Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #16

1. Conclua que a correspondência

$$x \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad 0 < x < \pi$$

é de fato uma igualdade que vale no intervalo $[-\pi, \pi]$. Deduza a partir disso que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2-1)} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Use a correspondência

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad 0 < x < \pi,$$

para deduzir que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Use o exercício 6 da Lista 11 para justificar a fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4. Use a expansão encontrada no exercício 1-(v) da Lista 12 para justificar a fórmula

$$\frac{a\pi}{\operatorname{sen} a\pi} = 1 + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}, \quad a \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

5. Verifique que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -3 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 3 \\ 1/2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

pode ser descrita pela seguinte fórmula

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{3}.$$

6. Uma função $f$ tem as seguintes características: $f(x) = 0$, $x \in (-2, 1)$, $f(x) = 1$, $x \in (1, 2)$ e $f(-2) = f(1) = f(2) = 1/2$. Verifique que

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right].$$