Lista de exercícios - SMA-301 - Cálculo I - Profa. Ana Paula Peron

1. Use a definição para justificar que a função dada é contínua no ponto dado.

   (a) $f(x) = 4x - 3$ em $a = 2$

   (b) $f(x) = x + 1$ em $a = 2$

   (c) $f(x) = -3x$ em $a = 1$

   (d) $f(x) = x^2$ em $a = 3$

   (e) $f(x) = x^3$ em $a = 2$

2. Justifique de duas maneiras (usando a definição e usando as propriedades) que a função $f(x) = 1/x$ é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$.

3. Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos, exceto em $a = -1, 0, 1$.

4. Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua em todos os pontos exceto nos inteiros.

5. Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ e que seja contínua apenas nos pontos $a = -1, 0, 1$.

6. Analise a continuidade das funções:

   (a) $f(x) = [x]$ (função maior inteiro)

   (b) $f(x) = x - [x]$

   (c) $f(x) = |x - 2|(x - 2)^{-1}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & x < -1 \\ 1 & x = -1 \\ 3x & x > -1 \end{cases}$

7. Dê exemplos de funções $f$ e $g$ nas condições abaixo.

   (a) $f + g$ é contínua mas $f$ e $g$ são descontínuas

   (b) $f \circ g$ é contínua mas $f$ e $g$ são descontínuas

(c) $f$ é contínua, $g$ é descontínua mas $f \circ g$ é contínua.

8. Determine $L$ para que a função dada seja contínua no ponto dado.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ L & x = 2 \end{cases}$ em $a = 2$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x} & x \neq 0 \\ L & x = 0 \end{cases}$ em $a = 0$

9. Dê o valor (caso exista) que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ em $a = 2$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x}$ em $a = 0$

   (c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $a = 0$

   (d) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ em $a = 2$

   (e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$ em $a = 3$

   (f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ em $a = 1$

10. Sabe-se que $f$ é contínua em 2 e que $f(2) = 8$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$,
$$2 - \delta < x < 2 + \delta \Rightarrow f(x) > 7.$$

11. Sabe-se que $f$ é contínua em 1 e que $f(1) = 2$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$,
$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow \frac{3}{2} < f(x) < \frac{5}{2}.$$

12. Se $|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que $f$ é contínua em 1.

13. Se $|f(x)| \leq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que $f$ é contínua em 0.

14. Seja $f(x) = x^3 + x$. Verifique que

    (a) $|f(x) - f(2)| \leq 20|x - 2|$ para $0 \leq x \leq 3$

    (b) f é contínua em 2.

15. Encontre condições necessárias e suficientes sobre os números $A$ e $B$ para que a função

$$f(x) = \begin{cases} Ax - B & x \leq 1 \\ 3x & 1 < x < 2 \\ Bx^2 - A & x \geq 2 \end{cases}$$

    seja contínua em $x = 1$ mas descontínua em $x = 2$.

16. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(x + y) = f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

    (a) Deduza que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

    (b) Conclua que se $f(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $f$ é a função nula.
    Assuma agora que $f$ é contínua no ponto 0.

    (c) Deduza que $f$ tem que ser contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$

    (d) A desigualdade $f(2)f(51) < 0$ pode acontecer? Sugestão: use o Teorema do Valor Intermediário

    (e) Se $f(x_0) \neq 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, deduza que $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.