *Se* $T(x,y)$ *dá a temperatura num ponto* (x,y) *sobre uma placa delgada de metal no plano-*x,y*, então as curvas de nível de* T *são chamadas de curvas isotérmicas (todos os pontos sobre cada uma dessas curvas possuem a mesma temperatura). Suponha que uma placa ocupe o primeiro quadrante e* $T(x,y) = xy$*.*
(a) Esboce as curvas isotérmicas de temperaturas $T = 1$*,* $T = 2$ *e* $T = 3$*.*
(b) Uma formiga, inicialmente no ponto $(1,4)$*, se move sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é essa trajetória, e qual é a temperatura correspondente?*

Exercício 23 *Os pontos de uma chapa plana de metal estão marcados no plano-*x,y *de modo que a temperatura* T *no ponto* (x,y) *é inversamente proporcional à distância do ponto a origem.*
(a) Qual é a lei $T(x,y)$ *que descreve a temperatura da chapa acima?*
(b) Descreva as isotérmicas, isto é, as curvas de nível da função temperatura.
(c) Se a temperatura no ponto $P = (4,3)$ *é de* 40^oC*, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de* 20^oC*.*

Exercício 24 *Duas curvas de nível podem se interceptar? Justifique sua resposta.*

Limite de funções de várias variáveis

Exercício 25 *Use as propriedades de limite para calcular:*
$(a)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$ $(b)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$ $(c)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2-1}$
$(d)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y-z}$ $(e)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,2)} xz - xy - 2xzy$ $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} \left|\frac{x-y}{x+xy+y^2z}\right|$.

Exercício 26 *Verifique se os resultados abaixo são verdadeiros, justificando sua resposta.*
(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = 0$ *(b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^2+y} = 0$ *(c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1} = 2$

Exercício 27 *Verificar se os limites abaixo existem. Justifique sua resposta.*
$(a)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(b)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$ $(c)\ \displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+5y}{x-y^2+z}$
$(d)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}}$ $(e)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(f)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^4}}$
Sugestão: Em (b) esboce o gráfico da função. É fácil!

Exercício 28 *Veja se é possível utilizar o Teorema do Confronto (ou Sanduíche) para o cálculo dos limites abaixo (O exercício anterior será útil). Para os casos em que não é possível utilizar o teorema,* *verifique se o limite não existe.*

$(a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad (b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$(d)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (e)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (f)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

$(g)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2})$ $\quad (h)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,2)} \dfrac{x}{x-y}$ $\quad (i)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^3)}{x^4+y^4}$

$(j)\ \lim\limits_{(x,y,x)\to(1,0,0)} \dfrac{x-1}{(x-1)^2+|y|+|z|}$ $\quad (k)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $\quad (l)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

Continuidade de funções de várias variáveis

Exercício 29 *Descreva os pontos onde f é contínua. Faça também o esboço do domínio $D(f)$:*

$(a)\ f(x,y)=\ln(x+y-1)$ $\quad (b)\ f(x,y)=\sqrt{x}e^{xy}$ $\quad (c)\ f(x,y)=\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2+y^2}$

$(d)\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (e)\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{x+y+z}$ $\quad (f)\ f(x,y,z)=\tan(xyz)$

Exercício 30 *Verifique se cada uma das leis abaixo define uma função contínua em todo o $\mathbb{R}^2$:*

$(a)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad (b)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$(c)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^4}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad (d)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$(e)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$(f)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$(f)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2\operatorname{sen}^2(y)}{x^2+2y^2-2x+1}, & se\ \ (x,y)\neq(1,0)\\ 0, & se\ \ (x,y)=(1,0)\end{cases}$

Derivadas Parciais e Direcionais

Exercício 31 *Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:*

$(a)\ f(x,y)=\dfrac{2x^4-xy+1}{xy}$ $\quad (b)\ f(x,y)=\arctan x/y$ $\quad (c)\ f(x,y)=sen(x^2-y^3)$

$(d)\ f(x,y)=\displaystyle\int_x^y g(t)dt$ $\quad (e)\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^3-z^4}$ $\quad (f)\ f(x,y,z,u,v)=xyzu^2v^4$

Exercício 32 *Calcule* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ *para* $f(x,y)=x^{x^{x^y}}+\operatorname{sen}(\pi x)[x^2+sen(x+y)+e^x cos^2 y]$.
Dica: Deve ser de fácil resolução.

