Lista 2 de Exercícios de SMA354 - Cáculo II

Técnicas de integração
Volume de sólidos
Integrais impróprias

Exercício 1 *Calcule as seguintes integrais da Lista 1 de outra maneira:*

(a) $\int \sqrt{3+x}(x+1)^2 dx$ (b) $\int \left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{t^2-1}{t^2} dt$ (c) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ (d) $\int \frac{\cos(t)}{-\sin^2(t)} dt$
(e) $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$ (f) $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)-\sin^2(x)}} dx.$

Exercício 2 *Use decomposição em frações parciais para calcular as seguintes integrais indefinidas:*

(a) $\int \frac{16x+69}{x^2-x-12} dx$ (b) $\int \frac{3x^2-10x-60}{x^3+x^2-12x} dx$ (c) $\int \frac{-3x^3+x^2+2x+3}{x^4+x^3} dx$ (d) $\int \frac{3x^2-5x+4}{x^3-x^2+x-1} dx$
(e) $\int \frac{x-1}{x^2(x+1)^2} dx$ (f) $\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3} dx$ (g) $\int \frac{x^2+3}{x^2-9} dx$ (h) $\int \frac{x+1}{x^4-x^2} dx$

Exercício 3 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido da rotação da região limitada do plano* xOy*, delimitada pelas representações geométrica dos gráficos das curvas* $y = x^2$ *e* $y = \sqrt{x}$*, em torno do eixo dos* x*'s.*

Exercício 4 *Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando-se a região limitada do plano* xOy*, que é a representação geométrica do conjunto*

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \text{ e } x^2 \leq y \leq 1\right\},$$

em torno do eixo dos y*'s.*

Exercício 5 *As secções transversais de um certo sólido, por planos perpendiculares ao eixo* Ox*, são círculos, cujos diâmetros estão compreendidos entre as representações geométricas dos gráficos das curvas* $y = x^2$ *e* $y = 8 - x^2$*. Encontre seu volume.*

Exercício 6 *Para* $a > 0$ *fixado, temos que a base de um certo sólido é o círculo*

$$C \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\right\}.$$

Cada secção plana do sólido por planos perpendiculares ao eixo Ox*, é um quadrado com um lado sobre a base do sólido. Calcule o seu volume. Faça o mesmo quando a base desde sólido é o círculo*

$$C \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq a^2\right\}.$$

Exercício 7 *A base de um certo sólido é a região limitada do plano* xOy *delimitada pelo eixo dos* Ox*, pelas representações geométricas dos gráficos das curva* $y = \text{sen}(x)$ *e das retas* $x = 0$ *e* $x = \pi/2$*. Cada secção plana do sólido perpendicular ao eixo dos* Ox *é um triângulo equilátero com um lado na base do sólido. Encontre o volume do sólido.*

Exercício 8 *Em cada um dos itens abaixo, esboce a representação geométrica da região limitada, que chamaremos de* $\underline{R}$*, contida no plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das equações dadas. Além disso determine, usando o* **método das cascas cilíndricas**, *o volume do sólido gerado pela rotação da região* $\underline{R}$*, em torno do eixo indicado.*

(a) $y=\sqrt{x}\,,x=4\,,y=0$ *e o eixo* Oy	(b) $y=x^2\,,y^2=8\,x$ *e o eixo* Oy
(c) $y^3=x\,,y=3,\ x=0$ *e o eixo* Ox	(d) $x^2=4\,y\,,y=4\,,$ *e o eixo* Ox
(e) $y=\sqrt{x+4}\,,y=0\,,x=0$ *e o eixo* Ox	(f) $16y=x^2\,,y^2=2\,x$ *e o eixo* Oy.

Exercício 9 *Seja* $a>0$ *fixado. Os eixos de dois cilindros circulares retos, cujos raios da base são iguais à* $\underline{a}$*, se interceptam em ângulo reto. Encontre o volume do sólido obtido da intercecção.*

Exercício 10 *Seja* $a>0$ *fixado. A base de um sólido é um triângulo retângulo isóceles, cujos lados iguais têm comprimento* $\underline{a}$*. Sabendo-se que as seções transversas, perpendiculares à altura relativa a um dos lados do triângulo, são semicírculos, determine seu volume.*

Exercício 11 *Seja* $\underline{R}$ *a região limitada do plano* xOy*, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas* $x=y^2$ *e* $x=9$*. Para cada um dos itens abaixo, determine o volume do sólido que tem a região* $\underline{R}$ *como base, sabendo-se que a secção relativa ao eixo* Ox*, é um:*
(a) *um quadrado.*
(b) *um retângulo de altura igual a 2.*
(c) *um semicírculo.*
(d) *um quarto de círculo.*
(e) *um triângulo equilátero.*
(f) *um triângulo, cuja altura é igual a* $\dfrac{1}{4}$ *do comprimento da sua base.*
(g) *um trapézio com base inferior no plano* xOy*, cuja base superior tem comprimento igual a* $\dfrac{1}{2}$ *do comprimento da sua base inferior e o comprimento da altura é igual a* $\dfrac{1}{4}$ *da sua base inferior.*
(h) *um paralelogramo, com base no plano* xOy *e cuja altura é igual a duas vezes o comprimento de sua base.*
(i) *E se a área de tal seção transversal for dada pela expressão abaixo, qual será seu volume. Tente fazer um esboço?*

$$A(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x\,dy.$$

Exercício 12 *Decida quais das integrais impróprias abaixo são convergentes e quais são divergentes:*

