Lista n.9

1. Engenheiros freqüentemente usam a aproximação $\text{sen}x \approx x$ para valores pequenos de x. Explique por que.

2. Qual função afim ($f(x) = ax + b$) é uma boa aproximação para a função $\sqrt{x}$ em uma vizinhança de 1?

3. Use uma oportuna aproximação linear para calcular $(5,103)^2$ e compare com seu valor real 26.040609.

4. Use uma oportuna aproximação linear para calcular $\dfrac{1}{9,78}$ e compare com o valor 0.10224949 obtido com uma calculadora.

5. Calcule o polinômio de Taylor de ordem n (qualquer) em $p = 0$ das seguintes funções:
   a) $\sin(x)$, b) $\cos(x)$, c) e^x, d) e^{-x}.

6. Calcule o polinômio de Taylor em $p = 0$ da ordem indicada, para as seguintes funções:
   a) $\sin(x^2)$, grau 8 b) $\sin^2(x)$, grau 6 c) $\sin(x)e^x$, grau 6

7. Ache o polinômio de Taylor do n-ésimo grau no ponto a para as seguintes funções:
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $a = 1$; $n = 3$.
   (b) $f(x) = e^{-x}$; $a = 0$; $n = 4$.
   (c) $f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; $n = 3$.
   (d) $f(x) = \text{sen}x$; $a = \dfrac{\pi}{6}$; $n = 3$.
   (e) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$; $n = 4$.

8. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ como um polinômio em potências de $(x - 1)$.

9. Calcule os seguintes limites usando oportunos polinômios de Taylor (se possível e necessário):
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^\alpha}$

10. Calcule os seguintes limites usando a regra de L'Hôpital (se possível e necessário):
    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\text{sen}\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x}{2x-\pi}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \text{sen}x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{e^x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\text{sen}x)}{(\pi-2x)^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$

    (k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ (m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\text{sen}x}$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \text{sen}x \ln x$

11. (*) Queremos aproximar o valor de $\cos(1)$ e de $\sin(1)$ através de seus polinômios de Taylor calculados em 0. Qual será o grau do polinômio necessário para o erro ser menor de 10^{-k}?

12. (*) Calcule o valor de $\ln(1,2)$ com quatro casas decimais de precisão expandindo $f(x) = \ln(1+x)$ como polinômio de Taylor em torno de $a = 0$.

Gabarito

Exercício 3 $25 + 10 * 0.103 = 26.03$

Exercício 4 $0.1 - 0.01 * 0.22 = 0.1022$

Exercício 6 a) $x^2 - x^6/6$ b) $x^2 - x^4/3 + 2x^6/45$

Exercício 10 a) -1, b) 0, c) 1, d) $-3/2$, f) 2, g) 0, h) $+\infty$, k) e^2, l) $+\infty$, n) 1, o) 0.