Exercício 33 *Seja $f(x,y)=2x+3y^2$.*
(a) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva que está na intersecção do gráfico de f com o plano $x=2$, no ponto $(2,1,f(2,1))$.
(b) Idem para a curva que está na intersecção do gráfico com o plano $y=-1$, no ponto $(2,3,f(2,3))$.
(c) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,-1,f(2,-1))$.

Exercício 34 *Encontre o vetor gradiente de cada uma das funções:*
(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *(b)* $f(x,y,z) = x \operatorname{arctg}(y+z)$ *(c)* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

Exercício 35 *Considere a função f cuja lei é dada por* $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
(a) Encontre a aproximação linear de $f(x,y,z)$ para (x,y,z) próximo de $(0,3,4)$.
(b) Obtenha o valor aproximado de $\sqrt{(0,01)^2+(3,02)^2+(3.97)^2}$. *Faça a análise sem o uso da calculadora e depois use-a para comparar seu resultado.*

Exercício 36 *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ função diferenciável em toda reta. Seja $u(x,y) = f(x-cy)$ onde c é constante dada. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de u e então mostre que u satisfaz a equação de transporte $u_y + cu_x = 0$.*

Exercício 37 *Seja $z(t) = f(x(t),y(t))$ onde f é diferenciável no plano e $x(t), y(t)$ são deriváveis num intervalo $]a,b[$.*
(a) Dê a expressão de $z'(t)$ usando o vetor gradiente de f.
(b) Derive $z(t)$ para os casos:
(i) $z = \tan(x^2+y)$ *onde* $x = 2t$, $y = t^2$.
(ii) $z = x/y$ *onde* $x = e^{-t}$ *e* $y = \ln t$.

Exercício 38 *(a) Se $h(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$, onde $f(x,y), x(u,v)$ e $y(u,v)$ são diferenciáveis em todo plano, obtenha as expressões para $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}$. Aplique para cada caso abaixo:*
(b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ *onde* $x(u,v) = u - v$ *e* $y(u,v) = u + v$
(c) $f(x,y) = 1 - 4x^2 + 9y^2$ *onde* $x(u,v) = 2ucosv$ *e* $y(u,v) = 3usenv$

Exercício 39 *Seja* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$
(a) Seja $v = (\alpha,\beta)$ vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Exercício 40 *Em cada item, calcule a derivada direcional de f na direção de v e no ponto P:*
(a) $f(x,y) = xy - x + y$, $v = (1,1)$ $P = (1,1)$
(b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^4+4)$, $v = (1/\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, $P = (1,0)$
(c) $f(x,y,z) = \dfrac{x-e^y}{x^2+y^4+1}$, $v = (2,2,0)$, $P = (1,1,1)$.

Exercício 41 *Encontre a direção em que f decresce mais rapidamente, a partir de P nos três casos do exercício anterior.*

Exercício 42 *Mostre que se as funções $\phi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções com derivadas de segunda ordem contínuas em $\mathbb{R}$, então a função $u\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por*

$$u(t,x) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct),\ \ para\ (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

satisfaz a equação da onda unidimensional, isto é, a equação diferencial

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x),\ \ para\ (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $c > 0$ é uma constante fixada.

Exercício 43 *Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções do Exercício 31.*

Exercício 44 *Mostre que* $U(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-x}\operatorname{sen} y$ *satisfaz a chamada* **equação de Laplace** $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

Exercício 45 *Mostre que* $u(x,t) = e^{-25t}\operatorname{sen} 5x$ *é solução da* **equação do calor** $u_t = u_{xx}$.

