8^{a} Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Esboço de gráficos

1. Encontre todos os pontos críticos (onde $f' = 0$) das funções dadas:
(*a*) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$ (*b*) $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$ (*c*) $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$ (*d*) $h(x) = \dfrac{x-3}{x+7}$
(*e*) $g(x) = [\text{sen}(3x)]^2$ (*f*) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (*g*) $h(z) = ze^{2z}$

2. Ache os pontos de máximo e de mínimo (locais e globais) das funções dadas, nos intervalos indicados.
(*a*) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$; $[-2, 1]$ (*b*) $f(x) = x|x - 2|$; $[0, 3]$
(*c*) $g(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$; $[\frac{1}{2}, 2]$ (*d*) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $[-1, 2]$
(*e*) $h(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$; $[2, 5] \setminus \{3\}$ (*f*) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $[-1, 2]$

3. Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de $R\$12,00$ por metro linear no lado paralelo ao rio e de $R\$8,00$ por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com $R\$3.600,00$ de material.

4. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 5 cm e 12 cm de altura.

5. Ache as dimensões do maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 m de cerca.

6. As dimensões de um retângulo de área máxima com base no eixo x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$ pertencem ao intervalo:
(*a*) $[2, \ 5]$ (*b*) $[0, 3]$ (*c*) $(3, 7]$ (*d*) $[4, 9)$ (*e*) $[0, 6)$

7. Verifique se as hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas pelas funções abaixo nos intervalos indicados. Ache, então, um valor c que satisfaça a conclusão do teorema de Rolle.
(*a*) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $[1, 3]$
(*b*) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $[1, 2]$
(*c*) $f(x) = \text{sen}(2x)$; $[0, \pi/2]$

8. Verifique se as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas pelas funções abaixo nos intervalos indicados. Ache, então, um valor c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio.
(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $[0, 1]$
(*b*) $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $[-2, 1]$
(*c*) $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$

9. Seja $c \in \mathbb{R}$ constante. Use o teorema de Rolle para provar que a equação $x^3 + 2x + c = 0$ não pode ter mais do que uma raíz real.

10. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f'(x) = 1$, $\forall\ x \in (a, b)$. Prove que $f(x) = x - a + f(a)$, $\forall \quad x \in [a, b]$. (Dica: use o teorema do valor médio)

11. Verifique que para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0, 1/n\,\pi], \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle; em seguida deduza que em toda vizinhança de 0 existe pelo menos um ponto crítico da f.

12. **(*!)** Mostre que $e^x > \frac{x^n}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$: lê-se n fatorial).
Roteiro: 1) Mostre que é verdade para $x = 0$. 2) Use a derivada primeira para mostrar que $e^x - x$ é uma função não decrescente em $(0, +\infty)$. 3) Usando o resultado anterior, mostre que $e^x - x^2/2$ é uma função não decrescente em $(0, +\infty)$ 4) Generalize.

13. a) Determinar o maior intervalo I que contém $x = 0$, no qual a função $f(x) = x^4 - 4x + 1$ é invertível (definir apropriadamente o contradomínio de $f|_I$).
b) Dita f^{-1} a inversa de $f|_I$, calcular, se possível, $(f^{-1})'(6)$.

14. **(!)** Mostre que para todo $x > 0$, tem-se

$$(a)\ \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \qquad\qquad (b)\ \mathrm{sen} x > x - \frac{x^3}{3!}$$

15. Esboce o gráfico das funções a seguir, seguindo o roteiro no finas desta lista:
$(a)\ f(x) = x^3 - 12x + 1$ $\quad (b)\ f(x) = xe^{-3x}$ $\quad (c)\ f(x) = 2\cos(3x)$ $\quad (d)\ f(x) = x \ln x$ $\quad (e)\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
$(f)\ f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad (g)\ f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$ $\quad (h)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ $\quad (i)\ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad (j)\ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
$(k)\ f(x) = \dfrac{x^2}{2x+5}$ $\quad (l)\ f(x) = \dfrac{1}{x-1} - x$ $\quad (m)\ f(x) = e^x - x$ $\quad (n)\ f(x) = \sqrt{|x^2-2|}$
$(o)\ f(x) = (x^3 - 4x^2 + 4x)e^{-x}$ $\quad (p)\ f(x) = \dfrac{1 + |\ln(x)|}{1 + |x|}$ $\quad (q)\ f(x) = x^2 e^{\left(\frac{|x|-1}{x}\right)}$ $\quad (r)\ f(x) = xe^{-x^2}$

16. Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.

17. Encontre o ponto sobre a parábola $x + y^2 = 0$ que está mais próximo do ponto $(0, -3)$.

18. Considere o gráfico da função $f : [-2, 3/2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ e o ponto P de coordenadas $(0, 3/2)$:
a) encontre o ponto A pertencente ao gráfico, que tenha distância máxima de P;
b) encontre o ponto B pertencente ao gráfico, que tenha distância mínima de P.

19. **(!)** Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que peixes migratórios tentam minimizar a energia total requerida para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente $u\,(u < v)$, então o tempo requerido para nadar uma distância L é $\frac{L}{v-u}$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por $E(v) = av^3 \dfrac{L}{v-u}$ onde a é uma constante de proporcionalidade. Determine o valor de v que minimiza E e esboce o gráfico de E.

Gabarito

Exercício 1 e) $x = k\pi/6$, $k \in \mathbb{Z}$ g) $z = -1/2$

Exercício 2:

(a) -2 mín (global), -1 máx (local), 0 mín (local), 1 máx, (global).

(b) 0 e 2 mínimos (globais), 1 máx (local), 3 máx (global).

(c) 1 mín (global), 1/2 máx (local), 2 máx (global).

(d) 2 mín (global), -1 mín (local), 0 máx, (global).

(f) -1 máx (local), 2 máx (global), 0 mín (global).

Exercício 3: $v = 112.5m \times 150m$

Exercício 4: $r = (10/3)cm,\ h = 5cm$.

Exercício 13: $I = (-\infty, 1],\ (f^{-1})'(6) = (f^{-1})'(f(-1)) = -1/8$.

Exercício 17: $p = (-1, -1)$.

Exercício 18: $A = (-2, 4),\ B = (1, 1)\ ou\ (-1, 1)$.

Exercício 19: v=3u/2

1 Roteiro para esboço de gráficos

- Especificar o Domínio, discutir continuidade e derivabilidade (quantas vezes e onde).
- Discutir eventuais simetrias (par, ímpar, periódica).
- Calcular limites a $\pm\infty$, à fronteira do domínio, a pontos de descontinuidade (se houver!); discutir assíntotas (vert, horiz, oblíquas).
- Estudar sinal de f e raízes.
- Calcular f'. Procurar críticos, estudar sinal, eventuais limites interessantes.
- Encontrar máximos e mínimos locais.
- Colocar tudo isso no gráfico e fazer um primeiro esboço.
- Discutir máximos e mínimos globais
- VERIFICAR A COERÊNCIA DOS RESULTADOS!!!
- Calcular a derivada segunda, discutir a concavidade da função, encontrar os pontos de inflexão.
- Verificar de novo a coerência dos resultados e aperfeiçoar o gráfico com as informações da derivada segunda.