Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #14

1. Com a ajuda da Regra de L'Hospital, encontre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

onde $f(x) = x^{-1}(e^x - 1)$, $x \neq 0$.

2. Verifique que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\,(x^{-1}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$ mas as derivadas laterais, tanto à direita como à esquerda de 0, não existem. Isto é outro exemplo que ilustra o fato de que a continuidade de uma função em um ponto x_0 não garante a existência das derivadas laterais.

3. Considere a série de senos de uma função $f \in C_p(0,\pi)$ e seja s_N a soma de senos truncada em N, ou seja, $s_N := \sum_{k=1}^N b_k \,\text{sen}\, kx$, $N = 1, 2, \ldots$. Calcule as integrais

$$\int_0^\pi s_N(x) f(x) dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\pi s_N(x)^2 dx$$

Calcule em seguida a integral

$$\int_0^\pi (f(x) - s_N(x))^2 dx$$

para deduzir a desigualdade

$$\sum_{k=1}^N b_k^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)^2 dx.$$

Finalmente, deduza que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

4. Derive a seguinte expressão alternativa para o núcleo de Dirichlet:

$$D_N(u) = \frac{\text{sen}\,(Nu + u/2)}{2\,\text{sen}\, u/2}, \quad u \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

Sugestão: use a identidade trigonométrica

$$2\,\text{sen}\, A \cos B = \text{sen}\,(A+B) + \text{sen}\,(A-B)$$

e some membro a membro de 1 a N. Voce pode usar também a identidade

$$\sum_{k=1}^N \text{sen}\,(-ku + u/2) = -\sum_{k=0}^{N-1} \text{sen}\,(ku + u/2)$$