Exercício 46 *Para cada* $(x,y) \neq (0,0)$ *calcule* $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y)$ *e* $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$ *onde* $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Exercício 47 *(a) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de* $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.
(b) Verifique que f *satisfaz a equação de Laplace*

$$\Delta f = 0,$$

sendo $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *(Uma função que satisfaz a equação de Laplace é chamada harmônica.)*

Exercício 48 *Se* $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$ *são funções de classe* C^2 *e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

mostre que u *e* v *são funções harmônicas.*

Exercício 49 *Seja* $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$, *onde* a *é uma constante real e* f *e* g *são funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até segunda ordem. Mostre que* $u(x,t)$ *satisfaz a equação da onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Exercício 50 *Suponha que* $u(x,t)$ *satisfaça*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

(a) Verifique que $v(r,s) = u(x,t)$, *onde* $x = r+s$ *e* $t = r-s$, *satisfaz a equação*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r} = 0.$$

(b) Determine funções $u(x,t)$ *que satisfaçam (1).*

Exercício 51 *Seja* $v(r,\theta) = u(x,y)$, *onde* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\operatorname{sen}\theta$. *Verifique que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Diferenciabilidade de funções de várias variáveis

Exercício 52 *Determine o conjunto dos pontos onde a função dada é diferenciável (justifique):*

(a) $f(x,y) = 1 + x\ln(xy-5)$,
(b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$,
(c) $f(x,y) = x^2 e^y$,
(d) $f(x,y) = \frac{1+y}{1+x}$,
(e) $f(x,y) = 4\arctan(xy)$,
(f) $f(x,y) = y + \sin(x/y)$.

Exercício 53 *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$ *existem*

(b) f_x *e* f_y *não são contínuas em* $(0,0)$.

(c) f *não é diferenciável em* $(0,0)$.

Exercício 54 *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que:

(a) $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$ *existem,*

(b) f_x *e* f_y *não são contínuas em* $(0,0)$

(c) f *é diferenciável em* $(0,0)$.

Exercício 55 *Verifique se a função* $f(x,y) = \sqrt[3]{x}\cos(y)$ *é diferenciável em* $(0,0)$. (Dica: Encontre, por definição, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.)

Reta (ou plano) tangente e reta normal

Exercício 56 *Determine as retas normal e tangente à curva* $x^2+xy+y^2-3y=1$ *no ponto* $(1,2)$.

Exercício 57 *Verifique se existem pontos sobre a curva* $x^2-y^2=1$ *nos quais a reta tangente seja paralela à reta dada por* $y=2x$. *Caso existam, determine-os.*

Exercício 58 *(a) Encontre o plano tangente à superfície* $x+y^2+z=4$ *no ponto* $P_0=(1,1,2)$.
(b) Determine o plano tangente à superfície $x^3+y^3+z^3=10$ *no ponto* $P_0=(1,1,2)$.

Exercício 59 *Verifique se existe(m) ponto(s) na esfera* $S\colon x^2+y^2+z^2=1$ *tal que o plano tangente a* S *neste(s) ponto(s) seja paralelo ao plano* $3x-y+z=7$. *Caso exista(m), determine-o(s).*

Aproximação linear

Exercício 60 *Abaixo é dada a função e sua aproximação linear num certo ponto P. Use a informação dada para determinar o ponto.*

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $L(x,y)=2y-2x-2$;

(b) $f(x,y)=x^2y$, $L(x,y)=4y-4x+8$;

(c) $f(x,y,z)=xy+z^2$, $L(x,y,z)=y+2z-1$;

(d) $f(x,y,z)=xyz$, $L(x,y,z)=x-y-z-2$

Exercício 61 *Abaixo é dada a função e sua respectiva aproximação linear, digamos $L_P(x,y)$, em algum ponto P. Use a informação dada em cada caso para determinar as coordenadas do ponto P.*

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $L_P(x,y) = 2y - 2x - 2$;

(b) $f(x,y) = x^2y$, $L_P(x,y) = 4y - 4x + 8$;

(c) $f(x,y,z) = xy + z^2$, $L_P(x,y,z) = y + 2z - 1$;

(c) $f(x,y,z) = xyz$, $L_P(x,y,z) = x - y - z - 2$.

Máximo e Mínimos para funções de várias variáveis

Exercício 62 *(a) Se a distribuição de temperatura numa chapa metálica é dada pela função $T(x,y) = x^3 - 2xy^2$ e se uma formiga está sobre a chapa no ponto $(x,y) = (1,1)$ e deseja se aquecer pois está sentindo muito frio. Em que direção deverá tomar sua caminhada para que isso ocorra de modo mais eficiente?*

(b) Se a formiga estivesse confortável, termicamente falando, que direção ela tomaria para continuar com esta mesma sensação.

