Lista 2 de Exercicios de Cálculo I

**(1)** Calcule, utilizando a definição, a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x^2 - 5$ (b) $f(x) = 2x + 3$ (c) $f(x) = k$
(d) $f(x) = \sqrt{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (f) $f(x) = x^3$
(g) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (h) $f(x) = x^n$ para $n \geq 1$ (i) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ para $n \geq 1$

**(2)** Calcule $f'(x)$ onde $f(x)$ é igual a

(a) $3x^2 - 5$ (b) $3x + \sqrt{x}$ (c) $3x + \dfrac{1}{x}$ (d) $\dfrac{x}{x^2+1}$
(e) $\dfrac{3x^2 - \sqrt{x}}{x-3}$ (f) $\dfrac{\sqrt[3]{x} - x}{x^2 - 3}$ (g) $\dfrac{\sqrt[4]{x}\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$ (h) $(x^3 + \operatorname{sen} x)\csc x$

(i) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ (j) $x \operatorname{cotg} x$ (l) $\dfrac{3}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ (m) $\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^3+2}$

(n) $(2-x)^{11}(x^2+1)^3$ (o) $(1+x^2)^2 \operatorname{sen} x$ (p) $\dfrac{3 \operatorname{sen} 16x}{\operatorname{sen} 2x + \cos 4x}$ (q) $\sqrt{2x^3 - x^2} + \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x^3+2}$

(r) $\operatorname{sen} x^3$ (s) $\operatorname{sen}(\cos x)$ (t) $x\sqrt{x^2 + \cos 2x} + \dfrac{\cos 5x}{\operatorname{sen} 3x}$ (u) $\operatorname{sen}^3 x$
(v) $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ (x) $\sqrt{1 + \sqrt{x^2+1}}$ (z) $\dfrac{\cos x \operatorname{cotg} x}{\sec x - \cos x}$ (aa) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}.$

**(3)** Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = e^{2x-3}$ (b) $f(x) = e^{\sin x} + \sin e^x$
(c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x+7}$ (d) $f(x) = \arcsin x$
(e) $f(x) = \arccos x$ (f) $f(x) = \dfrac{x}{(2 + \ln x)^2}$
(g) $f(x) = (2x^2 - \dfrac{x}{2} + 1)(\sin 5x + 2x + \sqrt{2})$ (h) $f(x) = \dfrac{3x + 9\cos x}{2x^2+1}$
(i) $f(x) = \dfrac{(2t^2 - t + 3)^{91}}{(3t^3+1)^{19}}$ (j) $f(x) = \sqrt{1-t^2}\arcsin\sqrt{1-t^2}$
(k) $f(x) = \cos^5(\sin^2(\sqrt{x^2+1} + \log_3 x))$ (l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

(m) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sin(2^x)}{x^2+1}$ (n) $f(x) = x^2\arctan(2x) + \tan^3(4x) - \sec^4(x^2)$
(o) $f(x) = x^x$ (p) $f(x) = x^{x^x}$

**(4)** Determine se as seguintes funções são derivaveis no ponto $p$ dado.

(a) $p = 1, f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x < 1 \\ -x^2 + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ (b) $p = 0, g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2\cos(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(c) $p = 0, h(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (d) $p = \dfrac{\pi}{2}, w(x) = \begin{cases} \tan(x) & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

**(5)** Verifique se as seguientes funções são derivaveis no $p$ dado.

(a) $p = 0, f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < 0 \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $p = 0, f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
(c) $p = 0, f(x) = \begin{cases} x^3 \arcsin x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

**(6)** Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x < 1 \\ -x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de $f$.

**(7)** Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{se } x < 1 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$ e calcule $f'(1)$. Esboce o gráfico de $f$.

**(8)** Dê um exemplo de uma função $f$, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que

(a) $f'(1) = 0$ (b) $f'(x) > 0,$ para todo $x \in \mathbb{R}$
(c) $f'(0) < f'(1)$ (d) $f(x)' > 0,$ para $x < 0, f'(x) < 0,$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0,$ para $x > 2$
(e) $f'(0) = f'(1) = 0$ (f) $f'(x) > 0,$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$

**(9)** Seja $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$ $f$ é contínua em 2? $f$ é derivável em 2? Justifique sua resposta.

**(10)** Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$ $f$ é contínua em 0? $f$ é derivável em 0? Justifique sua resposta.

**(11)** Seja $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } x \leq 3 \\ x-3 & \text{se } x > 3. \end{cases}$ $f$ é contínua em 3? $f$ é derivável em 3? Justifique sua resposta.

