Lista de exercícios de SMA-333 - Cálculo III - Prof. Valdir Menegatto #11

1. Encontre uma série de Fourier de senos para a função $f(x) = \pi^2 x - x^3$, $x \in (0, \pi)$.

2. Encontre uma série de Fourier de cossenos para as funções abaixo, todas definidas no intervalo $(0, \pi)$:
   (i) $f(x) = 1$;
   (ii) $g(x) = \pi - x$;
   (iii) $h(x) = x^2$.

3. Repita o exercício anterior, encontrando agora uma série de senos para cada uma das funções dadas.

4. Encontre uma série de Fourier de cossenos no intervalo $(0, \pi)$ para a função f dada pela fórmula abaixo:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

5. Usando algum exercício anterior se achar conveniente, determine uma série de senos para a função $f(x) = x(\pi - x)$, $x \in (0, \pi)$.

6. Verifique que
$$x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n\pi)^2 - 6}{n^4} \cos nx \quad 0 < x < \pi.$$
   Assumindo que esta correspondência é de fato uma igualdade em $[0, \pi]$, esboce o gráfico da função que a série representa para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Encontre uma série de Fourier de senos para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ no intervalo $(0, \pi)$.

Respostas:

$$1.\ 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\operatorname{sen} nx$$

$$2.\ (i)\ 1 \qquad (ii)\ \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \qquad (iii)\ \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$3.\ (i)\ \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x \qquad (ii)\ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx$$

$$3.\ (iii)\ 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - 2\frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^3}\right]\operatorname{sen} nx$$

$$4.\ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$$

$$5.\ \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}(2n-1)x$$

$$7.\ \operatorname{sen} x$$