Exercício 63 *Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções cujas leis são dadas por:*

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
2. $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
3. $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$
4. $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$

Exercício 64 *Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ mais próximo da origem.*

Exercício 65 *Encontre o ponto de máximo e o ponto de mínimo que $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$ assume no quadrado $[0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$. Dê os valores de máximo e mínimo de f neste quadrado.*

Exercício 66 *Em um laboratório foram obtidas, experimentalmente, as seguintes medidas:*

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \quad v_1 = 2; \\ t_2 &= 1, \quad v_2 = 8; \\ t_3 &= 2, \quad v_3 = 11. \end{aligned}$$

Determine os coeficientes a e b da função $v(t) = at + b$ de modo a minimizar a soma dos erros quadráticos, isto é, $e_1^2 + e_2^2 + e_3^3$, onde $e_i = v(t_i) - v_i,\ i = 1,2,3$.

Exercício 67 *Sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ determine todos os pontos onde $f(x,y) = xy$ assume seus valores extremos.*

Exercício 68 *Encontre as dimensões da lata cilíndrica reta fechada de menor área superficial cujo volume é $16\pi \mathrm{cm}^3$.*

Exercício 69 *Encontre as dimensões da caixa retangular fechada com máximo volume que pode ser inscrita na esfera unitária.*

Exercício 70 *Encontre os valores extremos de $f(x,y,z) = x^2yz + 1$ na interseção do plano $z = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.*

Exercício 71 *Uma placa metálica circular com um metro de raio está posicionada com seu centro na origem do plano* xy *e tem temperatura variável, incluindo os pontos de sua fronteira. A temperatura num ponto* (x, y) *da placa é mantida a* $T(x, y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)^o C$*, com* x *e* y *em metros. Encontre os valores de maior e de menor temperatura desta placa.*

Exercício 72 *Estude a função dada com relação a máximos e mínimos no conjunto dado.*

(a) $f(x, y) = 3x - y$; $A = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; y - x \leq 3; x + y \leq 4; 3x + y \leq 6\}$.
(b) $f(x, y) = 3x - y$; $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(c) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$; $A = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$.
(d) $f(x, y) = xy$; $A = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0; y \geq 0; 2x + y \leq 5\}$.
(e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$; $A = \{(x, y) \in R^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

Exercício 73 *Determine os valores máximos e mínimos de* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$*:*
(a) *na região retangular* $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

Exercício 74 *Encontre os pontos de máximo e de mínimo de* $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$ *na região delimitada pelo triângulo determinado pelas retas* $y = 0$, $x = 0$ *e* $x + y = 1$.

Exercício 75 *Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determinar os extremos condicionados das funções:*

(a) $z = xy$ *quando* $x + y = 1$
(b) $u = x^2 + y^2 + z^2$ *quando* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > b > c > 0)$
(c) $z = x^2 + y^2$ *quando* $3x + 2y = 6$
(d) $u = xyz$ *quando* $x + y + z = 5$ *e* $xy + yz + zx = 8$

Polinômio de Taylor

Exercício 76 *Determine o polinômio de Taylor de ordem dois da função dada, em torno do ponto* (x_0, y_0) *dado.*

(a) $f(x, y) = e^x + 5y$ *e* $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
(b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ *e* $(x_0, y_0) = (11)$.
(c) $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$ *e* $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exercício 77 *Sejam* $f(x, y) = e^x + 5y$ *e* $P_1(x, y)$ *o polinômio de Taylor de ordem 1 de* f *em torno de* $(0, 0)$.

(a) *Escreva a formula do resto segundo Lagrange e mostre que para todo* (x, y)*, com* $x + 5y < 1$,

$$|e^x + 5y - P_1(x, y)| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2.$$

(b) *Avalie o erro que se comete na aproximação*

$$ex + 5y \cong P_1(x, y)$$

para $x = 0,01$ *e* $y = 0,01$.

Exercício 78 *Sejam* $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ *e* $P_1(x, y)$ *o polinômio de Taylor de ordem 1 de* f *em torno de* $(1, 1)$.

(a) *Mostre que para todo* (x, y)*, com* $|x - 1| < 1$ *e* $|y - 1| < 1$,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 5(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2.$$

(b) *Utilizando* $P_1(x, y)$*, calcule um valor aproximado para* $f(1.01, 0.99)$.
(c) *Avalie o erro que se comete na aproximação do item (b).*