**(12)** Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f$ em $(p, f(p))$ nos seguintes casos:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 2$ (b) $f(x) = x^2 - x$ em $p = 4$ (c) $f(x) = x^3 - 2x^2$ em $p = -1$
(d) $f(x) = 1/x^2$ em $p = 1$ (e) $f(x) = \cos x$ em $p = \pi$ (f) $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $p = \pi/4$

**(13)** Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x + 2$.

**(14)** Determine o ponto do gráfico de $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ em que a reta tangente, neste ponto, seja paralela ao eixo $x$.

**(15)** Seja $r$ a reta tangente ao gráfico de $f(x) = 1/x$ no ponto de abscissa $p$. Verifique que $r$ intercepta o eixo $x$ no ponto de abscissa $2p$.

**(16)** Mostre que existem exatamente duas retas tangentes ao gráfico de $y = (x+1)^3$ que passam pela origem. Dê as equações dessas retas.

**(17)** Sejam $f$ e $g$ duas funções. Dizemos que os gráficos de $f$e $g$ são *tangentes* em $(p, q)$ se ambos os gráficos possuem a mesma reta tangente nesse ponto. Mostre que os gráficos de $y = 3x^2$ e $y = 2x^3 + 1$ são tangentes em $(1, 3)$.

**(18)** Seja $f(x) = x^2+2x+3$. Dado um ponto $(p, f(p))$, com $p \neq -1$, no gráfico de f, determine um ponto $(q, f(q))$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ seja perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto $(q, f(q))$.

**(19)** Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 3^2 + 2x - 3$
(a) que é paralela a reta de equação $y - 4x + 3 = 0$.
(b) que é perpendicular a reta de equação $2y - x = 0$.
(c) que é paralela ao eixo OX.

**(20)** Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função $f$, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(1) = 0$.

**(21)** Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função $f$, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**(22)** Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função $f$, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(1)$ não exista.

**(23)** Dê um exemplo (por meio de um gráfico) de uma função $f$, definida e derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(0) = 0$ e $f'(1) = 0$.

**(24)** Estude o sinal de $f'(x)$, onde $f(x)$ é igual a

(a) $x^3 + 3x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (d) $\operatorname{sen} x + \cos x$ (e) $\dfrac{1}{x^2+1}$ (f) $\operatorname{tg} x$ (g) $x^3 + \dfrac{1}{x}$

**(25)** Seja $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx^3 + d$. Se $p(0) = \frac{3}{4}$, $p'(0) = \frac{1}{2}$, $p''(0) = \frac{3}{5}$ e $p'''(0) = \sqrt{2}$, quanto vale $a, b, c$ e $d$?

**(26)** Esboce os gráficos de $f$, $f'$ e $f''$ se:

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se } x \leq 1 \\ 5x - 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$

**(27)** Seja $y = x^2 - 3x$. Mostre que $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 3$.

**(28)**Seja $y = 1/x$. Mostre que $x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6\dfrac{dy}{dx}$.

**(29)** Seja $x = \cos \omega t$, onde $\omega$ é constante. Mostre que $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

**(30)** A função diferenciável $y = f(x)$ é tal que para todo $x \in$dom$(f)$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação $xy^3 + 2xy^2 + x = 4$. Calcule a equação da reta tangente ao grfico de $f$ no ponto $(1, f(1))$ sabendo que $f(1) = 1$.

**(31)** Seja $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que
(a) Se $f$ for uma função ímpar, então $f'$ será par.
(b) Se $f$ for uma função par, então $f'$ será ímpar.

**(32)** Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $g(2) = g'(2) = 2$. Calcule $H'(2)$, sendo a função $H$ dada por $H(x) = g(g(g(x)))$.

**(33)** Prove que para todo $\lambda > 0$, a parábola $y = \lambda x^2 + 1$ passa pelo ponto $(0, 1)$. Para que valor de $\lambda$ o faz tangenciando a reta $y = x + 1$?

**(34)** Encontre a equação da reta tangente y da reta normal ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3x^2 - 1} + \sqrt{x + 2}$$

no ponto $(1, f(1))$.

**(35)** Dadas as funções

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$ iii) $f(x) = \dfrac{4x + 3x^2}{1 + x^2}$

iv) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ v) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$ vi) $f(x) = e^{-x^2}$

vii) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$ viii) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ix) $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Encontre:
(a) Pontos críticos e intervalos de crescimento e decrescimento de $f$.
(b) Pontos de inflexão e intervalos de concavidade e convexidade de $f$.
(c) Ache as asíntotas de $f$, se estas existirem.
(d) Esboce o gráfico de $f$.

