Lista 1 - SMA5717 Análise Funcional - 2^o semestre 2013

Definição. Seja X um e.v. sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ com as propriedades

(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in X$;

(ii) $\|\lambda\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, x \in X$;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X$;

é chamada uma seminorma em X. Neste caso dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é um e.v. seminormado (e.v.s.n.). Se além disso,

(iv) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

dizemos que $\|\cdot\|$ é uma norma sobre X e que $(X, \|\cdot\|)$ é um e.v. normado (e.v.n.).

1. Verifique que em um e.v.s.n. $(X, \|\cdot\|)$ tem-se

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X.$$

2. Seja X um e.v. sobre $\mathbb{K}$ e $p : X \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo:

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \qquad x, y \in X, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Então, $p(0) = 0$ e $p(x) \geq 0$, $x \in X$ (e então p é uma seminorma).

3. Em qualquer e.v. X pode-se definir uma norma. Por exemplo, considere em X uma base de Hamel $\{x_i; i \in \mathcal{I}\}$. Então cada $x \in X$ pode ser escrito, de modo único, na forma

$$x = \sum_{i \in \mathcal{J}_x} a_i x_i$$

   onde $\mathcal{J}_x$ é um subconjunto finito de $\mathcal{I}$, com $a_i \in \mathbb{K}$ para $i \in \mathcal{I}$. Defina $|||\cdot|||_\infty : X \to \mathbb{R}$ e $|||\cdot|||_p : X \to \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$, por

$$|||x|||_\infty = \max_{i \in \mathcal{J}_x} |a_i| \qquad \text{e} \qquad |||x|||_p = \left(\sum_{i \in \mathcal{J}_x} |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

   Mostre que $|||\cdot|||_\infty$ e $|||x|||_p$ definem normas em X.

4. Mostre que $(X, |||\cdot|||_p)$, com $1 \leq p \leq \infty$, não é completo quando X tem dimensão infinita.

5. Seja X um e.v. (semi-)normado, então $d(x,y) = ||x-y||$ define uma (semi-)métrica em X com as seguintes propriedades:
   a) $d(x+y, z+y) = d(x,z)$, $x, y, z \in X$
   b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, $x, y \in X$ e $\lambda \in K$.
   Reciprocamente, se d for uma (semi-)métrica no e.v. X satisfazendo a) e b), então $||x|| = d(x, 0)$ define uma (semi-)norma em X tal que $||x-y|| = d(x,y)$, $x, y \in X$.

6. Se uma série em um espaço de Banach é absolutamente convergente, então todos rearranjamentos desta série convergem à um valor comum.

   Quando trabalha-se com séries que não são absolutamente convergentes, deve-se tomar cuidado extra, pois resultados bizarros podem aparecer! No caso real, um bom exemplo é a série $\sum(-1)^n/n$ que é convergente mas não é absolutamente convergente. Um resultado importante que inclui esse exemplo é:

7. (Teorema de Riemann) Se uma série de números reais é convergente mas não é absolutamente convergente, então para todo número real r, algum rearranjamento da série converge para r.

8. Sejam $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{K}$ funções contínuas dadas. Use o Teorema de Neumann para explicitar a solução f de uma equação integral da forma (determine as condições necessárias para poder usar tal teorema):

$$f(t) - \lambda \int_0^1 K(s,t) f(s) ds = g(t), \quad t \in [0,1].$$

9. Aplique o exercício anterior para a equação:

$$f(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} f(s) ds = g(t), \quad t \in [0,1].$$

10. Mostre que, se X, Y e Z são e.v.n., $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, então $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$.

11. O Lema de Riesz garante que: se M é um subespaço fechado próprio de um e.v.n. $(X, \|\cdot\|)$, então dado θ com $0 < \theta < 1$, existe $y \in S_X(0,1)$ tal que

$$\|y - x\| \geq \theta \quad \forall\, x \in M. \tag{1}$$

   (i) Mostre que se X tem dimensão finita então a desigualdade acima também é válida para $\theta = 1$.

   (ii) Seja $X = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}); f(0) = 0\}$ com a norma

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

   Mostre que $M = \{f \in X; \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ é um subespaço fechado próprio de X e que (1) não é verdadeira para $\theta = 1$.