Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #12

1. Encontre uma série de Fourier para as funções abaixo no intervalo $(-\pi, \pi)$.

(i) $f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ \pi/2 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$ $\quad$ (ii) $g(x) = \begin{cases} 2 + 2x/\pi & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

(iii) $h(x) = x + x^2/4$ $\quad$ (iv) $f(x) = e^{ax}$ $\quad$ (v) $g(x) = \cosh ax$ $\quad$ (vi) $h(x) = \cos ax$ $(a \neq 0)$

Dicas: (iii) Use exemplo feito em classe e um exercçicio da lista anterior; (iv) Use a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ para escrever

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx.$$

Então compare as partes real e imaginária; (v) Use (iv); (vi) Use a identidade $2\cos ax = e^{iax} + e^{-iax}$ e o item (iv).

2. Encontre uma série de Fourier para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Assumindo que a série converge para f em $[-\pi, \pi]$, esboce o gráfico da função representada pela mesma série para $x \in \mathbb{R}$. **Dica:** Use a identidade $2f(x) = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$ e o último exercício da lista anterior.

Respostas:

1. (i) $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x$ $\quad$ (ii) $\frac{3}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen} nx\right]$

1. (iii) $\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx - \frac{2(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx\right)$

1. (iv) $\frac{\operatorname{senh} a\pi}{a\pi} + \frac{2\operatorname{senh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\operatorname{sen} nx)$

1. (v) $\frac{\operatorname{senh} a\pi}{a\pi}\left[1 + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cos nx\right]$ $\quad$ (vi) $\frac{2a\operatorname{sen} a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-a^2}\cos nx\right]$

2. $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$