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$	(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$	(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{2x}dx$
(e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}$	(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$	(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2}dx,\ s>0$	(h) $\displaystyle\int_{-1}^\infty e^{-sx}dx,\ s>0$
(i) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-st}dt,\ s>0$	(j) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\cos t dt,\ s>0$	(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$	(l) $\displaystyle\int_1^\infty \ln x dx$
(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{st}\operatorname{sen} t dt,\ s>0$	(n) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1+x^2}dx$	(o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln\vert x\vert}{x}dx$	(p) $\displaystyle\int_1^\infty \ln^2 x\,dx.$

Exercício 13 *Verifique para quais valores de* α *a integral* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ *converge e para quais diverge.*

Exercício 14 *Determine todos os números naturais para os quais a integral imprópria* $\int_1^\infty x^n \ln x\,dx$ *é convergente.*

Exercício 15 *Se* f *é contínua em* $(-\infty,\infty)$ *definimos* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx$. *Decida se as integrais abaixo convergem ou divergem.*

$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx \quad (b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx \quad (d)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx.$$

Exercício 16 *Se* f *é contínua apenas em* $(x_0, b]$ *então* $\int_{x_0}^b f(x)dx = \lim_{a\to x_0^+}\int_a^b f(x)dx$. *De modo análogo, se* f *é contínua apenas em* $[a, x_0)$ *então* $\int_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{b\to x_0^-}\int_a^b f(x)dx$. *No caso do limite existir dizemos que a integral converge. Com estas definições verifique se as integrais abaixo convergem ou não:*

$$(a)\ \int_0^1 \frac{1}{x}dx \quad (b)\ \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \quad (c)\ \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (d)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(e)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^3+2x^2+x} \quad (f)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2}.$$

Exercício 17 *Teste a convergência das integrais abaixo:*

(a) $\int_3^\infty e^{-2x}dx$	(b) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3}$	(c) $\int_8^\infty x^{-4/3}dx$	(d) $\int_0^\infty \operatorname{sen} x\ dx$
(e) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}dx$	(f) $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$	(g) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}dx$	(h) $\int_1^\infty e^{-x}\cos x\ dx$
(i) $\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$	(j) $\int_0^\infty \lvert x\rvert\cos x^2dx$	(k) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$	(l) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^3}dx$
(m) $\int_0^2 \frac{1}{4-x^2}dx$	(n) $\int_0^e \ln x\,dx$	(o) $\int_0^1 \frac{x^2+4x+1}{x^4-3x+2}dx$	(p) $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}dx$
(q) $\int_0^3 \frac{1}{2x^2-18}dx$	(r) $\int_0^\infty \operatorname{sen}(x+1)dx$	(s) $\int_0^\infty 4x^3e^{-x^4}dx$	(t) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$

Exercício 18 *Sejam dados um número real* $s > 0$ *e um natural* $n \neq 0$. *Mostre que*

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\ dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\ dt.$$

Conclua que $\int_0^\infty t^n e^{-st}\ dt = \frac{n!}{s^n+1}$. *Esta é a transformada de Laplace da função* $f(t) = t^n$.

Exercício 19 *Seja* $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua, com derivada contínua. Suponha que existam constantes* a, $k > 0$ *tais que*

$$|f(t)| \leq Ke^{at},\ \textit{para todo}\ t \in [0,\infty[.$$

Considere a função $L(f)\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, *dada por*

$$L(f)(s) := \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,\ \textit{para todo}\ t \in [0,\infty[.$$

$L(f)$ *é denominada a Transformada de Laplace de* f.

(a) *Mostre que a função* $L(f)$ *está bem definida, isto é, a integral imprópria é convergente para cada* $s > 0$.

(b) *Mostre que* $L(f)(s) = sL(f)(s) - f(0)$, *para* $s > 0$.
Sugestão: use integração por partes.

(c) *Ache a transformada de Laplace das seguintes funções:*
(i) $f(t) := 1$, *para* $t \in \mathbb{R}$.
(ii) $f(t) := t$, *para* $t \in \mathbb{R}$.
(iii) $f(t) := \text{sen}(t)$ *para* $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 20 *Use o critério da comparação ou comparação por limite para decidir se as integrais abaixo convergem ou divergem:*

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1+\cos x}{\sqrt{|x|^3}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x^2}-0.05}{x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{1+3x-x^7+x^{10}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^4+3e^{-x}}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^3-3x-1}{\sqrt{|x|^7}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x^2}}{\cos x+2}\,dx.$