**(36)** Para cada uma das funções abaixo, determine os pontos de máximo e de mínimo, os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos de inflexão, estude a concavidade e esboce o gráfico.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

(d) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ (e) $f(x) = 2|x| - x^2$ (f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$ (h) $f(x) = e^{-1/x^2}$ (i) $f(x) = e^{-1/x}$

**37)** Calcule máximos e mínimos locais e globais das seguintes funções

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = xe^{-2x}$ c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x +$

d) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ , para $x \in [0, \pi]$. e) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x\,\mathrm{tg}(x)}$ f) $f(x) = 1 + x^2 + x^3$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ h) $f(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}) & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$ i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

**(38)**Estude a funçãoo dada, com relação a máximos e mínimos locais e globais no domínio dado.

*a)* $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$ *b)* $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

*c)* $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x, \quad x \in [0, \pi]$ *d)* $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2 \quad x \in [-3, 2]$

*e)* $f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in [-1, 2]$ *f)* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

*g)* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x \in [1, 3]$ *h)* $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad x \in [0, 1]$

**(39)**Se $p$ for um ponto de inflexão de $f$ e se $f'(p) = 0$, dizemos que $p$ é um ponto de inflexão horizontal. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições $b$ e $c$ devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de $f$? Justifique sua resposta. Existem $b$ e $c$ que tornam 1 ponto de inflexão horizontal? Em caso afirmativo, determine-os.

**(40)** Um carro em repouso desloca-se sobre uma rodovia cuja função posição é dada por $x(t) = -t^2 + 7t - 10$, para $t \geq 0$.
(a) Em que tempo o carro consegue a maior distï¿½ncia do ponto de origem?
(b) Qual é a velocidade do carro no instante $t$?
(c) Qual é a aceleração do carro no instante $t$?
(d) Em que intervalo de tempo o carro avança? e onde retrocede?
(e) Em que intervalo de tempo a aceleração do carro é positiva? e onde é negativa?
(f) Esboce o gráfico da função posição.

**(41)** Deseja-se construir uma caixa de forma cilíndrica de 1 $m^3$ de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa $R\$10$ o metro quadrado, e na tampa material de $R\$20,00$ o metro quadrado. Determine quais são as dimensões da caixa que minimizam o custo do material empregado.

**(42)** Determine a altura do cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio $R$ dado.

**(43)** Dois vértices de um retângulo $R$ estão sobre o eixo $x$ e os outros dois sobre o gráfico de $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x > 0$. Considere o cilindro que se obtém girando o retângulo $R$ em torno do eixo $x$. Determine o retângulo $R$ de modo que o volume do cilindro seja o maior possível.

**(44)** Um objeto com peso $W$ é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda fizer um ângulo $\theta$ com o plano, então a magnitude da força é

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta},$$

onde $\mu$ é uma constante positiva chamada coeficiente de atrito e $0 \leq \theta\pi/2$. Mostre $F$ é minimizada quando $\mathrm{tg}\,\theta = \mu$.

**(45)** Determine o número real positivo cuja diferencía entre ele e o seu quadrado seja máxima.

**(46)** Determine a altura do cone circular reto, de volume míximo, inscrito numa esfera de raio $R$.

**(47)** Determine o retángulo de área máxima e lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse

$$4x^2 + y^2 = 1$$

**(48)** Do ponto $A$, situado numa das margens de um rio de 9m de largura, deve-se levar energia elétrica ao ponto $B$ situado na outra margem do rio situado a uma distáncia de 15m de $A$. O fio a ser utilizado na água custa R$5 o metro e o que sería utilizado na terra custa R$3 o metro. Como devería ser feita a ligação para que o gasto com os fios seja o menor possível? Considere as margens do rio retilíneas e paralelas.

**(49)** Usando L'Hospital, calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x - \sqrt[3]{x^3-x}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^x$ i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^2-2x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{sen}^3 x}$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{99}-x^{56}+x^{21}-1}{x^{50}-1}$ n) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x}$ o) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-\cos x)^{1/x}$

p) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)^{1/\ln x}$ q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x}, \alpha > 0$ r) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right]$

**(50)** Sejam $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$ e $g(x) = x$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ não existe. Há alguma contradição com a Primeira Regra de L'Hospital? Justifique sua resposta.

**(51)** Encontre o polinômio de Taylor de grau $n$ de $f$ em $x_0$.

*a)* $f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x_0 = 1, n = 2$ *b)* $f(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0, n = 3$

*c)* $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0, n \in \mathbb{N}$ *d)* $f(x) = x^x, \quad x_0 = 1, n = 1$

*e)* $f(x) = e^{x^2}, \quad x_0 = 0, n = 2$ *f)* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 0, n = 2$

**(52)** Utilizando polinô de Taylor de ordem 2, calcule un valor aproximado de

a) $\ln 1.3$ b) $\sqrt{4.1}$ c) $\sqrt[3]{8.2}$

d) $e^{0.003}$ f) $\operatorname{sen} 0.1$ g) $\cos 0.2$