Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #15

1. Seja $f \in C_p(-\pi,\pi)$ e considere $f_1(x) = (f(x)+f(-x))/2$ e $f_2(x) = (f(x)-f(-x))/2$. Já vimos que os coeficientes de Fourier a_n e b_n de f são os coeficientes da série de cossenos de f_1 e de senos de f_2 respectivamente. Usando as desigualdades de Bessel para esses dois tipos de séries (visto em sala de aula) deduza que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)^2 dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_2(x) dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Deduza em seguida que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)^2 dx + \int_0^{\pi} f(-x)^2\right) dx.$$

Modificando a última integral acima, conclua que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Finalmente, conclua que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

2. Justifique a igualdade abaixo

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

A série ainda converge para a extensão 2π-periódica de $f(x) = x$, $x \in (-\pi,\pi)$?

3. Para as funções dos itens abaixo, explique porque a série de Fourier da função é convergente no intervalo $[-\pi,\pi]$. Calcule o valor da soma quando $x = \pi$.

$$(i)\ f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \pi/2 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases} \qquad (ii)\ g(x) = e^{ax}$$

Dica: você já calculou as séries de Fourier destas funções na Lista 12, exercício 1.

4. Use a série de cossenos para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, para deduzir as duas expressões abaixo.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

5. Volte ao exercício 2 da Lista 12 e conclua que a série encontrada converge para a função f para todo $x \in [0,\pi]$.