Lista 2 - SMA5717 Análise Funcional - 2^o semestre 2013

1. Seja $X = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}); f(0) = 0\}$ com a norma usual

$$||f|| = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Considere o funcional linear

$$\varphi : f \in X \mapsto \varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

a) Mostre que $\varphi \in X^*$ e $||\varphi||_{X^*} = 1$.

b) É possível encontrar alguma $f \in X$ tal que $||f|| = 1$ e $\varphi(f) = ||\varphi||_{X^*}$?

2. Sejam X um e.v.n. de dimensão finita e $C \subset X$ um conjunto convexo não vazio tal que $0 \notin C$. Afirmamos que sempre existe algum hiperplano que separa C e $\{0\}$ no sentido fraco. (Note que todo hiperplano é fechado. E que não é necessária hipótese adicional sobre C.)

a) Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ um subconjunto enumerável de C que é denso em C. Para cada n considere

$$C_n = \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : t_i \geq 0 \, \forall i, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

Verifique que C_n é compacto e que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_n$ é denso em C. **Sugestão:** Considere

$$P = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^m : \lambda_i \geq 0 \, \forall i, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

de modo que P é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ e C_n é a imagem de P pela aplicação contínua $\lambda \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

b) Prove que existe $f_n \in X^*$ tal que

$$||f_n|| = 1, \qquad f_n(x) \geq 0, \quad x \in C_n.$$

Sugestão: Aplique o Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica, a C_n e $\{0\}$. Normalize o funcional linear associado ao hiperplano que separa C_n e $\{0\}$.

c) Deduza que existe $f \in X^*$ tal que

$$||f|| = 1, \qquad f(x) \geq 0, \quad x \in C.$$

d) Sejam $A, B \subset X$ conjuntos convexos não vazios e disjuntos. Prove que existe hiperplano que separa A e B no sentido fraco. **Sugestão:** Aplique a construção acima para $C = A - B$.

3. Considere $X = \mathbb{R}^m$ com a norma do máximo $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$. Então X^* "é"(isomorficamente isométrico) $\mathbb{R}^m$ com a norma $||x||_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$.

4. Sejam c_0 o espaço de Banach de todas sequências reais que convergem para zero, com a norma $||x||_\infty = \sup |x_n|$ e l_1 o espaço de Banach de todas sequências reais tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, com norma $||x||_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Então, c_0^* "é"o espaço l_1. **Sugestão:** Para cada $u \in l_1$ associe um funcional $\phi_u \in c_0^*$, de forma que $\phi_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$. Considere a aplicação $A : l_1 \to c_0^*$ dada por $Au = \phi_u$.

5. Sejam X um espaço de Banach e B^* um subconjunto de X^*. Se para cada $x \in X$, o conjunto $B^*(x) = \bigcup_{f \in B^*} \{f(x)\}$ é limitado, então B^* é limitado.

6. A série de Fourier de uma função integrável f definida em $(0, 2\pi)$ é a série
$$s(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}, \quad a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt} dt.$$
a) Considere a soma parcial $s_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} a_m e^{imx}$ e que $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$. Prove que
$$s_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y + x) D_n(x) dx,$$
onde $D_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x}{\operatorname{sen}(x/2)}$.

b) Mostre que $\int_0^{2\pi} |D_n(x)|\, dx \to \infty, \quad n \to \infty$.

c) Sejam X os espaço das funções contínuas f em $[0, 2\pi]$ com $f(0) = f(2\pi)$, munido da norma uniforme e $Y = \mathbb{R}$. Prove que o operador linear $T : X \to Y$ dado por
$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(x) dx$$
é limitado e que
$$||T_n|| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(x)| dx.$$
d) Prove que existe função contínua f em $[0, 2\pi]$ com $f(0) = f(2\pi)$ tal que sua série de Fourier diverge em $x = 0$. **Sugestão:** Use os ítens b) e c) e o Princípio da Limitação Uniforme.

7. Sejam X um espaço de Banach, Y um e.v.n. e $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Se $\sup_{\alpha \in \Lambda} ||T_\alpha|| < \infty$, então $\{x \in X : \sup_{\alpha \in \Lambda} ||T_\alpha x|| < \infty\}$ é de segunda categoria em X.

8. Sejam X um espaço de Banach, Y um e.v.n. e $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Prove que $T_n x \to 0$ para todo $x \in X$ se, e somente se, $\sup_n ||T_n|| < \infty$ e $T_n u \to 0$ para todo $u \in F$, para algum subconjunto fundamental F de X.
Definição: Um subconjunto F de um e.v.n. X é *fundamental* se o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de F é denso em X, ou seja, para cada $x \in X$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$ tal que $z_i \in F$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ e $||x - y|| < \varepsilon$.

9. Seja E um e.v.n.. Mostre que todo funcional linear em $E^* \backslash \{0\}$ é uma aplicação aberta.
Dica: Não se pode usar o teorema da aplicação aberta pois não assumimos E Banach. Mostre diretamente, apenas com a hipótese E um e.v.n. que $\varphi(B_1(0)) = B_{||\varphi||}(0)$.

10. Use o Teorema do Gráfico Fechado para mostrar que se $T : \ell_p \to \ell_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, é linear e comuta com o operador $S(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$, então T é limitado.